

MAT349 - INTRODUÇÃO À LÓGICA
HTTP://WWW.IME.USP.BR/MAT/349
RESOLUÇÕES DE ALGUNS EXERCÍCIOS E DEMONSTRAÇÕES DE
ALGUNS DOS TEOREMAS ENUNCIADOS EM AULA

GLÁUCIO TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IME - USP

1. AULA 10

PROPOSIÇÃO 1.1. *Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D . Tem-se:*

- (1) *Se duas avaliações $\vec{a}$ e $\vec{b}$ coincidem no conjunto das variáveis de um termo t , então $t(\vec{a}) = t(\vec{b})$.*
- (2) *Sejam A uma fórmula de $\mathcal{L}$, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ duas avaliações que coincidem nas variáveis livres de A . Então $M \models A[\vec{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\vec{b}]$.*

Demonstração. (1) Por indução no número n de símbolos funcionais que figuram em t :

- (a) Se $n = 0$, t é uma variável x ou uma constante individual c de $\mathcal{L}$; no primeiro caso, $t(\vec{a}) = \vec{a}(x) \stackrel{\text{hip.}}{=} \vec{b}(x) = t(\vec{b})$, e no segundo $t(\vec{a}) = c^M = t(\vec{b})$.
 - (b) Seja t um termo no qual figuram $n \geq 1$ símbolos funcionais, e suponha que a tese seja verdadeira para termos nos quais figurem menos que n símbolos funcionais. Então existe, para algum $k \in \mathbb{N}$, um símbolo funcional k -ário f e termos $t_1, \dots, t_k$ tais que $t = f(t_1, \dots, t_k)$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$: (1) em t_i figuram menos que n símbolos funcionais; (2) as variáveis que figuram em t_i pertencem ao conjunto das variáveis que figuram em t . Assim, pela hipótese de indução, tem-se, para $1 \leq i \leq k$, $t_i(\vec{a}) = t_i(\vec{b})$; portanto, $t(\vec{a}) = f^M(t_1(\vec{a}), \dots, t_k(\vec{a})) = f^M(t_1(\vec{b}), \dots, t_k(\vec{b})) = t(\vec{b})$.
- (2) Por indução no número n de conectivos proposicionais e quantificadores universais que figuram em A :
- (a) Se $n = 0$, A é uma fórmula atômica. Ou seja, existe, para algum $k \in \mathbb{N}$, um símbolo predicativo k -ário R e termos $t_1, \dots, t_k$ de $\mathcal{L}$ tais que $A = R(t_1, \dots, t_k)$. Pelo item (1), tem-se, para $1 \leq i \leq k$: $t_i(\vec{a}) = t_i(\vec{b})$. Assim, $M \models A[\vec{a}] \Leftrightarrow R^M(t_1(\vec{a}), \dots, t_k(\vec{a})) \Leftrightarrow R^M(t_1(\vec{b}), \dots, t_k(\vec{b})) \Leftrightarrow M \models A[\vec{b}]$.
 - (b) Seja A uma fórmula de $\mathcal{L}$ na qual ocorrem $n \geq 1$ conectivos ou quantificadores, e suponha que a tese seja verdadeira para fórmulas de $\mathcal{L}$ nas quais figurem menos que n conectivos ou quantificadores. Provemos que, neste caso, a tese também se verifica para A . Um dos seguintes casos deve ocorrer:

- (i) $A = \neg B$, para alguma fórmula B de $\mathcal{L}$. Pela hipótese de indução, a tese é válida para B . Então $M \models A[\vec{a}] \Leftrightarrow \text{não-}M \models B[\vec{a}] \Leftrightarrow \text{não-}M \models B[\vec{b}] \Leftrightarrow M \models A[\vec{b}]$.
- (ii) $A = B \rightarrow C$, onde B e C são fórmulas de $\mathcal{L}$. Pela hipótese de indução, a tese é válida para B e C . Então $M \models A[\vec{a}] \Leftrightarrow \text{não-}M \models B[\vec{a}] \text{ ou } M \models C[\vec{a}] \Leftrightarrow M \models \text{não-}B[\vec{b}] \text{ ou } M \models C[\vec{b}] \Leftrightarrow M \models A[\vec{b}]$.
- (iii) $A = (\forall x_i)B$, onde x_i é uma variável e B uma fórmula de $\mathcal{L}$. Pela hipótese de indução, a tese é válida para B . Suponha $M \models A[\vec{a}]$. Seja $\vec{b}'$ uma avaliação de variáveis tal que $\vec{b}'(x) = \vec{b}(x)$ se $x \neq x_i$. Por hipótese, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ coincidem nas variáveis livres de A ; assim, $\vec{b}'$ e $\vec{a}$ coincidem nas variáveis livres de $A = (\forall x_i)B$, donde $\vec{b}'$ e $\vec{a}$ coincidem nas variáveis livres de B exceto, possivelmente, em x_i . Tomando-se $\vec{a}'$ tal que $\vec{a}'(x_i) = \vec{b}'(x_i)$ e $\vec{a}' = \vec{a}$ fora de x_i , conclui-se que $\vec{a}'$ coincide com $\vec{b}'$ nas variáveis livres de B . Logo, como $M \models (\forall x_i)B[\vec{a}]$, segue-se $M \models B[\vec{a}']$, donde (pela hipótese de indução) $M \models B[\vec{b}']$. Como isto vale para toda $\vec{b}'$ tal que $\vec{b}'(x) = \vec{b}(x)$ se $x \neq x_i$, segue-se $M \models (\forall x_i)B[\vec{b}]$. Assim, $M \models A[\vec{a}]$ implica $M \models A[\vec{b}]$, e a recíproca segue do mesmo argumento. $\square$

2. AULAS 11, 13 E 14

PROPOSIÇÃO 2.1 (Propriedades das Noções de Satisfatibilidade e Validade no Cálculo de Predicados de 1a. Ordem). *Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e M uma interpretação de $\mathcal{L}$. Tem-se:*

- (1) (a) A é válida em M se, e somente se, $\neg A$ é contra-válida em M ;
(b) A é contra-válida em M se, e somente se, $\neg A$ é válida em M .
- (2) Nenhuma fórmula é válida e contra-válida em M .
- (3) Se $M \models A$ e $M \models A \rightarrow B$, então $M \models B$.
- (4) $A \rightarrow B$ é contra-válida em M se, e somente se, $M \models A$ e $M \models \neg B$.
- (5) Seja $\vec{a}$ uma avaliação de variáveis. Tem-se:
 - (a) $M \models A \wedge B[\vec{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\vec{a}]$ e $M \models B[\vec{a}]$;
 - (b) $M \models A \vee B[\vec{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\vec{a}]$ ou $M \models B[\vec{a}]$;
 - (c) $M \models A \leftrightarrow B[\vec{a}]$ se, e somente se, $\vec{a}$ satisfaz simultaneamente A e B ou não satisfaz ambas em M .
 - (d) $M \models (\exists x)A[\vec{a}]$ se, e somente se, existe $\vec{a}'$ que coincide com $\vec{a}$ exceto (possivelmente) em x tal que $M \models A[\vec{a}']$.
- (6) $M \models A$ se, e somente se, $M \models (\forall x)A$.
- (7) Toda **quasi-tautologia** (i.e. uma fórmula de $\mathcal{L}$ obtida a partir de uma tautologia do cálculo proposicional por substituições de fórmulas de $\mathcal{L}$ no lugar dos átomos) é válida em qualquer interpretação de $\mathcal{L}$.
- (8) Se A é uma **sentença fechada** (i.e. uma fórmula sem variáveis livres), ou $M \models A$ ou $M \models \neg A$.
- (9) Sejam $B(x_i)$ uma fórmula e t um termo livre para x_i . Então $(\forall x_i)B(x_i) \rightarrow B(t)$ é logicamente válida (i.e. é válida em qualquer interpretação).

- (10) Se x_i não ocorre livre em B , $(\forall x_i)(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (\forall x_i)C)$ é logicamente válida.

Demonstração. Seja $\vec{a}$ uma avaliação de variáveis. Considere a linguagem proposicional cujos átomos são as expressões “ $M \models A[\vec{a}]$ ”, para cada fórmula A de $\mathcal{L}$. A definição de verdade de Tarski induz uma valoração v_T nesta linguagem proposicional, que satisfaz as seguintes condições:

- (v_T1): $v_T(M \models \neg A[\vec{a}]) = v_T(\neg M \models A[\vec{a}])$
 (v_T2): $v_T(M \models A \rightarrow B[\vec{a}]) = v_T((M \models A[\vec{a}]) \rightarrow (M \models B[\vec{a}]))$

para quaisquer fórmulas A e B de $\mathcal{L}$.

Da observação acima e dos teoremas já demonstrados para o Cálculo Proposicional, seguem-se os itens (1) a (5). O item (6) é imediato e já foi demonstrado em aula. Abaixo segue a demonstração dos itens (7) a (10):

- (7) Seja $\mathcal{B}(A_1, \dots, A_n)$ uma quasi-tautologia de $\mathcal{L}$, i.e. uma fórmula obtida de uma fórmula tautológica $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$ do Cálculo Proposicional (onde $x_1, \dots, x_n$ são os átomos que figuram na referida fórmula) substituindo-se, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, o átomo x_i pela $\mathcal{L}$ -fórmula A_i . Segue-se de (v_T1) e (v_T2), por indução no número de conectivos que figuram em $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$, que:

$$v_T(M \models \mathcal{B}(A_1, \dots, A_n)[\vec{a}]) = v_T(\mathcal{B}(M \models A_1[\vec{a}], \dots, M \models A_n[\vec{a}]))$$

e, como $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$ é tautológica, segue-se que v_T assume valor “verdadeiro” em $M \models \mathcal{B}(A_1, \dots, A_n)[\vec{a}]$.

- (8) Como A é fechada, decorre da proposição 1.1 que, se alguma avaliação de variáveis satisfizer A em M , o mesmo ocorrerá para qualquer outra avaliação de variáveis, e se alguma avaliação de variáveis não satisfizer A em M , nenhuma outra a satisfará.
 (9) Decorre dos seguintes lemas:

Notação. A seguinte notação será usada no enunciado e demonstração dos lemas abaixo. Sejam x_i uma variável, t e u termos de $\mathcal{L}$, $\vec{a}$ uma avaliação de variáveis e b um elemento do universo de M . Denotar-se-ão por:

- $t|_{x_i=u}$ o termo de $\mathcal{L}$ obtido de t por substituição da variável x_i pelo termo u (caso x_i não ocorra em t , isto significa que $t|_{x_i=u}$ coincide com t).
- $\vec{a}|_{x_i \mapsto b}$ a avaliação de variáveis dada por: (i) $x_i \mapsto b$ e (ii) $y \mapsto \vec{a}(y)$ se y for uma variável de $\mathcal{L}$ distinta de x_i .

Uma notação similar para denotar fórmulas obtidas por substituições de termos de $\mathcal{L}$ em variáveis livres foi fixada nos slides 15 e 16 da aula 14.

LEMA 2.1. Sejam t e u termos de $\mathcal{L}$, $t' \doteq t|_{x_i=u}$, $\vec{a}$ uma avaliação de variáveis e $\vec{a}' \doteq \vec{a}|_{x_i \mapsto u(\vec{a})}$. Então $t'(\vec{a}) = t(\vec{a}')$.

LEMA 2.2. Sejam x_i uma variável, t um termo, $A(x_i)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$, e $\vec{a}$ uma avaliação de variáveis. Suponha que t é livre para x_i (vide definição no slide 17 da aula 14). Tem-se:

- (a): Tome $\vec{a}' \doteq \vec{a}|_{x_i \mapsto t(\vec{a})}$; então $M \models A(t)[\vec{a}]$ se, e somente se, $M \models A(x_i)[\vec{a}']$.
 (b): Se $M \models (\forall x_i)A(x_i)[\vec{a}]$, então $M \models A(t)[\vec{a}]$.

Demonstração do lema 2.1. Se x_i não ocorre em t , a tese é trivial (decorre da proposição 1.1 e do fato de que, neste caso, $t' = t$). Suponha, pois, que x_i ocorre

em t . Neste caso, o argumento segue por indução no número n de símbolos funcionais que ocorrem em t :

- (i): Se $n = 0$, $t = x_i$, donde $t' = u$, portanto $t'(\vec{a}) = u(\vec{a}) = x_i(\vec{a}') = t(\vec{a}')$.
- (ii): Seja t um termo no qual ocorrem $n \geq 1$ símbolos funcionais de $\mathcal{L}$, e suponha que a tese seja válida para termos nos quais figurem menos que n símbolos funcionais. Então existe $k \in \mathbb{N}$, um símbolo funcional k -ário f de $\mathcal{L}$ e termos $t_1, \dots, t_k$ tais que $t = f(t_1, \dots, t_k)$. Como em cada t_i , $1 \leq i \leq k$, figuram menos que n símbolos funcionais (caso contrário figuraria em t mais que n símbolos funcionais), pela hipótese de indução tem-se $t'_i(\vec{a}) = t_i(\vec{a}')$, para $1 \leq i \leq k$. Além disso, tem-se $t' = f(t'_1, \dots, t'_k)$. Portanto, $t'(\vec{a}) = f^M(t'_1(\vec{a}), \dots, t'_k(\vec{a})) = f^M(t_1(\vec{a}'), \dots, t_k(\vec{a}')) = t(\vec{a}')$. □

Demonstração do lema 2.2. (a): Se x_i não ocorre livre em $A(x_i)$, a tese é trivial (pois, neste caso, $A(t) = A(x_i)$ e $\vec{a}, \vec{a}'$ coincidem nas variáveis livres que ocorrem nesta fórmula). Suponha, pois, que x_i tem pelo menos uma ocorrência livre em $A(x_i)$. Neste caso, o argumento segue por indução no número n de conectivos e quantificadores universais que figuram em $A(x_i)$:

- (i): Se $n = 0$, $A(x_i)$ é atômica, i.e. existem $k \in \mathbb{N}$, um símbolo predicativo k -ário R de $\mathcal{L}$ e termos $t_1, \dots, t_k$ tais que $A(x_i) = R(t_1, \dots, t_k)$. Definindo-se, para $1 \leq i \leq k$, $t'_i \doteq t_i|_{x_i=t}$, segue-se do lema 2.1 que $t'_i(\vec{a}) = t_i(\vec{a}')$. Assim, como $A(t) = R(t'_1, \dots, t'_k)$, tem-se: $M \models A(t)[\vec{a}] \Leftrightarrow R^M(t'_1(\vec{a}), \dots, t'_k(\vec{a})) = R^M(t_1(\vec{a}'), \dots, t_k(\vec{a}')) \Leftrightarrow M \models A(x_i)[\vec{a}']$.
- (ii): Seja $A(x_i)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ na qual figuram $n \geq 1$ conectivos ou quantificadores universais, e suponha que a tese seja válida para fórmulas nas quais figurem menos que n tais símbolos. Um dos seguintes casos deve ocorrer:
 - (ii.1): $A(x_i)$ é da forma $\neg B(x_i)$, para alguma fórmula $B(x_i)$ de $\mathcal{L}$. Pela hipótese de indução, tem-se $M \models B(t)[\vec{a}] \Leftrightarrow M \models B(x_i)[\vec{a}']$. Assim, $M \models A(t)[\vec{a}] \Leftrightarrow \neg M \models B(t)[\vec{a}] \Leftrightarrow \neg M \models B(x_i)[\vec{a}'] \Leftrightarrow M \models A(x_i)[\vec{a}']$.
 - (ii.2): $A(x_i)$ é da forma $B(x_i) \rightarrow C(x_i)$, e a hipótese de indução se aplica para $B(x_i)$ e $C(x_i)$. O argumento segue como no item anterior, notando que $A(t) = B(t) \rightarrow C(t)$.
 - (ii.3): $A(x_i)$ é da forma $(\forall x_j)B(x_i)$, onde x_j é uma variável de $\mathcal{L}$, de modo que $A(t) = (\forall x_j)B(t)$. A hipótese de indução se aplica para $B(x_i)$. Além disso: (1) a variável x_j é distinta de x_i , pois estamos assumindo (vide início da demonstração) que x_i tem pelo menos uma ocorrência livre em $A(x_i)$; (2) pela hipótese de ser t livre para x_i em $A(x_i)$, a variável x_j não pode ocorrer em t (caso contrário, como x_i tem pelo menos uma ocorrência livre em $A(x_i)$, e portanto em $B(x_i)$, x_i ocorreria livre no escopo de uma variável que figura em t , i.e. t não seria livre para x_i em $A(x_i)$).

Suponha que $M \models (\forall x_j)B(t)[\vec{a}]$. Provemos que $M \models (\forall x_j)B(x_i)[\vec{a}']$. Com efeito, seja $\vec{b}'$ uma avaliação de variáveis tal que $\vec{b}'(x) = \vec{a}'(x)$ para toda variável x distinta de x_j . Defina $\vec{b} \doteq \vec{b}'|_{x_i \mapsto \vec{a}(x_i)}$. Então, como $\vec{a}' = \vec{a}|_{x_i \mapsto t(\vec{a})}$, e como x_i é distinta de x_j , segue-se que: (1) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ coincidem fora de x_j e (2) $\vec{b}' = \vec{b}|_{x_i \mapsto t(\vec{a})}$. Segue-se de (1), do fato de x_j não figurar em t e da proposição 1.1, que $t(\vec{b}) = t(\vec{a})$. Assim, de (2) segue-se que $\vec{b}' = \vec{b}|_{x_i \mapsto t(\vec{b})}$, e a hipótese de indução (com $\vec{b}$ no lugar de $\vec{a}$) fornece $M \models B(t)[\vec{b}] \Leftrightarrow M \models B(x_i)[\vec{b}']$. Ora, de (1) e de $M \models (\forall x_j)B(t)[\vec{a}]$, segue-se $M \models B(t)[\vec{b}]$, donde, por modus ponens, $M \models B(x_i)[\vec{b}']$. Como a avaliação de variáveis $\vec{b}'$ com $\vec{b}'(x) = \vec{a}'(x)$ para toda variável x distinta de x_j foi tomada arbitrariamente, segue-se $M \models (\forall x_j)B(x_i)[\vec{a}']$, como afirmado. A recíproca se verifica através do mesmo argumento.

(b): Suponha que $M \models (\forall x_i)A(x_i)[\vec{a}]$. Então, para toda avaliação de variáveis $\vec{a}'$ que coincide com $\vec{a}$ fora de x_i , tem-se $M \models A(x_i)[\vec{a}']$. Em particular, podemos escolher $\vec{a}'$ com $\vec{a}'(x_i) = t(\vec{a})$, e então segue-se da parte (a) que $M \models A(t)[\vec{a}]$.

□

- (10) Sejam M uma interpretação e $\vec{a}$ uma avaliação de variáveis. Provemos que, se x_i não tem ocorrências livres em B , tem-se $M \models (\forall x_i)(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (\forall x_i)C)[\vec{a}]$. Com efeito, suponha que isto não ocorra. Então (1) $M \models (\forall x_i)(B \rightarrow C)[\vec{a}]$ mas (2) $\neg M \models B \rightarrow (\forall x_i)C[\vec{a}]$. De (2), segue-se (3) $M \models B[\vec{a}]$ e (4) $\neg M \models (\forall x_i)C[\vec{a}]$. De (4), conclui-se que (5) existe uma avaliação de variáveis $\vec{a}'$ que coincide com $\vec{a}$ fora de x_i , tal que $\neg M \models C[\vec{a}']$. Além disso, de (1) segue-se (6) $M \models B \rightarrow C[\vec{a}']$. Como x_i não tem ocorrências livres em B , e como $\vec{a}'$ que coincide com $\vec{a}$ fora de x_i , segue-se que (7) $\vec{a}$ e $\vec{a}'$ coincidem nas variáveis livres que figuram em B . De (3), de (7) e da proposição 1.1, segue-se que (8) $M \models B[\vec{a}']$. De (8) e (6) segue-se, por modus ponens, (9) $M \models C[\vec{a}']$, o que contradiz (5). Portanto, devemos ter $M \models (\forall x_i)(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (\forall x_i)C)[\vec{a}]$; como a interpretação M e a avaliação de variáveis $\vec{a}$ foram tomadas arbitrariamente, conclui-se que $(\forall x_i)(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (\forall x_i)C)$ é logicamente válida.

□

3. AULA 15

PROPOSIÇÃO 3.1. *Todo teorema de uma teoria de 1a. ordem K é válido em qualquer modelo de K .*

Demonstração. Num modelo de K todos os axiomas são válidos, por definição. Pelos itens 6 e 3 da proposição 2.1, as regras de inferência de K transformam fórmulas válidas em fórmulas válidas.

□

PROPOSIÇÃO 3.2. *Sejam K uma teoria de 1a. ordem e $\mathcal{A}$ uma quasi-tautologia de K . Então $\mathcal{A}$ é um teorema de K e pode ser demonstrada usando-se apenas os esquemas de axiomas (A1) a (A3) e (MP).*

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{B}(A_1, \dots, A_n)$, i.e. $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$ é uma fórmula tautológica do Cálculo Proposicional (onde $x_1, \dots, x_n$ são os átomos que figuram na referida fórmula) e $\mathcal{A}$ é obtida substituindo-se, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, o átomo x_i pela $\mathcal{L}$ -fórmula A_i . Pelo teorema da completude para o Cálculo Proposicional, $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$ é um teorema da teoria formal L , de modo que existe uma dedução formal em L da referida fórmula. Numa tal dedução, substitua, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, o átomo x_i pela $\mathcal{L}$ -fórmula A_i , e substitua os demais átomos que porventura ocorram em alguma fórmula da dedução por fórmulas quaisquer de K . Após estas substituições, obtém-se uma dedução em K de $\mathcal{A}$, a qual só usa os esquemas de axiomas (A1) a (A3) e (MP). $\square$

PROPOSIÇÃO 3.3. *Todo teorema de um cálculo de predicados de 1a. ordem é logicamente válido.*

Demonstração. As fórmulas pertencentes aos esquemas de axiomas (A1) a (A3) são quasi-tautologias; portanto, pelo item 7 da proposição 2.1, são logicamente válidas. As fórmulas dos esquemas de axiomas (A4) e (A5) também são logicamente válidas, pelos itens 9 e 10 da referida proposição, respectivamente. Finalmente, pelos itens 3 e 6 da mesma proposição, as regras de inferência (MP) e (Gen) transformam fórmulas logicamente válidas em fórmulas logicamente válidas. $\square$

DEFINIÇÃO 3.1. *Uma teoria de 1a. ordem K diz-se **consistente** se, para qualquer fórmula A de K , se A e $\neg A$ não são ambos teoremas de K .*

COROLÁRIO 3.1. *Todo cálculo de predicados de 1a. ordem K é consistente.*

Demonstração. Pelo item 1 da proposição 2.1, para qualquer fórmula A de K , A e $\neg A$ não podem ser ambas logicamente válidas. Assim, pela última proposição, A e $\neg A$ não podem ser ambas teoremas de K . $\square$

PROPOSIÇÃO 3.4. *Sejam K uma teoria de 1a. ordem, Γ um conjunto de fórmulas, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fórmulas de Γ . Se, numa dedução mostrando que $\Gamma, \mathcal{A} \vdash_K \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ não depende de $\mathcal{A}$, então $\Gamma \vdash_K \mathcal{B}$.*

Demonstração. Por indução no comprimento n de uma dedução $(A_1, \dots, A_n)$ (onde $A_n = \mathcal{B}$). Suponha que a tese seja válida para deduções com comprimento menor que n . Se A_n é um axioma ou A_n pertence a Γ , tem-se $\Gamma \vdash \mathcal{B}$, trivialmente. Se este não for o caso, então A_n obtém-se a partir de uma ou duas das fórmulas anteriores na seqüência, por aplicação de (Gen) ou (MP), e nenhuma destas fórmulas depende de $\mathcal{A}$. Neste caso, a hipótese de indução se aplica a esta(s) fórmula(s) (uma ou duas), de modo que cada uma delas pode ser deduzida a partir de Γ ; portanto, $\Gamma \vdash \mathcal{B}$. $\square$

TEOREMA 3.1 (da Dedução). *Sejam K uma teoria de 1a. ordem, Γ um conjunto de fórmulas, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fórmulas de Γ . Se, numa dedução mostrando que $\Gamma, \mathcal{A} \vdash_K \mathcal{B}$ não se aplica (Gen) a uma fórmula que depende de $\mathcal{A}$ com variável quantificada livre em $\mathcal{A}$, então $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.*

Demonstração. Seja $(A_1, \dots, A_n = \mathcal{B})$ uma dedução conforme o enunciado. Mostremos que, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, tem-se $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow A_k$. Com efeito, seja dado um tal k e suponha, como hipótese de indução, que a tese seja verdadeira para todas as fórmulas da seqüência com índice menor que k . Um dos seguintes casos deve ocorrer:

- (1) A_k é um axioma ou $A_k \in \Gamma$. Então, tem-se $\Gamma \vdash_K A_k$. Como $\vdash_K A_k \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow A_k)$, pelo esquema de axiomas I, segue-se por (MP) que $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow A_k$.
- (2) $A_k = \mathcal{A}$. Então $\mathcal{A} \rightarrow A_k$ coincide com $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, que é uma quasi-tautologia, portanto um teorema de K , donde $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow A_k$.
- (3) Existem índices $i, j < k$ tais que A_j coincide com $A_i \rightarrow A_k$ e A_k é obtida por (MP) de A_i e A_j . Pela hipótese de indução, $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow A_i$ e $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow (A_i \rightarrow A_k)$. Como $\vdash_K (\mathcal{A} \rightarrow (A_i \rightarrow A_k)) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow A_i) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow A_k))$ (pelo esquema de axiomas II), segue-se, aplicando-se (MP) duas vezes, $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow A_k$.
- (4) Existe um índice $j < k$ e uma variável x_i tal que A_k coincide com $(\forall x_i)A_j$ (i.e. A_k é obtida por (Gen) de A_j). Pela hipótese do teorema, A_j não depende de $\mathcal{A}$ ou x_i não ocorre livre em $\mathcal{A}$.
 - (a) Se A_j não depende de $\mathcal{A}$, pela proposição anterior tem-se $\Gamma \vdash_K A_j$. Aplicando-se (Gen), segue-se $\Gamma \vdash_K (\forall x_i)A_j$. Como $\vdash_K (\forall x_i)A_j \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_i)A_j)$, por (MP) segue-se $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow (\forall x_i)A_j$.
 - (b) Suponha que x_i não ocorre livre em $\mathcal{A}$. Pela hipótese de indução, tem-se $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow A_j$. Aplicando-se (Gen), conclui-se $\Gamma \vdash_K (\forall x_i)(\mathcal{A} \rightarrow A_j)$. Por outro lado, pelo esquema de axiomas V, tem-se $\vdash_K (\forall x_i)(\mathcal{A} \rightarrow A_j) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_i)A_j)$, pois x_i não ocorre livre em $\mathcal{A}$. Assim, por (MP), conclui-se $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow (\forall x_i)A_j$.

□

Exercício 3.1. Seja K uma teoria de 1a. ordem. Mostre que:

- (1) $\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_2)(\forall x_1)\mathcal{A}$
- (2) $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\forall x)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x)\mathcal{B})$
- (3) $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\exists x)\mathcal{A} \rightarrow (\exists x)\mathcal{B})$
- (4) $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \leftrightarrow ((\forall x)\mathcal{A} \wedge (\forall x)\mathcal{B})$
- (5) $\vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$
- (6) $\vdash \neg(\forall x)\mathcal{A} \rightarrow (\exists x)\neg\mathcal{A}$

Demonstração. (1) **A1:** $(\forall x_1)(\forall x_2)\mathcal{A}$ (hip.)

A2: $(\forall x_1)(\forall x_2)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_2)\mathcal{A}$ (esquema de axiomas IV; note que x_1 é livre para x_2 em qualquer fórmula)

A3: $(\forall x_2)\mathcal{A}$ (MP, de A1 e A2)

A4: $(\forall x_2)\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (esquema de axiomas IV)

A5: $\mathcal{A}$ (MP, de A3 e A4)

A6: $(\forall x_1)\mathcal{A}$ (Gen, de A5)

A7: $(\forall x_2)(\forall x_1)\mathcal{A}$ (Gen, de A6)

$(A1, \dots, A7)$ mostra que $(\forall x_1)(\forall x_2)\mathcal{A} \vdash_K (\forall x_2)(\forall x_1)\mathcal{A}$. Como não foi aplicada (Gen) com variável quantificada livre em $(\forall x_1)(\forall x_2)\mathcal{A}$, segue-se do teorema da dedução que $\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_2)(\forall x_1)\mathcal{A}$.

- (2) **A1:** $(\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ (hip.)
- A2:** $(\forall x)\mathcal{A}$ (hip.)
- A3:** $(\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ (esquema de axiomas IV)
- A4:** $(\forall x)\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (esquema de axiomas IV)
- A5:** $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ (MP, de A1 e A3)

A6: $\mathcal{A}$ (MP, de A2 e A4)

A7: $\mathcal{B}$ (MP, de A5 e A6)

A8: $(\forall x)\mathcal{B}$ (Gen, de A7)

$(A1, \dots, A8)$ mostra que $(\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}), (\forall x)\mathcal{A} \vdash_K (\forall x)\mathcal{B}$. Como não foi aplicada (Gen) com variável quantificada livre em $(\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ ou $(\forall x)\mathcal{A}$, segue-se do teorema da dedução (e da observação subsequente ao enunciado do referido teorema, vista em aula, que permite aplicar o teorema em “cascata”), que $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\forall x)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x)\mathcal{B})$.

(3)

LEMA 3.1. $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \vdash_K ((\exists x)\mathcal{A} \rightarrow (\exists x)\mathcal{B})$

Demonstração. (para efeito de simplificação, foram omitidas aplicações de (MP))

B1: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ (hip.)

B2: $\neg(\forall x)\neg\mathcal{A}$ (hip.)

B3: $\neg\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{A}$ (transposição de B1)

B4: $(\forall x)(\neg\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{A})$ (Gen, de B3)

B5: $(\forall x)\neg\mathcal{B} \rightarrow (\forall x)\neg\mathcal{A}$ (teorema demonstrado no exercício anterior)

B6: $\neg(\forall x)\neg\mathcal{A} \rightarrow \neg(\forall x)\neg\mathcal{B}$ (transposição de B5)

B7: $\neg(\forall x)\neg\mathcal{B}$ (MP, de B6 e B2)

$(B1, \dots, B7)$ mostra que $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \neg(\forall x)\neg\mathcal{A} \vdash_K \neg(\forall x)\neg\mathcal{B}$. Como não foi aplicada (Gen) com variável quantificada livre em $\neg(\forall x)\neg\mathcal{A}$, o lema segue do teorema da dedução.

□

Considere, agora, a seguinte dedução (novamente omitimos algumas aplicações de MP para efeito de simplificação):

C1: $(\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ (hip.)

C2: $(\exists x)\mathcal{A}$ (hip.)

C3: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ (de C1 e do esquema de axiomas IV)

C4: $(\exists x)\mathcal{A} \rightarrow (\exists x)\mathcal{B}$ (de C3 e do lema anterior)

C5: $(\exists x)\mathcal{B}$ (MP, de C4 e C2)

$(C1, \dots, C5)$ mostra que $(\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}), (\exists x)\mathcal{A} \vdash_K (\exists x)\mathcal{B}$. Como não foi aplicada (Gen) com variável quantificada livre em $(\exists x)\mathcal{A}$ ou $(\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$, segue-se $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\exists x)\mathcal{A} \rightarrow (\exists x)\mathcal{B})$.

(4) **A1:** $(\forall x)\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ (hip.)

A2: $(\forall x)\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ (esquema de axiomas IV)

A3: $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ (MP, de A1 e A2)

A4: $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ (quasi-tautologia)

A5: $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ (quasi-tautologia)

A6: $\mathcal{A}$ (MP, de A3 e A4)

A7: $\mathcal{B}$ (MP, de A3 e A5)

A8: $(\forall x)\mathcal{A}$ (Gen, de A6)

A9: $(\forall x)\mathcal{B}$ (Gen, de A7)

A10: $(\forall x)\mathcal{A} \rightarrow ((\forall x)\mathcal{B} \rightarrow ((\forall x)\mathcal{A} \wedge (\forall x)\mathcal{B}))$ (quasi-tautologia)

A11: $(\forall x)\mathcal{B} \rightarrow ((\forall x)\mathcal{A} \wedge (\forall x)\mathcal{B})$ (MP, de A10 e A8)

A12: $(\forall x)\mathcal{A} \wedge (\forall x)\mathcal{B}$ (MP, de A11 e A9)

$(A1, \dots, A12)$ mostra que $(\forall x)\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vdash_K (\forall x)\mathcal{A} \wedge (\forall x)\mathcal{B}$. Como não foi aplicada (Gen) com variável quantificada livre em $(\forall x)\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, segue-se $\vdash_K (\forall x)\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \rightarrow ((\forall x)\mathcal{A} \wedge (\forall x)\mathcal{B})$.

Considere, agora:

- B1:** $(\forall x)\mathcal{A}$ (hip.)
- B2:** $(\forall x)\mathcal{B}$ (hip.)
- B3:** $(\forall x)\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (esquema de axiomas IV)
- B4:** $(\forall x)\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ (esquema de axiomas IV)
- B5:** $\mathcal{A}$ (MP, de B1 e B3)
- B6:** $\mathcal{B}$ (MP, de B2 e B4)
- B7:** $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$ (quasi-tautologia)
- B8:** $\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ (MP, de B7 e B5)
- B9:** $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ (MP, de B8 e B6)
- B10:** $(\forall x)\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ (Gen, de B9)

$(B1, \dots, B10)$ mostra que $(\forall x)\mathcal{A}, (\forall x)\mathcal{B} \vdash_K (\forall x)\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$. Como não foi aplicada (Gen) com variável quantificada livre em $(\forall x)\mathcal{A}$ ou $(\forall x)\mathcal{B}$, segue-se, por duas aplicações do teorema da dedução, que $\vdash_K ((\forall x)\mathcal{A} \wedge (\forall x)\mathcal{B}) \rightarrow (\forall x)\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$. Como já tínhamos $\vdash_K (\forall x)\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \rightarrow ((\forall x)\mathcal{A} \wedge (\forall x)\mathcal{B})$, conclui-se, por aplicação da quasi-tautologia $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \rightarrow ((\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D}))$ e duas vezes (MP), que $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \leftrightarrow ((\forall x)\mathcal{A} \wedge (\forall x)\mathcal{B})$.

- (5) Por indução sobre n : seja $n \geq 1$, e suponha, como hipótese de indução, que a tese seja verdadeira para fórmulas com menos que n quantificadores universais. Considere a seguinte dedução:

- A1:** $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\mathcal{A}$ (hip.)
- A2:** $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_2) \dots (\forall x_n)\mathcal{A}$ (esquema de axiomas IV)
- A3:** $(\forall x_2) \dots (\forall x_n)\mathcal{A}$ (MP, de A1 e A2)

$(A1, \dots, A3)$ mostra que $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\mathcal{A} \vdash_K (\forall x_2) \dots (\forall x_n)\mathcal{A}$. Como não foi aplicada (Gen) com variável quantificada livre em $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\mathcal{A}$, segue-se do teorema da dedução que $\vdash_K (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_2) \dots (\forall x_n)\mathcal{A}$. Pela hipótese de indução, tem-se $\vdash_K (\forall x_2) \dots (\forall x_n)\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$; então, por silogismo hipotético, conclui-se que $\vdash_K (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

- (6) **A1:** $(\forall x)\neg\neg\mathcal{A}$ (hip.)
- A2:** $(\forall x)\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow \neg\neg\mathcal{A}$ (esquema de axiomas IV)
 - A3:** $\neg\neg\mathcal{A}$ (MP, de A1 e A2)
 - A4:** $\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (quasi-tautologia)
 - A5:** $(\forall x)\mathcal{A}$ (Gen, de A4)

$(A1, \dots, A5)$ mostra que $(\forall x)\neg\neg\mathcal{A} \vdash_K (\forall x)\mathcal{A}$. Como não foi aplicada (Gen) com variável quantificada livre em $(\forall x)\neg\neg\mathcal{A}$, segue-se do teorema da dedução que $\vdash_K (\forall x)\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow (\forall x)\mathcal{A}$. Por transposição, segue-se $\vdash_K \neg(\forall x)\mathcal{A} \rightarrow \neg(\forall x)\neg\neg\mathcal{A}$, i.e. $\vdash_K \neg(\forall x)\mathcal{A} \rightarrow (\exists x)\neg\mathcal{A}$.

□

4. AULA 16

PROPOSIÇÃO 4.1. *Sejam $\mathcal{C}$ uma subfórmula de $\mathcal{B}$, e $\mathcal{B}'$ a fórmula obtida de $\mathcal{B}$ por substituição de uma ou mais ocorrências de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{D}$. Suponha que todas as variáveis livres de $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}$ que sejam variáveis ligadas em $\mathcal{B}$ estejam na lista $\{y_1, \dots, y_k\}$. Tem-se:*

- (1) $\vdash ((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}')$ (TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA)
- (2) Se $\vdash \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D}$, então $\vdash \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}'$ (TEOREMA DA SUBSTITUIÇÃO)

Demonstração. (1) Por indução no número n de conectivos proposicionais e quantificadores universais que figuram em $\mathcal{B}$.

- (a) Se $n = 0$, então $\mathcal{B}$ é uma fórmula atômica. Como $\mathcal{C}$ é uma subfórmula de $\mathcal{B}$, o fato de $\mathcal{B}$ ser atômica implica $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}'$ é obtida de $\mathcal{B}$ por substituição de uma ou mais ocorrências de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{D}$, temos duas alternativas:
- (i) $\mathcal{B}' = \mathcal{B} = \mathcal{C}$ (i.e. nenhuma substituição é feita). Neste caso, $((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}')$ coincide com $((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B})$, que é uma quasi-tautologia (obtida a partir da fórmula tautológica $p \rightarrow (q \leftrightarrow q)$).
 - (ii) $\mathcal{B}' = \mathcal{D}$. Neste caso, $((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}')$ coincide com $((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$, que é um teorema, conforme já demonstrado no exercício 3.1.5 (vide seção anterior).
- (b) Seja $n \geq 1$; suponha que a tese seja válida para todas as fórmulas $\mathcal{B}$ nas quais figurem menos que n conectivos ou quantificadores. Se $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, usa-se o mesmo argumento do item anterior. Caso contrário, $\mathcal{C}$ deve ser uma subfórmula própria de $\mathcal{B}$ (i.e. uma subfórmula de $\mathcal{B}$, diferente de $\mathcal{B}$), e então um dos seguintes casos deve ocorrer:
- (i) $\mathcal{B} = \neg \mathcal{E}$. Como $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ deve ser uma subfórmula de $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}' = \neg \mathcal{E}'$. Pela hipótese de indução, $\vdash ((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}')$. Como $\vdash (\mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}') \leftrightarrow (\neg \mathcal{E} \leftrightarrow \neg \mathcal{E}')$, por silogismo hipotético segue-se $\vdash ((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\neg \mathcal{E} \leftrightarrow \neg \mathcal{E}')$.
 - (ii) $\mathcal{B} = (\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F})$. Então, pelo fato de ser $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}' = (\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{F}')$. Pela hipótese de indução, a tese vale para $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$. Como $\vdash (\mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}') \wedge (\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{F}') \rightarrow ((\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}) \leftrightarrow (\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{F}'))$, conclui-se a tese para $\mathcal{B}$ por silogismo hipotético.
 - (iii) $\mathcal{B} = (\forall x)\mathcal{E}$. Então, pelo fato de ser $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}' = (\forall x)\mathcal{E}'$, e pela hipótese de indução a tese vale para $\mathcal{E}$, i.e. $((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}')$. Aplicando-se (Gen), conclui-se:

$$(1) \quad \vdash (\forall x)[((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}')]]$$

Como x é ligada em $\mathcal{B}$, se x ocorrer livre em $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}$, pela hipótese da proposição seguir-se-ia $x \in \{y_1, \dots, y_k\}$. Então x não ocorre livre em $(\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$. Portanto, do esquema de axiomas (V) e de (1), segue-se $((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\forall x)(\mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}')$. Mas, como corolário do exercício 3.1.2 (vide seção anterior), tem-se $\vdash (\forall x)(\mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}') \rightarrow ((\forall x)\mathcal{E} \leftrightarrow (\forall x)\mathcal{E}')$; portanto, por silogismo hipotético, segue-se $((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow ((\forall x)\mathcal{E} \leftrightarrow (\forall x)\mathcal{E}')$.

- (2) Com efeito, suponha $\vdash \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D}$. Então, aplicando-se (Gen) k vezes, conclui-se $\vdash (\forall y_1) \dots (\forall y_k)\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D}$. Logo, pelo item anterior e por (MP) segue-se $\vdash \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C}$. $\square$

DEFINIÇÃO 4.1. Uma **dedução usando a regra C** numa teoria de 1a. ordem K , de uma fórmula $\mathcal{B}$ a partir de um conjunto de fórmulas Γ (**NOTAÇÃO:** $\Gamma \vdash_C \mathcal{B}$), é uma seqüência de fórmulas $(B_1, \dots, B_n)$, com $B_n = \mathcal{B}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

- (1) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, uma das seguintes condições é satisfeita:
 - (a) A_i é um axioma de K ou $A_i \in \Gamma$.
 - (b) A_i é obtida por (MP) ou (Gen) a partir de fórmulas anteriores da seqüência.
 - (c) existe $j < i$ tal que $A_j = (\exists x)\mathcal{C}(x)$ e $A_i = \mathcal{C}(d)$, onde d é uma nova constante individual (**regra C**). Ao ser aplicada a regra C, a constante individual

introduzida passa a fazer parte da linguagem, i.e. estamos estendendo a linguagem de K . Portanto, nas fórmulas seguintes da seqüência, esta constante pode ser usada nos esquemas de axiomas.

- (2) Nenhuma aplicação de (Gen) é feita com variável quantificada livre numa fórmula $(\exists x)C(x)$ à qual tenha sido aplicada a regra C anteriormente.
- (3) As constantes individuais novas não figuram em $\mathcal{B}$.

PROPOSIÇÃO 4.2. Se $\Gamma \vdash_C \mathcal{B}$, então $\Gamma \vdash \mathcal{B}$. Além disso, é possível tomar uma dedução de $\Gamma \vdash \mathcal{B}$ satisfazendo a seguinte propriedade: se, nesta dedução, ocorrer uma aplicação de (Gen) a uma fórmula que dependa de uma fórmula $\mathcal{D}$, com variável quantificada x , então isto já acontecia na dedução original de $\Gamma \vdash_C \mathcal{B}$.

LEMA 4.1. Seja y uma variável que não ocorre livre numa fórmula $\mathcal{B}$ de K . Então $\vdash_K (\forall y)(C(y) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\exists y)C(y) \rightarrow \mathcal{B})$.

Demonstração. (do lema)

Considere a seguinte dedução em K :

- A1:** $(\forall y)(C(y) \rightarrow \mathcal{B})$ (hip.)
- A2:** $(\forall y)(C(y) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (C(y) \rightarrow \mathcal{B})$ (axioma do esquema IV)
- A3:** $C(y) \rightarrow \mathcal{B}$ ((MP), de A1 e A2)
- A4:** $\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg C(y)$ (transposição de A3)
- A5:** $(\forall y)(\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg C(y))$ ((Gen), de A4)
- A6:** $(\forall y)(\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg C(y)) \rightarrow (\neg \mathcal{B} \rightarrow (\forall y)\neg C(y))$ (axioma do esquema V, pelo fato de y não ocorrer livre em $\mathcal{B}$)
- A7:** $\neg \mathcal{B} \rightarrow (\forall y)\neg C(y)$ ((MP), de A5 e A6)
- A8:** $\neg(\forall y)\neg C(y) \rightarrow \mathcal{B}$ (transposição, de A7)

(A1, ..., A8) mostra $(\forall y)(C(y) \rightarrow \mathcal{B}) \vdash_K (\exists y)C(y) \rightarrow \mathcal{B}$. A única aplicação de (Gen) na referida dedução foi feita com variável quantificada y , que não ocorre livre em $(\forall y)(C(y) \rightarrow \mathcal{B})$; assim, podemos aplicar o teorema da dedução para concluir a tese. $\square$

Demonstração. (da proposição)

Sejam $(\exists y_1)C_1(y_1), \dots, (\exists y_n)C_n(y_n)$ as fórmulas às quais a regra C foi aplicada e $d_1, \dots, d_n$ as respectivas constantes individuais introduzidas, na ordem de ocorrência, numa dedução de $\Gamma \vdash_C \mathcal{B}$. Para $1 \leq j \leq n$, denote por K_j a teoria de 1a. ordem obtida a partir de K por introdução das constantes individuais $\{d_1, \dots, d_j\}$ (i.e. a teoria de 1a. ordem cujos símbolos são os mesmos de K acrescidos das referidas constantes, e cujos axiomas próprios são os mesmos de K).

Decorre da definição 4.1 que $\Gamma, C_1(d_1), \dots, C_n(d_n) \vdash_{K_n} \mathcal{B}$ (i.e. $\mathcal{B}$ é dedutível em K_n , sem usar a regra C, a partir de $\Gamma, C_1(d_1), \dots, C_n(d_n)$). Pelo item 2 da definição 4.1, podemos aplicar o teorema da dedução para inferir da última afirmação que $\Gamma, C_1(d_1), \dots, C_{n-1}(d_{n-1}) \vdash_{K_n} C_n(d_n) \rightarrow \mathcal{B}$ (e ainda pelo referido teorema, podemos tomar uma tal dedução satisfazendo a propriedade da segunda parte do enunciado). Seja y uma variável que não figura em nenhuma das fórmulas de $\Gamma, (\exists y_1)C_1(y_1), \dots, (\exists y_n)C_n(y_n)$. Substitua, na dedução de $\Gamma, C_1(d_1), \dots, C_{n-1}(d_{n-1}) \vdash_{K_n} C_n(d_n) \rightarrow \mathcal{B}$, todas as ocorrências de d_n por y ; obtém-se, assim, uma dedução de $\Gamma, C_1(d_1), \dots, C_{n-1}(d_{n-1}) \vdash_{K_n} C_n(y) \rightarrow \mathcal{B}$ na qual não figura a constante individual d_n (isto decorre da hipótese sobre a ordem de ocorrência das fórmulas $(\exists y_1)C_1(y_1), \dots, (\exists y_n)C_n(y_n)$ feita na primeira sentença desta demonstração). Então esta também será uma dedução em K_{n-1} , de modo que $\Gamma, C_1(d_1), \dots, C_{n-1}(d_{n-1}) \vdash_{K_{n-1}} C_n(y) \rightarrow \mathcal{B}$. Aplicando-se (Gen), segue-se $\Gamma, C_1(d_1), \dots, C_{n-1}(d_{n-1}) \vdash_{K_{n-1}} (\forall y)(C_n(y) \rightarrow \mathcal{B})$. Pelo fato de y não ocorrer em $\mathcal{B}$, o lema anterior e (MP)

acarretam $\Gamma, \mathcal{C}_1(d_1), \dots, \mathcal{C}_{n-1}(d_{n-1}) \vdash_{K_{n-1}} (\exists y)\mathcal{C}_n(y) \rightarrow \mathcal{B}$. Por outro lado, decorre da escolha da variável y , da definição de $\mathcal{C}_n(y)$ a partir de $\mathcal{C}_n(d_n)$ e da definição de $\mathcal{C}_n(d_n)$ a partir de $\mathcal{C}_n(y_n)$, que $\vdash_{K_{n-1}} (\exists y)\mathcal{C}_n(y) \leftrightarrow (\exists y_n)\mathcal{C}_n(y_n)$ (para provar isto, observe que a escolha de y e as referidas definições implicam que $\mathcal{C}_n(y)$ é obtida de $\mathcal{C}_n(y_n)$ por substituição de todas as ocorrências livres de y_n por y , y é livre para y_n em $\mathcal{C}(y_n)$ e y não ocorre em $\mathcal{C}(y_n)$). Assim, por silogismo hipotético conclui-se que $\Gamma, \mathcal{C}_1(d_1), \dots, \mathcal{C}_{n-1}(d_{n-1}) \vdash_{K_{n-1}} (\exists y_n)\mathcal{C}_n(y_n) \rightarrow \mathcal{B}$. Mas, pela hipótese sobre a ordem de ocorrência das fórmulas $(\exists y_1)\mathcal{C}_1(y_1), \dots, \exists(y_n)\mathcal{C}_n(y_n)$ feita na primeira sentença desta demonstração, e pela definição 4.1, tem-se $\Gamma, \mathcal{C}_1(d_1), \dots, \mathcal{C}_{n-1}(d_{n-1}) \vdash_{K_{n-1}} (\exists y_n)\mathcal{C}_n(y_n)$. Portanto, por (MP), segue-se $\Gamma, \mathcal{C}_1(d_1), \dots, \mathcal{C}_{n-1}(d_{n-1}) \vdash_{K_{n-1}} \mathcal{B}$.

Este argumento nos permitiu concluir $\Gamma, \mathcal{C}_1(d_1), \dots, \mathcal{C}_{n-1}(d_{n-1}) \vdash_{K_{n-1}} \mathcal{B}$ a partir de $\Gamma, \mathcal{C}_1(d_1), \dots, \mathcal{C}_n(d_n) \vdash_{K_n} \mathcal{B}$. Reaplicando o mesmo argumento $(n - 1)$ vezes, segue-se a tese. □

5. AULA 17

DEFINIÇÃO 5.1. *Seja K uma teoria de 1a. ordem que possui um símbolo predicativo binário “=”. Diz-se que K é uma **teoria de 1a. ordem com igualdade** se as seguintes fórmulas forem teoremas de K :*

A6: $(\forall x_1)x_1 = x_1$

A7: $x = y \rightarrow (\mathcal{B}(x, x) \rightarrow \mathcal{B}(x, y))$ se y livre para x em $\mathcal{B}(x, x)$ e $\mathcal{B}(x, y)$ se obtém de $\mathcal{B}(x, x)$ por substituição de algumas das ocorrências livres de x por y .

PROPOSIÇÃO 5.1. *Em toda teoria com igualdade, tem-se:*

- (1) $\vdash t = t$ (para qualquer termo t)
- (2) $\vdash t = s \rightarrow s = t$ (para quaisquer termos s e t)
- (3) $\vdash t = s \rightarrow (s = r \rightarrow t = r)$ (para quaisquer termos r, s e t)

Demonstração. (1) Decorre de (i) $\vdash (\forall x_1)x_1 = x_1$ (por A6), (ii) $\vdash (\forall x_1)x_1 = x_1 \rightarrow t = t$ (axioma do esquema IV) e (MP).

- (2) **Lema** Sejam K uma teoria com igualdade. Então $\vdash x = y \rightarrow y = x$.

Demonstração. (do lema)

Com efeito, tomamos $\mathcal{B}(x, x)$ a fórmula $x = x$ e $\mathcal{B}(x, y)$ a fórmula $y = x$. Então y é livre para x em $\mathcal{B}(x, x)$. Por (A7), segue-se $\vdash x = y \rightarrow (x = x \rightarrow y = x)$, teorema que usaremos na seguinte demonstração em K :

B1: $(\forall x)x = x$ (por A6)

B2: $x = x$ (de B1, pelo esquema de axiomas IV e (MP))

B3: $x = y \rightarrow (x = x \rightarrow y = x)$ (teorema obtido de A7 com $\mathcal{B}(x, y)$ dada por $y = x$)

B4: $(x = y \rightarrow (x = x \rightarrow y = x)) \rightarrow (x = x \rightarrow (x = y \rightarrow y = x))$ (quasi-tautologia)

B5: $x = x \rightarrow (x = y \rightarrow y = x)$ ((MP), de B4 e B3)

B6: $x = y \rightarrow y = x$ ((MP), de B5 e B2). □

Considere, agora, termos s e t de uma teoria com igualdade K . Tome x e y variáveis que não ocorrem em s e t , e considere a seguinte demonstração em K :

C1: $x = y \rightarrow y = x$ (lema que acabamos de demonstrar)

C2: $(\forall x)(\forall y)x = y \rightarrow y = x$ (2 aplicações de (Gen), de C1)

C3: $t = s \rightarrow s = t$ (de C2 aplicando 2 vezes o axioma IV e (MP)).

- (3) Sejam r , s e t termos de uma teoria com igualdade K , e x , y variáveis que não ocorrem em r , s e t . Sejam $\mathcal{B}(x, x)$ dada por $x = r$ e $\mathcal{B}(x, y)$ a fórmula $y = r$; portanto, y é livre para x em $\mathcal{B}(x, x)$. Assim, por (A7), tem-se $\vdash x = y \rightarrow (x = r \rightarrow y = r)$. Como $\vdash y = x \rightarrow x = y$, pelo item anterior, por silogismo hipotético conclui-se $\vdash y = x \rightarrow (x = r \rightarrow y = r)$. Então, por duas aplicações de (Gen), segue-se $\vdash (\forall x)(\forall y)(y = x \rightarrow (x = r \rightarrow y = r))$, e duas aplicações do esquema de axiomas IV fornecem a tese.

□

PROPOSIÇÃO 5.2. *Seja K uma teoria de 1a. ordem na qual (A6) é um teorema e (A7) vale para todas as fórmulas atômicas $\mathcal{B}(x, x)$ nas quais não figuram constantes individuais. Então K é uma teoria com igualdade, i.e. (A7) vale para quaisquer fórmulas $\mathcal{B}(x, x)$.*

Demonstração. Temos que verificar (A7) para uma fórmula $\mathcal{B}(x, x)$ na qual y seja livre para x . Por hipótese, isto vale se $\mathcal{B}(x, x)$ for uma fórmula atômica e na qual não figuram constantes individuais. Tem-se:

- (i) A tese da proposição 5.1 vale em K , pois na demonstração da referida proposição só usamos (A7) para fórmulas $\mathcal{B}(x, x)$ atômicas e sem constantes individuais.
- (ii) Faremos indução no número n de conectivos proposicionais ou quantificadores universais que figuram em $\mathcal{B}(x, x)$. Para $n = 0$, $\mathcal{B}(x, x)$ é uma fórmula atômica, na qual figuram, eventualmente, constantes individuais, e na qual y é livre para x . Substitua cada uma das constantes individuais que figuram em $\mathcal{B}(x, x)$ por variáveis distintas de x e y e que não figurem na referida fórmula. Sejam $\mathcal{B}'(x, x)$ a fórmula assim obtida, e $\mathcal{B}'(x, y)$ a fórmula obtida de $\mathcal{B}(x, y)$ substituindo-se as constantes individuais pelas mesmas variáveis. Então $\mathcal{B}'(x, x)$ é uma fórmula atômica e sem constantes individuais, e y é livre para x em $\mathcal{B}'(x, x)$; assim, por hipótese, tem-se $\vdash x = y \rightarrow (\mathcal{B}'(x, x) \rightarrow \mathcal{B}'(x, y))$. Aplique (Gen) a esta última fórmula, tomando como variáveis quantificadas as variáveis novas introduzidas nos lugares das constantes individuais que figuravam em $\mathcal{B}(x, y)$; a seguir, aplique o axioma IV, substituindo-se cada uma das constantes individuais nos lugares das variáveis novas introduzidas. Obter-se-á, então, $\vdash x = y \rightarrow (\mathcal{B}(x, x) \rightarrow \mathcal{B}(x, y))$.
- (iii) Sejam $n \geq 1$, e $\mathcal{B}(x, x)$ uma fórmula na qual y é livre para x e na qual figuram n conectivos proposicionais ou quantificadores universais. Como hipótese de indução, supomos que a tese vale para fórmulas com menos que n tais símbolos. Temos três casos a considerar:

- (1) $\mathcal{B}(x, x) = \neg \mathcal{C}(x, x)$. Então $\mathcal{B}(x, y) = \neg \mathcal{C}(x, y)$. As ocorrências livres de y em $\mathcal{C}(x, y)$ são de dois tipos: (1) as que resultaram da substituição de y em alguma ocorrência livre de x em $\mathcal{C}(x, x)$ e (2) as ocorrências que já existiam em $\mathcal{C}(x, x)$. Seja z uma variável distinta de x e y e que não ocorre em $\mathcal{C}(x, x)$. Denote por $\mathcal{C}(x, x, z)$ e $\mathcal{C}(x, y, z)$ as fórmulas obtidas a partir de $\mathcal{C}(x, x)$ e $\mathcal{C}(x, y)$, respectivamente, substituindo-se todas as ocorrências livres de y de tipo (2) por z . Então qualquer ocorrência livre de y em $\mathcal{C}(x, y, z)$ não aparece no escopo de um quantificador $(\forall x)$ (pois, por construção, uma tal ocorrência resultou da substituição de alguma ocorrência livre de x em $\mathcal{C}(x, x)$ por y); ou seja, x é livre para y em $\mathcal{C}(x, y, z)$. Além disso, pelo fato de ser y livre para x em $\mathcal{C}(x, x, z)$ (o que decorre do fato de ser y livre para x em $\mathcal{B}(x, x)$), e por construção, a fórmula $\mathcal{C}(x, x, z)$ pode ser obtida de $\mathcal{C}(x, y, z)$ pela substituição de algumas das ocorrências livres de y por x . Assim, pela hipótese de indução, tem-se $\vdash y = x \rightarrow (\mathcal{C}(x, y, z) \rightarrow$

$\mathcal{C}(x, x, z)$). Por (Gen), segue-se $\vdash (\forall z)[y = x \rightarrow (\mathcal{C}(x, y, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, x, z))]$. Como y é livre para z em $\mathcal{C}(x, y, z)$ e $\mathcal{C}(x, x, z)$ (por construção), pelo esquema de axiomas IV e (MP) segue-se $\vdash y = x \rightarrow (\mathcal{C}(x, y, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, x, y))$. Mas $\mathcal{C}(x, y, y) = \mathcal{C}(x, y)$ e $\mathcal{C}(x, x, y) = \mathcal{C}(x, x)$, de modo que $\vdash y = x \rightarrow (\mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, x))$. Por transposição, obtém-se $\vdash y = x \rightarrow (\neg\mathcal{C}(x, x) \rightarrow \neg\mathcal{C}(x, y))$. Finalmente, como $\vdash x = y \rightarrow y = x$ (pelo item (i)), por silogismo hipotético obtém-se $\vdash x = y \rightarrow (\neg\mathcal{C}(x, x) \rightarrow \neg\mathcal{C}(x, y))$.

- (2) $\mathcal{B}(x, x) = \mathcal{C}(x, x) \rightarrow \mathcal{D}(x, x)$. Como no item anterior, a hipótese de indução fornece $\vdash x = y \rightarrow (\neg\mathcal{C}(x, x) \rightarrow \neg\mathcal{C}(x, y))$ e $\vdash x = y \rightarrow (\mathcal{D}(x, x) \rightarrow \mathcal{D}(x, y))$. Usando a tautologia $(\neg A \rightarrow \neg A') \wedge (B \rightarrow B') \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A' \rightarrow B')]$, conclui-se a tese para $\mathcal{B}(x, x)$.
- (3) $\mathcal{B}(x, x) = (\forall z)\mathcal{C}(x, x, z)$. Se z coincidir com x , então todas as ocorrências de x em $\mathcal{B}(x, x)$ são ligadas; portanto, $\mathcal{B}(x, y)$ coincide com $\mathcal{B}(x, x)$ e a tese é trivial. Se z coincidir com y , então todas as ocorrências de x em $\mathcal{B}(x, x)$ também devem ser ligadas, pelo fato de ser y livre para x em $\mathcal{B}(x, x)$, e pelo mesmo argumento do caso anterior a tese é trivial. Finalmente, suponha que z seja uma variável distinta de x e de y . Tem-se $\mathcal{B}(x, y) = (\forall z)\mathcal{C}(x, y, z)$. Pela hipótese de indução, tem-se $\vdash x = y \rightarrow (\mathcal{C}(x, x, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, y, z))$. Por (Gen), tem-se $\vdash (\forall z)[x = y \rightarrow (\mathcal{C}(x, x, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, y, z))]$. Como z é distinta de x e y , podemos aplicar o esquema de axiomas V e (MP) para concluir $\vdash x = y \rightarrow (\forall z)(\mathcal{C}(x, x, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, y, z))$. Finalmente, como $\vdash (\forall z)(\mathcal{C}(x, x, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, y, z)) \rightarrow ((\forall z)\mathcal{C}(x, x, z) \rightarrow (\forall z)\mathcal{C}(x, y, z))$ (vide exercício 3.1.2), por silogismo hipotético segue-se a tese.

□

PROPOSIÇÃO 5.3. *Seja K uma teoria de 1a. ordem na qual (A6) é um teorema e as seguintes condições são satisfeitas:*

- (1) *O esquema (A7) vale para todas as fórmulas atômicas $\mathcal{B}(x, x)$ nas quais não figuram símbolos funcionais ou constantes individuais, e $\mathcal{B}(x, y)$ é obtida de $\mathcal{B}(x, x)$ pela substituição de uma única ocorrência de x por y .*
- (2) *$\vdash x = y \rightarrow f_j^n(z_1, \dots, z_n) = f_j^n(w_1, \dots, w_n)$, onde f_j^n é um símbolo funcional qualquer, $z_1, \dots, z_n$ são variáveis e $f_j^n(w_1, \dots, w_n)$ é obtida a partir de $f_j^n(z_1, \dots, z_n)$ pela substituição de uma única ocorrência de x por y .*

Então K é uma teoria com igualdade.

Demonstração. Pela proposição anterior, é suficiente verificar (A7) para fórmulas atômicas $\mathcal{B}(x, x)$ nas quais não ocorrem constantes individuais. Além disso, como na demonstração anterior, sob as hipóteses enunciadas ainda é válida a tese da proposição 5.1. Usaremos os seguintes lemas:

LEMA 5.1. *Sob as hipóteses da proposição, tem-se $\vdash x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$, onde $x_1, \dots, x_n$ são variáveis duas a duas distintas, $y_1, \dots, y_n$ são variáveis, $R(x_1, \dots, x_n)$ é uma fórmula atômica sem constantes individuais ou símbolos funcionais, e $R(y_1, \dots, y_n)$ resulta de $R(x_1, \dots, x_n)$ por substituição de cada ocorrência de x_i por y_i , para $1 \leq i \leq n$.*

LEMA 5.2. *Sob as hipóteses da proposição, $\vdash x = y \rightarrow t(x, x) = t(x, y)$, onde $t(x, x)$ é um termo no qual não ocorrem constantes individuais e $t(x, y)$ se obtém de $t(x, x)$ por substituição de algumas das ocorrências de x por y .*

Admitamos os dois lemas. Sejam $\mathcal{B}(x, x)$ uma fórmula atômica e sem constantes individuais, e $\mathcal{B}(x, y)$ obtida de $\mathcal{B}(x, x)$ por substituição de algumas ocorrências de x por y . Então, para algum $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(x, x)$ é da forma $R(t_1(x, x), \dots, t_n(x, x))$, onde R é um símbolo predicativo n -ário e $t_i(x, x)$ é um termo sem constantes individuais, para $1 \leq i \leq n$. Assim sendo, deve-se ter $\mathcal{B}(x, y) = R(t_1(x, y), \dots, t_n(x, y))$, onde, para cada $1 \leq i \leq n$, o termo $t_i(x, y)$ é obtido de $t_i(x, x)$ por substituição de algumas ocorrências de x por y . Sejam $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ variáveis duas a duas distintas e que não ocorram em $\mathcal{B}(x, x)$ ou $\mathcal{B}(x, y)$; pelo lema 5.1, tem-se $\vdash x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$. Considere, então, a seguinte dedução em K :

B1: $x = y \rightarrow t_1(x, x) = t_1(x, y)$ (pelo lema 5.2)

B2: $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$ (teorema de K , conforme o lema 5.1)

B3: $(\forall x_1)[x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))]$ ((Gen), de B2)

Note que, em $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$, x_1 não ocorre quantificada (lembre que $R(x_1, \dots, x_n)$ é atômica), portanto $t_1(x, x)$ é livre para x_1 na referida fórmula. Isto justifica o passo seguinte:

B4: $t_1(x, x) = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(t_1(x, x), x_2, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$ (de B3, usando o esquema de axiomas IV e (MP))

B5: $(\forall y_1)[t_1(x, x) = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(t_1(x, x), x_2, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))]$ ((Gen), de B4)

Por observação análoga à que precede (B5), $t_1(x, y)$ é livre para y_1 em $t_1(x, x) = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(t_1(x, x), x_2, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$, donde:

B6: $t_1(x, x) = t_1(x, y) \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(t_1(x, x), x_2, \dots, x_n) \rightarrow R(t_1(x, y), y_2, \dots, y_n))$ (de B5, usando o esquema de axiomas IV e (MP))

B7: $x = y \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(t_1(x, x), x_2, \dots, x_n) \rightarrow R(t_1(x, y), y_2, \dots, y_n))$ (de B1 e B6, por silogismo hipotético)

Assim, $\vdash x = y \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(t_1(x, x), x_2, \dots, x_n) \rightarrow R(t_1(x, y), y_2, \dots, y_n))$. Após reaplicar o argumento acima $(n - 1)$ vezes, conclui-se $\vdash x = y \rightarrow (R(t_1(x, x), \dots, t_n(x, x)) \rightarrow R(t_1(x, y), \dots, t_n(x, y)))$. □

Demonstração. (do lema 5.1)

(i) Afirmo que, para cada fórmula atômica $\mathcal{B}(x, x)$ sem constantes individuais ou símbolos funcionais, $\vdash x = y \rightarrow (\mathcal{B}(x, x) \rightarrow \mathcal{B}(x, y))$ se $\mathcal{B}(x, y)$ for obtida de $\mathcal{B}(x, x)$ pela substituição de uma ou mais ocorrências de x por y . Com efeito, como o número de tais substituições deve ser finito, podemos encontrar uma sequência finita de fórmulas $B_1, \dots, B_n$ tal que $B_1 = \mathcal{B}(x, x)$, $B_n = \mathcal{B}(x, y)$, e tal que cada fórmula da sequência resulta da anterior pela substituição de uma única ocorrência de x por y . Então, para $2 \leq i \leq n$, da hipótese (1) da proposição 5.3, segue-se $\vdash x = y \rightarrow (B_{i-1} \rightarrow B_i)$. Portanto, por um número finito de silogismos hipotéticos, segue-se $\vdash x = y \rightarrow (B_1 \rightarrow B_n)$, como afirmado.

(ii) Afirmo que, para $1 \leq i \leq n$, $\vdash x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n))$. A tese do lema decorre desta afirmação para $i = n$. Com efeito, fixe um tal i e assumo, como hipótese de indução, que a afirmação vale para índices menores que i . Considere a seguinte dedução em K :

- C1:** $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_n))$
(é um teorema de K , pela hip. de indução)
- C2:** $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow x_i = y_i$ (eliminação de conjunção)
- C3:** $x_i = y_i \rightarrow (R(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n))$ (teorema demonstrado na parte (i))
- C4:** $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n))$ (silogismo hipotético, de C2 e C3)
- C5:** $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n))$
(de C1 e C4, usando a tautologia $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \wedge [A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]$ e (MP))

O que mostra $\vdash x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n))$. □

Demonstração. (do lema 5.2)

(i) Sejam f um símbolo funcional n -ário e $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ variáveis. Afirmando que $\vdash x_1 = y_1 \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$. Com efeito, para cada $1 \leq i \leq n$, provemos que $\vdash x_1 = y_1 \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Fixe um tal i e admita, como hipótese de indução, que a afirmação vale para todos os índices menores que i . Considere a seguinte dedução em K :

- C0:** $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n$ (hip.)
- C1:** $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_n))$ (é um teorema de K , pela hip. de indução)
- C2:** $x_i = y_i$ (de C0, por eliminação de conjunção)
- C3:** $x_i = y_i \rightarrow (f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n))$ (teorema, pela hipótese (2) da proposição)
- C4:** $f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ((MP), de C2 e C3)
- C5:** $f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_n)$ ((MP), de C0 e C1)
- C6:** $f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ (por C4, C5, pelo item 3 da proposição 5.1 e por (MP)).

De (C1, ..., C6) e do teorema da dedução (note que não se aplicou (Gen) na dedução acima), segue-se $\vdash x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n))$, o que prova a afirmação feita.

(ii) Usando a parte (i), demonstraremos o lema por indução no número n de símbolos funcionais que ocorrem em $t(x, y)$.

- (1) Para $n = 0$, $t(x, x)$ é uma variável. Se for uma variável distinta de x , então $t(x, y)$ coincide com $t(x, x)$; portanto $\vdash t(x, x) = t(x, y)$ por (A6), e trivialmente $\vdash x = y \rightarrow (t(x, x) = t(x, y))$. Se $t(x, x)$ coincidir com a variável x , então $t(x, y)$ coincide com x ou com y . Neste caso, se $t(x, y)$ coincidir com x , então $\vdash t(x, x) = t(x, y)$ por (A6), e novamente a tese é trivial. Se $t(x, y)$ coincidir com y , então $x = y \rightarrow (t(x, x) = t(x, y))$ coincide com $x = y \rightarrow x = y$, que é uma quasi-tautologia, logo um teorema de K .
- (2) Seja $n \geq 1$ e suponha, como hipótese de indução, que a tese vale para termos $t(x, x)$ nos quais figuram menos que n símbolos funcionais. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t(x, x)$ é dado por $f(t_1(x, x), \dots, t_n(x, x))$, onde f é um símbolo funcional n -ário e, para $1 \leq i \leq n$, $t_i(x, x)$ é um termo no qual figuram menos que n símbolos funcionais (e, portanto, a hipótese de indução se aplica para o

referido termo, i.e. $\vdash x = y \rightarrow t_i(x, x) = t_i(x, y)$). Então $t(x, y)$ coincide com $f(t_1(x, y), \dots, t_n(x, y))$, onde, para $1 \leq i \leq n$, $t_i(x, y)$ é obtido do termo $t_i(x, x)$ por substituição de algumas ocorrências de x por y . Sejam $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ variáveis duas a duas distintas, e distintas de x e y . Pela parte (i), tem-se $\vdash x_1 = y_1 \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$.

Provemos que, para $1 \leq i \leq n$, $\vdash x = y \wedge x_{i+1} = y_{i+1} \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow [f(t_1(x, x), \dots, t_i(x, x), x_{i+1}, \dots, x_n) = f(t_1(x, y), \dots, t_i(x, y), y_{i+1}, \dots, y_n)]$. A tese obtém-se de $i = n$ nesta última afirmação. Fixe um tal i e admita, como hipótese de indução, que a referida afirmação seja verdadeira para todo índice menor que i . Considere a seguinte dedução em K :

D1: $x = y \wedge x_{i+1} = y_{i+1} \wedge \dots \wedge x_n = y_n$ (hip.)

D2: $x = y \wedge x_i = y_i \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow [f(t_1(x, x), \dots, t_{i-1}(x, x), x_i, \dots, x_n) = f(t_1(x, y), \dots, t_{i-1}(x, y), y_i, \dots, y_n)]$ (teorema de K , pela hipótese de indução)

D3: $x = y$ (de D1, por eliminação de conjunção)

D4: $x = y \rightarrow t_i(x, x) = t_i(x, y)$ (teorema de K , pela hipótese de indução)

D5: $(\forall x_i)[x = y \wedge x_i = y_i \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow [f(t_1(x, x), \dots, t_{i-1}(x, x), x_i, \dots, x_n) = f(t_1(x, y), \dots, t_{i-1}(x, y), y_i, \dots, y_n)]]$ ((Gen), de D2)

Como $t_i(x, x)$ é livre para x_i em $x = y \wedge x_i = y_i \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow [f(t_1(x, x), \dots, t_{i-1}(x, x), x_i, \dots, x_n) = f(t_1(x, y), \dots, t_{i-1}(x, y), y_i, \dots, y_n)]$, o próximo passo segue do esquema de axiomas IV e por (MP):

D6: $x = y \wedge t_i(x, x) = y_i \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow [f(t_1(x, x), \dots, t_i(x, x), x_{i+1}, \dots, x_n) = f(t_1(x, y), \dots, t_i(x, y), y_{i+1}, \dots, y_n)]$

D7: $(\forall y_i)[x = y \wedge t_i(x, x) = y_i \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow [f(t_1(x, x), \dots, t_i(x, x), x_{i+1}, \dots, x_n) = f(t_1(x, y), \dots, t_i(x, y), y_{i+1}, \dots, y_n)]]$ ((Gen), de D6)

D8: $x = y \wedge t_i(x, x) = t_i(x, y) \wedge x_{i+1} = y_{i+1} \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow [f(t_1(x, x), \dots, t_i(x, x), x_{i+1}, \dots, x_n) = f(t_1(x, y), \dots, t_i(x, y), y_{i+1}, \dots, y_n)]$ (de D7, novamente usando o esquema de axiomas IV e (MP))

D9: $t_i(x, x) = t_i(x, y)$ ((MP), de D3 e D4)

D10: $x = y \wedge t_i(x, x) = t_i(x, y) \wedge x_{i+1} = y_{i+1} \wedge \dots \wedge x_n = y_n$ (de D1 e D9, por introdução de conjunção)

D11: $f(t_1(x, x), \dots, t_i(x, x), x_{i+1}, \dots, x_n) = f(t_1(x, y), \dots, t_i(x, y), y_{i+1}, \dots, y_n)$ ((MP), de D8 e D10)

De (D1, ..., D11) e do teorema da dedução (note que, na dedução acima, as duas aplicações de (Gen) ocorreram com variáveis quantificadas x_i e y_i , as quais não figuram em $x = y \wedge x_{i+1} = y_{i+1} \wedge \dots \wedge x_n = y_n$), segue-se $\vdash x = y \wedge x_{i+1} = y_{i+1} \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow [f(t_1(x, x), \dots, t_i(x, x), x_{i+1}, \dots, x_n) = f(t_1(x, y), \dots, t_i(x, y), y_{i+1}, \dots, y_n)]$, o que conclui a demonstração do passo de indução.

□

6. RESOLUÇÕES DE ALGUNS EXERCÍCIOS DA LISTA 2

Exercício 6.1. Em Matemática, muitas vezes é conveniente a introdução de nomes ou abreviações para se denotar objetos pré-existentes (para se evitar repetições). Por exemplo, suponha que, num determinado contexto, para quaisquer $x_1, \dots, x_n$ se prove a existência de um único objeto u que tenha a propriedade $\mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$. Então introduzimos um novo símbolo funcional n -ário f , de modo que $f(x_1, \dots, x_n)$ denote o único tal objeto, i.e. tal que $\mathcal{B}(f(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n)$. Analogamente, se for provada a

existência de um único objeto u que satisfaz a propriedade $\mathcal{B}(u)$, e u é a única variável livre que ocorre em $\mathcal{B}(u)$, introduz-se uma nova constante individual b para denotar este objeto. Numa teoria de 1a. ordem com igualdade K , pode-se formalizar estas definições da maneira como segue. Assuma que $u, x_1, \dots, x_n$ sejam variáveis duas a duas distintas e que $\mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$ seja uma fórmula de K tal que $\vdash_K (\exists_1 u) \mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$. Considera-se, então, a teoria de 1a. ordem com igualdade $K^\sharp$, extensão de K , obtida pelo acréscimo à linguagem de K de um símbolo funcional n -ário f e pelo acréscimo do seguinte axioma próprio: $u = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$. Num sentido a ser precisado na proposição 6.1, abaixo, esta extensão não modifica os teoremas da teoria em questão, i.e. num certo sentido K e $K^\sharp$ tem os mesmos teoremas (ou, se preferir, são a mesma teoria).

- (a): Prove que, na teoria elementar dos grupos G (vide exercício), $\vdash (\exists_1 y) y + x = 0$.
 (b): Pelo item anterior, faz sentido introduzir um novo símbolo funcional unário, de modo que $f(x)$ satisfaça $f(x) + x = 0$. Ou seja, conforme descrito acima, estendemos a teoria G pela adição de um símbolo funcional unário f e do axioma $y = f(x) \rightarrow y + x = 0$. Abreviamos $f(x)$ por $(-x)$. Mostre que, nesta extensão:
 (1) $\vdash x + (-x) = 0$.
 (2) $\vdash (\exists_1 y) x + y = 0$.
 (3) $\vdash x + 0 = x$.
 (4) $\vdash -(-x) = x$.
 (5) $(x + z = y + z \vee z + x = z + y) \rightarrow x = y$.

Usaremos os seguintes lemas:

LEMA 6.1. Sejam r, s e t termos quaisquer de G . Tem-se:

- (1) $\vdash_G (r + s) + t = r + (s + t)$
- (2) $\vdash_G 0 + r = r$
- (3) $\vdash_G (\exists x) x + r = 0$
- (4) $\vdash_G r = s \rightarrow (r + t = s + t \wedge t + r = t + s)$

Demonstração. (1) Sejam x, y, z variáveis que não ocorrem em r, s, t . Tem-se:

B1: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (axioma (a))

B2: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + y) + z = x + (y + z)$ (3 aplicações de (Gen), de B1)

B3: $(r + s) + t = r + (s + t)$ (de B2, usando 3 aplicações do axioma IV e (MP))

Para demonstrar os demais itens, use um argumento análogo ao de (1), aplicando os axiomas (b), (c) e (g), o axioma IV e (MP). □

LEMA 6.2. $\vdash_G x_2 + x_1 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = 0$

Demonstração. Considere a seguinte dedução em G :

- B1:** $x_2 + x_1 = 0$ (hip.)
B2: $(\exists x_3) x_3 + x_2 = 0$ (lema 6.1)
B3: $d + x_2 = 0$ (regra C, de B2)
B4: $0 + (x_1 + x_2) = x_1 + x_2$ (lema 6.1)

Observação: Usaremos, daqui em diante, abreviações da forma $r = s = t$ para $r = s \wedge s = t$, onde r, s e t são termos quaisquer. Pela proposição 5.1, $r = s = t \rightarrow r = t$. Este fato (e outros análogos, também decorrentes de 5.1) será assumido tacitamente nas deduções subseqüentes, e escreveremos a justificativa abreviada “axiomas da igualdade” quando for o caso).

B5: $(d + x_2) + (x_1 + x_2) = 0 + (x_1 + x_2) = x_1 + x_2$ (a primeira de B3 e do lema 6.1; a segunda do lema 6.1)

B6: $(d + x_2) + (x_1 + x_2) = d + ((x_2 + x_1) + x_2) = d + (0 + x_2) = d + x_2 = 0$ (do lema 6.1 e B3)

B7: $x_1 + x_2 = 0$ (de B5, B6 e axiomas da igualdade)

De $(B1, \dots, B7)$ tem-se $x_2 + x_1 = 0 \vdash_C x_1 + x_2 = 0$; portanto, pela proposição 4.2 (note que não houve aplicação de (Gen) na dedução acima), tem-se $x_2 + x_1 = 0 \vdash x_1 + x_2 = 0$ e podemos aplicar o teorema da dedução 3.1, donde $\vdash_G x_2 + x_1 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = 0$. □

COROLÁRIO 6.1. *Seja r um termo de G . Então $\vdash_G (\exists x)r + x = 0$.*

Demonstração. Com efeito:

B1: $(\exists x)x + r = 0$ (lemma 6.1)

B2: $d + r = 0$ (regra C, de B1)

B3: $r + d = 0$ (de B2, lema 6.1 e (MP))

B4: $(\exists x)r + x = 0$ (regra existencial, de B3)

$(B1, \dots, B4)$ mostra que $\vdash_C (\exists x)r + x = 0$; portanto, pela proposição 4.2, segue-se $\vdash_G (\exists x)r + x = 0$. □

COROLÁRIO 6.2. *Sejam r, s termos de G . Então $\vdash_G r + s = 0 \rightarrow s + r = 0$.*

Demonstração. Com efeito, sejam x e y variáveis que não ocorrem em r e s , e considere a seguinte dedução em G :

B1: $x + y = 0 \rightarrow y + x = 0$ (lema 6.2)

B2: $(\forall x)(\forall y)(x + y = 0 \rightarrow y + x = 0)$ (por duas aplicações de (Gen) a B1)

B3: $r + s = 0 \rightarrow s + r = 0$ (de B2, por duas aplicações do axioma IV e (MP)) □

COROLÁRIO 6.3. *Seja r um termo de G . Então $\vdash_G r + 0 = 0$.*

Demonstração. Com efeito, considere a seguinte dedução em K :

B1: $(\exists x_1)x_1 + r = 0$ (pelo lema 6.1)

B2: $d + r = 0$ (regra C, de B1)

B3: $r + d = 0$ (pelo corolário 6.2 e (MP))

B4: $r + (d + r) = r + 0$ (de B2, axioma (g) e (MP))

B5: $r + (d + r) = (r + d) + r = 0 + r = r$ (axioma (a), B3 e axioma (g), axioma (b))

B6: $r + 0 = r$ (de B4, B5 e axiomas da igualdade)

$(B1, \dots, B6)$ mostra $\vdash_C r + 0 = r$. Pela proposição 4.2, segue-se $\vdash_G r + 0 = r$. □

LEMA 6.3. $\vdash_G (x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \vee x_3 + x_1 = x_3 + x_2 \rightarrow x_1 = x_2)$

Demonstração. Considere as seguintes deduções em G :

B1: $x_3 + x_1 = x_3 + x_2$ (hip.)

B2: $(\exists x_4)x_4 + x_3 = 0$ (pelo lema 6.1)

B4: $d + x_3 = 0$ (regra C, de B2)

B5: $d + (x_3 + x_1) = d + (x_3 + x_2)$ (de B1, axioma (g) e (MP))

B6: $d + (x_3 + x_1) = (d + x_3) + x_1 = 0 + x_1 = x_1$ (axioma (a), B4 e axioma (g), axioma (b))

B7: $d + (x_3 + x_2) = (d + x_3) + x_2 = 0 + x_2 = x_2$ (axioma (a), B4 e axioma (g), axioma (b))

B8: $x_1 = x_2$ (de B5, B6, B7 e axiomas da igualdade)

C1: $x_1 + x_3 = x_2 + x_3$ (hip.)

C2: $(\exists x_4)x_4 + x_3 = 0$ (pelo lema 6.1)

C3: $d + x_3 = 0$ (regra C, de C2)

C4: $x_3 + d = 0$ (pelo corolário 6.2 e (MP))

C5: $(x_1 + x_3) + d = (x_2 + x_3) + d$ (de C1 e axioma (g))

C6: $(x_1 + x_3) + d = x_1 + (x_3 + d) = x_1 + 0 = x_1$ (axioma (a), C4 e axioma (g), corolário 6.3)

C7: $(x_2 + x_3) + d = x_2 + (x_3 + d) = x_2 + 0 = x_2$ (axioma (a), C4 e axioma (g), corolário 6.3)

C8: $x_1 = x_2$ (de C5, C6, C7 e axiomas da igualdade)

(B1, ..., B8) mostra que $x_3 + x_1 = x_3 + x_2 \vdash_C x_1 = x_2$; portanto, pela proposição 4.2, tem-se $x_3 + x_1 = x_3 + x_2 \vdash x_1 = x_2$, e do teorema da dedução segue-se $\vdash_G x_3 + x_1 = x_3 + x_2 \rightarrow x_1 = x_2$. Analogamente, (C1, ..., C8) mostra que $x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \vdash_C x_1 = x_2$; novamente pela proposição 4.2 e pelo teorema da dedução segue-se $\vdash_G x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \rightarrow x_1 = x_2$. Portanto, usando a tautologia $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$ e (MP), segue-se a tese. $\square$

COROLÁRIO 6.4. *O lema anterior vale com termos quaisquer nos lugares de x_1, x_2 e x_3 .*

Demonstração. (do exercício)

(a): Com efeito, tem-se:

B1: $y + x = 0 \wedge z + x = 0$ (hip.)

B2: $y + x = z + x$ (de B1, axiomas da igualdade e (MP))

B3: $y = z$ (de B2, usando o lema 6.3 e (MP))

Portanto, $y + x = 0 \wedge z + x = 0 \vdash_G y = z$; do teorema da dedução, segue-se $\vdash_G y + x = 0 \wedge z + x = 0 \rightarrow y = z$. Isto será usado na seguinte dedução:

C1: $(\exists y)y + x = 0$ (lema 6.1)

C2: $y + x = 0 \wedge z + x = 0 \rightarrow y = z$ (é um teorema de G , conforme demonstramos acima)

C3: $(\forall y)(\forall z)(y + x = 0 \wedge z + x = 0 \rightarrow y = z)$ (de C2 e duas aplicações de (Gen))

C4: $[(\exists y)y + x = 0] \wedge [(\forall y)(\forall z)(y + x = 0 \wedge z + x = 0 \rightarrow y = z)]$ (de C1 e C3, por introdução de conjunção)

A última fórmula é, por definição, $(\exists_1 y)y + x = 0$.

(b): Já fizemos nos lemas os itens (3) e (5). O item (2) decorre da parte (a) e do lema 6.2 (verifique os detalhes!). Assim, resta verificar apenas os itens (1) e (4). Seja $G^\sharp$ a extensão de G pela adição do símbolo funcional unário f e do axioma $y = f(x) \rightarrow y + x = 0$. Tem-se:

(1) Considere a seguinte dedução:

B0: $(\exists y)y = f(x)$ (da proposição 5.1 e regra existencial)

B1: $d = f(x)$ (regra C, de B0)

B2: $(\forall y)[y = f(x) \rightarrow y + x = 0]$ ((Gen) do axioma novo)

B3: $d = f(x) \rightarrow d + x = 0$ (de B2, axioma IV e (MP))

- B4:** $d + x = 0$ ((MP), de B1 e B3)
B5: $x + d = 0$ (de B4, lema 6.2 e (MP))
B6: $x + d = x + f(x)$ (de B1 e axioma (g))
B7: $x + f(x) = 0$ (de B5, B6 e axiomas da igualdade)
 (B0, ..., B7) mostra $\vdash_C x + f(x) = 0$. Como não foi aplicada (Gen) com variável quantificada livre em B0 (note que y não ocorre livre em B0), a proposição 4.2 garante $\vdash_{G^\#} x + f(x) = 0$, i.e. $\vdash_{G^\#} x + (-x) = 0$.
 (4) Com efeito, considere a seguinte dedução em $G^\#$:
B1: $x + (-x) = 0$ (item (1))
B2: $-x + [-(-x)] = 0$ (também do item (1), aplicando (Gen), axioma IV e (MP))
B3: $-x + x = 0$ (de B1, lema 6.2 e (MP))
B4: $-x + [-(-x)] = -x + x$ (de B2, B3 e axiomas da igualdade)
B5: $-(-x) = x$ (corolário 6.4).

□

PROPOSIÇÃO 6.1. *Sejam K uma teoria de 1a. ordem com igualdade, $u, x_1, \dots, x_n$ variáveis (duas a duas distintas) e $\mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula de K . Suponha que $\vdash_K (\exists_1) \mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$. Denote por $K^\#$ a teoria de 1a. ordem obtida a partir de K pela introdução de um novo símbolo funcional n -ário f e do axioma próprio $u = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$. Então $K^\#$ é uma teoria de 1a. ordem com igualdade e existe uma transformação efetiva: $\{\text{fórmulas de } K^\#\} \rightarrow \{\text{fórmulas de } K\}$, que leva cada fórmula $\mathcal{C}$ de $K^\#$ numa fórmula $\mathcal{C}^\#$ de K , satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (1) *Se f não ocorre em $\mathcal{C}$, então $\mathcal{C}^\#$ coincide com $\mathcal{C}$.*
- (2) *$(\neg \mathcal{C})^\#$ coincide com $\neg(\mathcal{C}^\#)$.*
- (3) *$(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})^\#$ coincide com $\mathcal{C}^\# \rightarrow \mathcal{D}^\#$.*
- (4) *$[(\forall x)\mathcal{C}]^\#$ coincide com $(\forall x)\mathcal{C}^\#$.*
- (5) *$\vdash_{K^\#} \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{C}^\#$.*
- (6) *Se $\vdash_{K^\#} \mathcal{C}$, então $\vdash_K \mathcal{C}^\#$. Portanto, se f não ocorre em $\mathcal{C}$ e $\vdash_{K^\#} \mathcal{C}$, então $\vdash_K \mathcal{C}$.*

Demonstração. (parcial)

(I) Para provar que $K^\#$ é uma teoria de 1a. ordem com igualdade, apliquemos a proposição 5.3. É claro que (A6) é um teorema de $K^\#$ (pois é um teorema de K , e todas as demonstrações em K também são demonstrações em $K^\#$); resta, pois, verificar as hipóteses (1) e (2) da referida proposição. A hipótese (1) se verifica trivialmente, a partir dos seguintes fatos: (i) as fórmulas atômicas sem constantes individuais ou símbolos funcionais de K e $K^\#$ são as mesmas; (ii) a referida hipótese se verifica em K , pois K é uma teoria com igualdade; (iii) toda demonstração em K é uma demonstração em $K^\#$. Quanto à hipótese (2), só é necessário verificá-la para o novo símbolo funcional f introduzido (para os demais, que já existiam em K , usamos o mesmo argumento anterior). Note que, pelo fato de valer (A6) e a hipótese (1) de 5.3, vale em $K^\#$ a tese da proposição 5.1. Neste caso, sejam $x, y, y_1, \dots, y_n$ variáveis quaisquer, e considere um termo $f(w_1, \dots, w_n)$ que resulte de $f(y_1, \dots, y_n)$ pela substituição de uma única ocorrência de x por y . Temos que provar $\vdash_{K^\#} x = y \rightarrow f(y_1, \dots, y_n) = f(w_1, \dots, w_n)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que, para $1 \leq i \leq n$, y_i é distinta de $u, x_1, \dots, x_n$ e não ocorre em $\mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$; com efeito, se não for este o caso, basta substituir y_i por uma outra variável y'_i que satisfaça a referida condição e notar que as fórmulas $\mathcal{C}(y_i)$ dada por $x = y \rightarrow f(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n) = f(w_1, \dots, w_n)$ e $\mathcal{C}(y'_i)$ obtida de $\mathcal{C}(y_i)$ por substituição de todas as ocorrências de y_i por y'_i são *similares* (vide exercício 7 da lista 2), portanto

$\vdash_{K^\#} \mathcal{C}(y_i) \leftrightarrow \mathcal{C}(y'_i)$. Pelo mesmo argumento, também podemos supor o mesmo para y . Seja z uma variável distinta de todas as anteriores, e considere a seguinte sequência de fórmulas:

- B1:** $x = y$ (hip.)
 - B2:** $f(y_1, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_n)$ (proposição 5.1)
 - B3:** $(\exists z)z = f(y_1, \dots, y_n)$ (regra existencial, de B2)
 - B4:** $f(w_1, \dots, w_n) = f(w_1, \dots, w_n)$ (proposição 5.1)
 - B5:** $(\exists z)z = f(w_1, \dots, w_n)$ (regra existencial, de B4)
 - B6:** $d_1 = f(y_1, \dots, y_n)$ (regra C, de B3)
 - B7:** $d_2 = f(w_1, \dots, w_n)$ (regra C, de B5)
 - B8:** $u = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$ (axioma de $K^\#$)
 - B9:** $u = f(y_1, \dots, y_n) \rightarrow \mathcal{B}(u, y_1, \dots, y_n)$ (de B8, por n aplicações sucessivas de (Gen), axioma IV e (MP), lembrando que y_i é livre para x_i em $\mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$)
- Note que, como $(w_1, \dots, w_n)$ resulta de $(y_1, \dots, y_n)$ pela substituição de uma única ocorrência de x por y , e como (para $1 \leq i \leq n$) y_i é livre para x_i em $\mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$, a fórmula $\mathcal{B}(u, w_1, \dots, w_n)$ se obtém de $\mathcal{B}(u, y_1, \dots, y_n)$ pela substituição de algumas das ocorrências livres de x por y . Além disso, como y não ocorre em $\mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$, o quantificador $(\forall y)$ não ocorre em $\mathcal{B}(u, y_1, \dots, y_n)$; portanto, y é livre para x em $\mathcal{B}(u, y_1, \dots, y_n)$. Assim, por (A7) em K , tem-se $\vdash_K x = y \rightarrow (\mathcal{B}(u, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \mathcal{B}(u, w_1, \dots, w_n))$. Finalmente, como todo teorema de K é um teorema de $K^\#$, podemos escrever:
- B10:** $x = y \rightarrow (\mathcal{B}(u, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \mathcal{B}(u, w_1, \dots, w_n))$ (teorema de $K^\#$, como acabamos de concluir)
 - B11:** $\mathcal{B}(u, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \mathcal{B}(u, w_1, \dots, w_n)$ ((MP), de B1 e B10)
 - B12:** $(\forall u)[u = f(y_1, \dots, y_n) \rightarrow \mathcal{B}(u, y_1, \dots, y_n)]$ ((Gen), de B9)
 - B13:** $d_1 = f(y_1, \dots, y_n) \rightarrow \mathcal{B}(d_1, y_1, \dots, y_n)$ (de B12, aplicando o axioma IV e (MP))
 - B14:** $\mathcal{B}(d_1, y_1, \dots, y_n)$ ((MP), de B6 e B13)
 - B15:** $(\forall u)[\mathcal{B}(u, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \mathcal{B}(u, w_1, \dots, w_n)]$ ((Gen), de B11)
 - B16:** $\mathcal{B}(d_1, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \mathcal{B}(d_1, w_1, \dots, w_n)$ (de B15, aplicando o axioma IV e (MP))
 - B17:** $\mathcal{B}(d_1, w_1, \dots, w_n)$ ((MP), de B14 e B16)
 - B18:** $u = f(w_1, \dots, w_n) \rightarrow \mathcal{B}(u, w_1, \dots, w_n)$ (de B8, por n aplicações sucessivas de (Gen), axioma IV e (MP))
 - B19:** $d_2 = f(w_1, \dots, w_n) \rightarrow \mathcal{B}(d_2, w_1, \dots, w_n)$ (de B18, aplicando (Gen), axioma IV e (MP))
 - B20:** $\mathcal{B}(d_2, w_1, \dots, w_n)$ ((MP), de B7 e B19)
 - B21:** $\mathcal{B}(d_1, w_1, \dots, w_n) \wedge \mathcal{B}(d_2, w_1, \dots, w_n)$ (de B17 e B20, por introdução de conjunção)
 - B22:** $(\exists_1 u)\mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n)$ (teorema de K - por hipótese da proposição; portanto, é um teorema de $K^\#$)
 - B23:** $(\exists_1 u)\mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\forall u)(\forall z)[\mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n) \wedge \mathcal{B}(z, x_1, \dots, x_n) \rightarrow u = z]$
 - B24:** $(\forall u)(\forall z)[\mathcal{B}(u, x_1, \dots, x_n) \wedge \mathcal{B}(z, x_1, \dots, x_n) \rightarrow u = z]$ ((MP), de B22 e B23)
 - B25:** $\mathcal{B}(d_1, w_1, \dots, w_n) \wedge \mathcal{B}(d_2, w_1, \dots, w_n) \rightarrow d_1 = d_2$ (de B24, aplicando o axioma IV duas vezes)
 - B26:** $d_1 = d_2$ ((MP), de B21 e B25)

B27: $d_1 = d_2 \wedge d_1 = f(y_1, \dots, y_n) \wedge d_2 = f(w_1, \dots, w_n) \rightarrow f(y_1, \dots, y_n) = f(w_1, \dots, w_n)$ (pela proposição 5.1)

B28: $f(y_1, \dots, y_n) = f(w_1, \dots, w_n)$ (de B6, B7, B26, introdução de conjunção e (MP))

Como todas as aplicações de (Gen) na dedução acima se deram com variáveis quantificadas distintas de $z, y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n$, $(B1, \dots, B28)$ é uma dedução usando a regra C, donde $x = y \vdash_C f(y_1, \dots, y_n) = f(w_1, \dots, w_n)$. Além disso, em $(B1, \dots, B28)$ também não se aplicou (Gen) com variável quantificada x ou y . Portanto, pela proposição 4.1, tem-se $x = y \vdash_{K^\#} f(y_1, \dots, y_n) = f(w_1, \dots, w_n)$, e podemos tomar uma tal dedução sem aplicar (Gen) com variável quantificada x ou y . Deste modo, podemos aplicar o teorema da dedução (3.1) para, finalmente, concluir $\vdash_{K^\#} x = y \rightarrow (f(y_1, \dots, y_n) = f(w_1, \dots, w_n))$.

(II) Definiremos $\# : \{\text{fórmulas de } K^\#\} \rightarrow \{\text{fórmulas de } K\}$ indutivamente.

- (1) Seja $\mathcal{C}$ uma fórmula atômica de $K^\#$. Se f não ocorre em $\mathcal{C}$, definimos $\mathcal{C}^\# \doteq \mathcal{C}$. Caso contrário, deve figurar em $\mathcal{C}$ um termo da forma $f(y_1, \dots, y_n)$, onde $y_1, \dots, y_n$ são variáveis; substitua a primeira ocorrência de um tal termo em $\mathcal{C}$ pela primeira variável que não ocorre em $\mathcal{C}$, digamos, u_1 . Denote por $\mathcal{C}^*$ a fórmula assim obtida, e defina $\mathcal{C}' \doteq (\exists u_1)(\mathcal{C}^* \wedge \mathcal{B}(u_1, y_1, \dots, y_n))$. Note que $\vdash_{K^\#} \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{C}'$ (verifique!), e que f ocorre em $\mathcal{C}'$ uma vez menos que em $\mathcal{C}$. Se f não mais ocorrer em $\mathcal{C}'$, pomos $\mathcal{C}^\# \doteq \mathcal{C}'$; caso contrário, construímos $\mathcal{C}''$, e assim sucessivamente. Como há um número finito de ocorrências de f em $\mathcal{C}$, e como em cada passo obtém-se uma fórmula com uma ocorrência a menos de f , após um número finito de passos (igual ao número n de ocorrências de f em $\mathcal{C}$) obter-se-á uma fórmula $\mathcal{C}^{(n)}$, na qual não há ocorrências de f , e tal que $\vdash_{K^\#} \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{C}^{(n)}$. Definimos, então, $\mathcal{C}^\# \doteq \mathcal{C}^{(n)}$.
- (2) Suponha que $\mathcal{C}$ seja uma fórmula de $K^\#$ na qual ocorrem n conectivos proposicionais ou quantificadores universais. Suponha que a aplicação $\#$ já esteja definida para fórmulas nas quais ocorrem menos que n tais símbolos, e que satisfaça as propriedades (1) a (5) do enunciado. Um dos seguintes casos deve ocorrer:
 - (a) $\mathcal{C}$ coincide com $\neg \mathcal{D}$; pomos, então, $\mathcal{C}^\# \doteq \neg(\mathcal{D}^\#)$.
 - (b) $\mathcal{C}$ coincide com $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$; pomos, então, $\mathcal{C}^\# \doteq \mathcal{D}^\# \rightarrow \mathcal{E}^\#$.
 - (c) $\mathcal{C}$ coincide com $(\forall x)\mathcal{D}$; pomos, então, $\mathcal{C}^\# \doteq (\forall x)\mathcal{D}^\#$. $\# : \{\text{fórmulas de } K^\#\} \rightarrow \{\text{fórmulas de } K\}$ fica definida indutivamente por (1) e (2), e satisfaz as propriedades (1) a (5) do enunciado da proposição. Para verificar que tal aplicação também satisfaz (6), basta demonstrar, por (1) e (5), que se $\mathcal{C}$ for uma fórmula de K e $\vdash_{K^\#} \mathcal{C}$, então $\vdash_K \mathcal{C}$. Tal demonstração será referida a [1]¹

□

REFERÊNCIAS

- [1] E. MENDELSON, *Introduction to Mathematical Logic*, Chapman & Hall/CRC, 1997.

¹Recomendo que aguarde, no entanto, o Teorema da Completude, de Gödel, ainda a ser visto em aula.