

MAT349 - Introdução à Lógica

<http://www.ime.usp.br/mat/349>

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Quantificadores

EXEMPLO (INFERÊNCIAS QUE NÃO “PERTENCEM” AO CÁLCULO PROPOSICIONAL):

1. Todo amigo de Marta é amigo de Joana. Pedro não é amigo de Joana. Logo, Pedro não é amigo de Marta.
2. Todos humanos são racionais. Alguns animais são humanos. Logo, alguns animais são racionais.
3. O sucessor de todo inteiro par é ímpar. 2 é par. Logo, o sucessor de 2 é ímpar.

Quantificadores

EXEMPLO (INFERÊNCIAS QUE NÃO “PERTENCEM” AO CÁLCULO PROPOSICIONAL):

1. Todo amigo de Marta é amigo de Joana.
Pedro não é amigo de Joana. Logo, Pedro não é amigo de Marta.

$$\frac{(\forall x) (A(x, m) \rightarrow A(x, j)), \quad \neg A(p, j)}{\neg A(p, m)}$$

Quantificadores

EXEMPLO (INFERÊNCIAS QUE NÃO “PERTENCEM” AO CÁLCULO PROPOSICIONAL):

2. Todos humanos são racionais. Alguns animais são humanos. Logo, alguns animais são racionais.

$$\frac{(\forall x) (H(x) \rightarrow R(x)), \quad (\exists x)(A(x) \wedge H(x))}{(\exists x)(A(x) \wedge R(x))}$$

Quantificadores

EXEMPLO (INFERÊNCIAS QUE NÃO “PERTENCEM” AO CÁLCULO PROPOSICIONAL):

3. O sucessor de todo inteiro par é ímpar. 2 é par. Logo, o sucessor de 2 é ímpar.

$$\frac{(\forall x) (Z(x) \wedge P(x) \rightarrow I(s(x))), \quad I(b) \wedge P(b)}{I(s(b))}$$

Linguagens de 1a. Ordem

Uma *linguagem de 1a. ordem* $\mathcal{L}$ consiste dos seguintes símbolos:

Linguagens de 1a. Ordem

Uma *linguagem de 1a. ordem* $\mathcal{L}$ consiste dos seguintes símbolos:

1. Conectivos proposicionais $\rightarrow$, $\neg$ e o quantificador universal $\forall$.

Linguagens de 1a. Ordem

Uma *linguagem de 1a. ordem* $\mathcal{L}$ consiste dos seguintes símbolos:

1. Conectivos proposicionais $\rightarrow$, $\neg$ e o quantificador universal $\forall$.
2. Símbolos de Pontuação: $()$,

Linguagens de 1a. Ordem

Uma *linguagem de 1a. ordem* $\mathcal{L}$ consiste dos seguintes símbolos:

1. Conectivos proposicionais $\rightarrow, \neg$ e o quantificador universal $\forall$.
2. Símbolos de Pontuação: $()$,
3. Um conjunto enumerável de símbolos, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, chamados *variáveis*.

Linguagens de 1a. Ordem

4. Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de *símbolos funcionais* de $\mathcal{L}$:

$$\{f_k^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$$

Linguagens de 1a. Ordem

4. Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de *símbolos funcionais* de $\mathcal{L}$:

$$\{f_k^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$$

5. Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de *constantes individuais* de $\mathcal{L}$:

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Linguagens de 1a. Ordem

4. Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de *símbolos funcionais* de $\mathcal{L}$:

$$\{f_k^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$$

5. Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de *constantes individuais* de $\mathcal{L}$:

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

6. Um conjunto enumerável, não-vazio, de *símbolos predicativos* de $\mathcal{L}$: $\{P_k^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

Linguagens de 1a. Ordem com Igualdade

Uma linguagem de primeira ordem diz-se uma *linguagem de 1a. ordem com igualdade* se admitir o símbolo predicativo binário $=$.

Exemplos de Linguagens de 1a. Ordem com Igualdade

L_G (LINGUAGEM DA TEORIA DOS GRUPOS): um símbolo funcional binário (“.”) e uma constante individual (“ e ”).

Exemplos de Linguagens de 1a. Ordem com Igualdade

L_G (LINGUAGEM DA TEORIA DOS GRUPOS): um símbolo funcional binário (“.”) e uma constante individual (“ e ”).

L_K (LINGUAGEM DA TEORIA DOS CORPOS): dois símbolos funcionais binários (“+”, “.”) e duas constantes individuais (“0”, “1”).

Exemplos de Linguagens de 1a. Ordem com Igualdade

L_G (LINGUAGEM DA TEORIA DOS GRUPOS): um símbolo funcional binário (“.”) e uma constante individual (“ e ”).

L_K (LINGUAGEM DA TEORIA DOS CORPOS): dois símbolos funcionais binários (“+”, “.”) e duas constantes individuais (“0”, “1”).

L_{KO} (LINGUAGEM DA TEORIA DOS CORPOS ORDENADOS): é obtida adicionando-se a L_K o símbolo predicativo binário “ $<$ ”.

Exemplos de Linguagens de 1a. Ordem com Igualdade

L_C (LINGUAGEM DA TEORIA DOS CONJUNTOS):
um símbolo predicativo binário (“ $\in$ ”).

Exemplos de Linguagens de 1a. Ordem com Igualdade

L_C (LINGUAGEM DA TEORIA DOS CONJUNTOS): um símbolo predicativo binário (“ $\in$ ”).

L_N (LINGUAGEM DA ARITMÉTICA DE 1A. ORDEM): é obtida adicionando-se a L_{KO} o símbolo funcional unário “ S ” (sucessor).

Termos

Os *termos* de uma linguagem de 1a. ordem $\mathcal{L}$ são definidos indutivamente por:

- T1** variáveis e constantes individuais de $\mathcal{L}$ são termos;
- T2** se f_k^n é um símbolo funcional de $\mathcal{L}$ e $t_1, \dots, t_n$ são termos de $\mathcal{L}$, então $f_k^n(t_1, \dots, t_n)$ é um termo de $\mathcal{L}$.

Fórmulas

As *fórmulas* de uma linguagem de 1a. ordem $\mathcal{L}$ são definidas indutivamente por:

- F1** se P_k^n é um símbolo predicativo de $\mathcal{L}$ e $t_1, \dots, t_n$ são termos de $\mathcal{L}$, então $P_k^n(t_1, \dots, t_n)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}$ (FÓRMULA ATÔMICA)
- F2** se A e B são fórmulas e x é uma variável de $\mathcal{L}$, as seguintes expressões são fórmulas de $\mathcal{L}$: $\neg A$, $A \rightarrow B$, $((\forall x) A)$

Abreviações

1. $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ são definidas como anteriormente;
2. $((\exists x)\mathcal{B})$ é uma abreviação para $\neg((\forall x)(\neg\mathcal{B}))$.

Convenções para Eliminar Parêntesis

Serão usadas as mesmas convenções anteriores; $\forall$ e $\exists$ têm precedência intermediária entre $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.