

MAT349 - Introdução à Lógica

<http://www.ime.usp.br/mat/349>

Gláucio Terra

`glaucio@ime.usp.br`

Departamento de Matemática

IME - USP

Extensão do Conceito de Demonstração

Seja F uma teoria formal. Diz-se que uma fórmula A de F pode ser **deduzida** ou que é uma **conseqüência** de um conjunto M de fórmulas de F se existir uma seqüência A_1, \dots, A_n de fórmulas de F tal que $A_n = A$ e, para $1 \leq i \leq n$, uma das seguintes condições é verificada:

1. A_i é um axioma de F , ou A_i pertence a M , ou **A_i é um teorema de F já demonstrado**;
2. A_i é conseqüência das fórmulas anteriores da seqüência por meio de uma das regras de inferência de F .

Teorema da Dedução

TEOREMA Sejam L a teoria formal do cálculo proposicional, M um conjunto de fórmulas e A, B fórmulas de L . Se $M, A \vdash B$, então $M \vdash A \rightarrow B$.

Exercícios

1. (SILOGISMO HIPOTÉTICO)

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$

2. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$

3. $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

4. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

5. $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

6. (CONTRAPOSIÇÃO) $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

7. (CONTRAPOSIÇÃO) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Exercícios

1. (SILOGISMO DISJUNTIVO) $A \vee B, \neg A \vdash B$
2. (DILEMA CONSTRUTIVO)
 $A \rightarrow B, C \rightarrow D \vdash A \vee C \rightarrow B \vee D$
3. (EXPORTAÇÃO) $A \vee B \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$
4. (EXPORTAÇÃO) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \wedge B \rightarrow C$

Exercícios

$$1. P \rightarrow Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n, \neg Q_1, \dots, \neg Q_{n-1} \vdash P \rightarrow Q_n$$

$$2. P_1 \rightarrow Q, \dots, P_n \rightarrow Q \vdash P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow Q$$