MAT349 - Introdução à Lógica
http://www.ime.usp.br/mat/349

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Teorias Formais

Uma *teoria formal* F consiste de:

Teorias Formais

Uma *teoria formal* F consiste de:

1. Um conjunto enumerável de símbolos, chamados *símbolos de* F; uma seqüência finita de tais símbolos chama-se uma *expressão* de F.

Teorias Formais

Uma *teoria formal* F consiste de:

1. Um conjunto enumerável de símbolos, chamados *símbolos de* F; uma seqüência finita de tais símbolos chama-se uma *expressão* de F.
2. Um subconjunto do conjunto das expressões de F, chamado *fórmulas* de F.

Teorias Formais

3. Um conjunto de fórmulas de F, chamadas *axiomas* de F.

Teorias Formais

3. Um conjunto de fórmulas de F, chamadas *axiomas* de F.
4. Um conjunto finito de relações $R_1, \ldots, R_n$ no conjunto das fórmulas de F, chamadas *regras de inferência*.

Demonstrações e Teoremas

Seja F uma teoria formal. Uma *demonstração* ou *prova em F* é uma seqüência $A_1, \ldots, A_n$ de fórmulas de F tais que, para $1 \leqslant i \leqslant n$, A_i é um axioma de F ou é conseqüência das fórmulas anteriores por meio de uma das regras de inferência de F.

Demonstrações e Teoremas

Seja F uma teoria formal. Uma *demonstração* ou *prova em F* é uma seqüência $A_1, \ldots, A_n$ de fórmulas de F tais que, para $1 \leqslant i \leqslant n$, A_i é um axioma de F ou é conseqüência das fórmulas anteriores por meio de uma das regras de inferência de F.

Um *teorema* de F é uma fórmula A tal que existe uma demonstração em F (chamada *demonstração de A*) cujo último termo é A.

Teorias Axiomatizáveis/Não-Axiomatizáveis, Decidíveis/Não-Decidíveis

- Uma teoria formal F diz-se *axiomatizável* se existir um "procedimento efetivo" para testar se uma dada fórmula é um axioma de F.

Teorias Axiomatizáveis/Não-Axiomatizáveis, Decidíveis/Não-Decidíveis

- Uma teoria formal F diz-se *axiomatizável* se existir um "procedimento efetivo" para testar se uma dada fórmula é um axioma de F.
- Uma teoria formal F diz-se *decidível* se existir um "procedimento efetivo" para testar se uma dada fórmula é um teorema de F.

Demonstrações e Teoremas

Diz-se que uma fórmula A de F pode ser *deduzida* ou que é uma *conseqüência* de um conjunto M de fórmulas de F se existir uma seqüência $A_1, \ldots, A_n$ de fórmulas de F tal que $A_n = A$ e, para $1 \leqslant i \leqslant n$, uma das seguintes condições é verificada:

Demonstrações e Teoremas

Diz-se que uma fórmula A de F pode ser *deduzida* ou que é uma *conseqüência* de um conjunto M de fórmulas de F se existir uma seqüência $A_1, \ldots, A_n$ de fórmulas de F tal que $A_n = A$ e, para $1 \leqslant i \leqslant n$, uma das seguintes condições é verificada:

1. A_i é um axioma de F;

Demonstrações e Teoremas

Diz-se que uma fórmula A de F pode ser *deduzida* ou que é uma *conseqüência* de um conjunto M de fórmulas de F se existir uma seqüência $A_1, \ldots, A_n$ de fórmulas de F tal que $A_n = A$ e, para $1 \leqslant i \leqslant n$, uma das seguintes condições é verificada:

1. A_i é um axioma de F;
2. A_i pertence a M;

Demonstrações e Teoremas

Diz-se que uma fórmula A de F pode ser *deduzida* ou que é uma *conseqüência* de um conjunto M de fórmulas de F se existir uma seqüência $A_1, \ldots, A_n$ de fórmulas de F tal que $A_n = A$ e, para $1 \leqslant i \leqslant n$, uma das seguintes condições é verificada:

1. A_i é um axioma de F;
2. A_i pertence a M;
3. A_i é conseqüência das fórmulas anteriores da seqüência por meio de uma das regras de inferência de F.

Demonstrações e Teoremas

- Uma tal seqüência chama-se *demonstração* ou *prova* de A a partir de M.

Demonstrações e Teoremas

- Uma tal seqüência chama-se *demonstração* ou *prova* de A a partir de M.
- As fórmulas de M chamam-se *hipóteses* ou *premissas* da prova.

Demonstrações e Teoremas

- Uma tal seqüência chama-se *demonstração* ou *prova* de A a partir de M.
- As fórmulas de M chamam-se *hipóteses* ou *premissas* da prova.
- NOTAÇÃO: $M \vdash A$.

Propriedades da Noção de Conseqüência

1. Se $\Gamma \subset \Delta$ e $\Gamma \vdash A$, então $\Delta \vdash A$.
2. $\Gamma \vdash A$ se, e somente se, existe um $\Delta \subset \Gamma$ *finito* tal que $\Delta \vdash A$.
3. Se $\Delta \vdash A$ e, para cada fórmula B de Δ, $\Gamma \vdash B$, então $\Gamma \vdash A$.

Uma Teoria Axiomática Formal L para o Cálculo Proposicional

Uma Teoria Axiomática Formal L para o Cálculo Proposicional

1. Os símbolos de L são: $\neg$, $\rightarrow$, $($, $)$, e um conjunto enumerável de letras $a_1, a_2, a_3, \ldots$, chamadas *letras proposicionais*.

Uma Teoria Axiomática Formal L para o Cálculo Proposicional

1. Os símbolos de L são: $\neg$, $\rightarrow$, $($, $)$, e um conjunto enumerável de letras $a_1, a_2, a_3, \ldots$, chamadas *letras proposicionais*.
2. As *fórmulas* de L são definidas indutivamente por:
   - (a) as letras proposicionais são fórmulas;
   - (b) se A é uma fórmula, então $\neg A$ é uma fórmula;
   - (c) se A e B são fórmulas, então $A \rightarrow B$ é uma fórmula.

Uma Teoria Axiomática Formal L para o Cálculo Proposicional

1. Os axiomas de L são (onde A, B, C são fórmulas de L):
   (I) $A \to (B \to A)$;
   (II) $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$
   (III) $(\neg B \to A) \to [(\neg B \to \neg A) \to B]$
2. A única regra de inferência de L é a regra *modus ponens* (MP):

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

Uma Teoria Axiomática Formal L para o Cálculo Proposicional

1. Os axiomas de L são (onde A, B, C são fórmulas de L):
   (I) $A \to (B \to A)$;
   (II) $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$
   (III) $(\neg B \to \neg A) \to [(\neg B \to A) \to B]$
2. A única regra de inferência de L é a regra *modus ponens* (MP):

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

Definições de Novos Conectivos

1. $A \vee B \doteq \neg A \to B$.
2. $A \wedge B \doteq \neg(A \to \neg B)$.
3. $A \leftrightarrow B \doteq (A \to B) \wedge (B \to A)$.

Um Teorema de L

TEOREMA $\vdash A \rightarrow A$

Um Teorema de L

PROVA:

A_1: $[A \to ((A \to A) \to A)] \to [(A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$, pelo axioma (II)

Um Teorema de L

PROVA:

A_1: $[A \to ((A \to A) \to A)] \to [(A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$, pelo axioma (II)

A_2: $A \to ((A \to A) \to A)$, pelo axioma (I)

Um Teorema de L

PROVA:

A_1: $[A \to ((A \to A) \to A)] \to [(A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$, pelo axioma (II)

A_2: $A \to ((A \to A) \to A)$, pelo axioma (I)

A_3: $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$, por (MP) de A_1 e A_2

Um Teorema de L

PROVA:

A_1: $[A \to ((A \to A) \to A)] \to [(A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$, pelo axioma (II)

A_2: $A \to ((A \to A) \to A)$, pelo axioma (I)

A_3: $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$, por (MP) de A_1 e A_2

A_4: $A \to (A \to A)$, pelo axioma (I)

Um Teorema de L

PROVA:

A_1: $[A \to ((A \to A) \to A)] \to [(A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$, pelo axioma (II)

A_2: $A \to ((A \to A) \to A)$, pelo axioma (I)

A_3: $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$, por (MP) de A_1 e A_2

A_4: $A \to (A \to A)$, pelo axioma (I)

A_5: $A \to A$ por (MP) de A_3 e A_4.

Exercícios

1. $\vdash (\neg A \to A) \to A$
2. $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
3. $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$
4. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$