

MAT349 - Introdução à Lógica

<http://www.ime.usp.br/mat/349>

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Convenções para Evitar Parênteses

1. Se na fórmula figuram conectivos binários de um único tipo, omitem-se os parênteses por associação à esquerda.

Convenções para Evitar Parênteses

1. Se na fórmula figuram conectivos binários de um único tipo, omitem-se os parênteses por associação à esquerda.
2. Ordenam-se os conectivos, em ordem decrescente de prioridade, como segue:

$\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg$

Propriedades da Conjunção

$$1. \quad p \cdot q \Leftrightarrow q \cdot p$$

$$2. \quad p \cdot (q \cdot r) \Leftrightarrow (p \cdot q) \cdot r$$

$$3. \quad p \cdot p \Leftrightarrow p$$

$$4. \quad p \cdot V \Leftrightarrow p$$

$$5. \quad p \cdot F \Leftrightarrow F$$

Propriedades da Disjunção

1. $p + q \Leftrightarrow q + p$

2. $p + (q + r) \Leftrightarrow (p + q) + r$

3. $p + p \Leftrightarrow p$

4. $p + V \Leftrightarrow V$

5. $p + F \Leftrightarrow p$

Propriedades Distributivas

$$1. \quad p \cdot (q + r) \Leftrightarrow p \cdot q + q \cdot r$$

$$2. \quad p + (q \cdot r) \Leftrightarrow (p + q) \cdot (q + r)$$

Absorção

$$1. \quad p \cdot (p + r) \Leftrightarrow p$$

$$2. \quad p + (p \cdot r) \Leftrightarrow p$$

Negação e Regras de De Morgan

1. $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$

2. $\overline{p \cdot q} \Leftrightarrow \bar{p} + \bar{q}$

3. $\overline{p + q} \Leftrightarrow \bar{p} \cdot \bar{q}$

Redução do Número de Conectivos

Note que:

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. \quad p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. \quad p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$2. \quad p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. \quad p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$2. \quad p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$3. \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q)$$

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. \quad p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$2. \quad p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$3. \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q)$$

Conclusão: Pelo princípio da substituição, toda fórmula proposicional é logicamente a uma fórmula na qual figuram os conectivos $\neg$ e $\vee$, apenas.

Redução do Número de Conectivos

Note que:

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. \quad p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. \quad p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

$$2. \quad p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. \quad p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

$$2. \quad p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

$$3. \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$$

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

$$2. p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

$$3. p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$$

Conclusão: Pelo princípio da substituição, toda fórmula proposicional é logicamente a uma fórmula na qual figuram os conectivos $\neg$ e $\wedge$, apenas.

Redução do Número de Conectivos

Note que:

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. \quad p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$$

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. \quad p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$$

$$2. \quad p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$$

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. \quad p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$$

$$2. \quad p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$3. \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg[(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p)]$$

Redução do Número de Conectivos

Note que:

$$1. \ p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$$

$$2. \ p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$3. \ p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg[(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p)]$$

Conclusão: Pelo princípio da substituição, toda fórmula proposicional é logicamente a uma fórmula na qual figuram os conectivos $\neg$ e $\rightarrow$, apenas.

Formas Normais Conjuntiva e Disjuntiva

DEFINIÇÃO Diz-se que uma fórmula é *normal conjuntiva* se for uma conjunção de disjunções de átomos ou negações de átomos.

DEFINIÇÃO Diz-se que uma fórmula é *normal disjuntiva* se for uma disjunção de conjunções de átomos ou negações de átomos.

Exercícios

Encontre uma forma normal disjuntiva equivalente a:

1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

2. $\neg(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg s \wedge q$

Exercícios

Encontre uma forma normal conjuntiva equivalente a:

1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$

2. $\neg(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r \vee q$

O Problema de Post

O Problema de Post

Como determinar uma fórmula proposicional que tenha uma função verdade dada?