

MAT349 - Introdução à Lógica

<http://www.ime.usp.br/mat/349>

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Funções Verdade

DEFINIÇÃO Uma *função verdade* de n argumentos é uma função $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Funções Verdade

DEFINIÇÃO Uma *função verdade* de n argumentos é uma função $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

DEFINIÇÃO Seja L uma linguagem proposicional e A uma fórmula de L , na qual figuram os átomos $p_1, \dots, p_n$ (nesta ordem). A *função verdade de A* é a função verdade obtida a partir da tabela verdade de $A(p_1, \dots, p_n)$.

Fórmulas Tautológicas e Contra-Válidas (bis)

DEFINIÇÃO Uma função verdade diz-se *tautológica* se sua imagem for $\{1\}$, e *contra-válida* se sua imagem for $\{0\}$.

Fórmulas Tautológicas e Contra-Válidas (bis)

DEFINIÇÃO Uma função verdade diz-se *tautológica* se sua imagem for $\{1\}$, e *contra-válida* se sua imagem for $\{0\}$.

PROPOSIÇÃO Sejam L uma linguagem proposicional e A uma L -fórmula; então A é tautológica se, e somente se, sua função verdade o for.

Tautologias

PROPOSIÇÃO Sejam L uma linguagem proposicional e A, B fórmulas de L . Se A e $A \rightarrow B$ são tautológicas, então B é tautológica.

Tautologias

PROPOSIÇÃO Sejam L uma linguagem proposicional e A, B fórmulas de L . Se A e $A \rightarrow B$ são tautológicas, então B é tautológica.

PROPOSIÇÃO [PRINCÍPIO DA SUBSTITUIÇÃO]
Sejam L uma linguagem proposicional e $A(p_1, \dots, p_n)$ uma L -fórmula na qual figuram os átomos $p_1, \dots, p_n$. Sejam $A_1, \dots, A_n$ L -fórmulas, e B a L -fórmula obtida a partir de A por substituição dos átomos p_i por A_i , $1 \leq i \leq n$. Se A é tautológica, então B é tautológica.

Implicação e Equivalência Lógica

DEFINIÇÃO Sejam L uma linguagem proposicional, A e B L -fórmulas. Diz-se que A *implica logicamente (ou formalmente)* B (NOTAÇÃO: $A \Rightarrow B$) se $A \rightarrow B$ for tautológica.

Implicação e Equivalência Lógica

DEFINIÇÃO Sejam L uma linguagem proposicional, A e B L -fórmulas. Diz-se que A *implica logicamente (ou formalmente)* B (NOTAÇÃO: $A \Rightarrow B$) se $A \rightarrow B$ for tautológica.

DEFINIÇÃO Sejam L uma linguagem proposicional, A e B L -fórmulas. Diz-se que A é *logicamente (ou formalmente) equivalente* a B (NOTAÇÃO: $A \Leftrightarrow B$) se $A \leftrightarrow B$ for tautológica. Ou seja, se $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$.

Implicação e Equivalência Lógica

PROPOSIÇÃO Sejam L uma linguagem proposicional e $\mathcal{F}L$ o conjunto das fórmulas de L . Então $\Leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}L$ (i.e. uma relação binária reflexiva, simétrica e transitiva).

Implicação e Equivalência Lógica

PROPOSIÇÃO Sejam L uma linguagem proposicional e $\mathcal{F}L$ o conjunto das fórmulas de L . Então $\Leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}L$ (i.e. uma relação binária reflexiva, simétrica e transitiva).

PROPOSIÇÃO [PRINCÍPIO DA SUBSTITUIÇÃO (BIS)] Seja L uma linguagem proposicional. Se a L -fórmula B_1 é obtida a partir de A_1 por substituição de uma ou mais ocorrências da L -fórmula A por B , então $(A \Leftrightarrow B) \rightarrow (A_1 \Leftrightarrow B_1)$ é uma tautologia. Em particular, se $A \Leftrightarrow B$, então $A_1 \Leftrightarrow B_1$.

Exercícios

1. $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$

2. $\overline{p \cdot q} \Leftrightarrow \bar{p} + \bar{q}$

3. $\overline{p + q} \Leftrightarrow \bar{p} \cdot \bar{q}$

4. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{p} + q$

5. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$

6. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$

Exercícios

1. $p + \bar{p}$ é tautológica

2. $p \cdot \bar{p}$ é contra-válida

3. $p \Rightarrow p + q$

4. $p \cdot q \Rightarrow p$

5. $p \cdot q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

6. $p \rightarrow q \Rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow s)$

7. $p \rightarrow (r \cdot \bar{r}) \Rightarrow \bar{p}$

8. $(p \rightarrow q) \cdot (r \rightarrow s) \Rightarrow p \cdot r \rightarrow q \cdot s$