MAT349 - Introdução à Lógica
http://www.ime.usp.br/mat/349

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Cálculo Proposicional

É a parte do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem na qual se estuda a validade de argumentos do ponto de vista das *conexões* entre as sentenças do discurso, sem levar em conta a estrutura interna de cada sentença.

Proposições

- Uma **proposição** ou **sentença** é uma afirmação passível de assumir valor lógico *verdadeiro* ou *falso*;

Proposições

- Uma **proposição** ou **sentença** é uma afirmação passível de assumir valor lógico *verdadeiro* ou *falso*;
- Toda proposição é verdadeira ou falsa (*princípio do terceiro excluído*);

Proposições

- Uma **proposição** ou **sentença** é uma afirmação passível de assumir valor lógico *verdadeiro* ou *falso*;
- Toda proposição é verdadeira ou falsa (*princípio do terceiro excluído*);
- Uma proposição não pode ser verdadeira E falsa (*princípio da não-contradição*).

Exemplos de Proposições

- $2 > 1$;

Exemplos de Proposições

- $2 > 1$;
- $5 = 1$;

Exemplos de Proposições

- $2 > 1$;
- $5 = 1$;
- O céu é azul.

Fórmulas

DEFINIÇÃO Os *conectivos proposicionais* são *negação* ($\neg$), *conjunção* ($\wedge$), *disjunção* ($\vee$), *implicação* ($\rightarrow$) e *bi-implicação* ($\leftrightarrow$).

Fórmulas

DEFINIÇÃO Os *conectivos proposicionais* são *negação* ($\neg$), *conjunção* ($\wedge$), *disjunção* ($\vee$), *implicação* ($\rightarrow$) e *bi-implicação* ($\leftrightarrow$).

DEFINIÇÃO Uma *linguagem proposicional* L é um conjunto $\{p, q, r, \ldots\}$, cujos elementos chamam-se *átomos proposicionais* ou *fórmulas atômicas*.

Fórmulas

DEFINIÇÃO O conjunto das *fórmulas* de L é definido indutivamente, através das seguintes regras:

- se p é uma fórmula atômica de L, então p é uma fórmula;

Fórmulas

DEFINIÇÃO O conjunto das *fórmulas* de L é definido indutivamente, através das seguintes regras:

- se p é uma fórmula atômica de L, então p é uma fórmula;
- se A é uma fórmula, então $\neg A$ é uma fórmula;

Fórmulas

DEFINIÇÃO O conjunto das *fórmulas* de L é definido indutivamente, através das seguintes regras:

- se p é uma fórmula atômica de L, então p é uma fórmula;
- se A é uma fórmula, então $\neg A$ é uma fórmula;
- se A e B são fórmulas, então $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ e $A \leftrightarrow B$ são fórmulas.

Valoração

DEFINIÇÃO Os *valores lógicos* são V (verdadeiro) e F (falso).

Valoração

DEFINIÇÃO Os *valores lógicos* são V (verdadeiro) e F (falso).

DEFINIÇÃO Seja L uma linguagem proposicional. Uma *atribuição* de L é uma aplicação:

$$M : \{\text{fórmulas atômicas de } L\} \to \{V, F\}$$

Valoração

LEMA Sejam L uma linguagem proposicional e M uma atribuição de L. Então existe uma única aplicação

$$v_M : \{A \mid A \text{ fórmula de } L\} \rightarrow \{V, F\},$$

chamada *valoração* de L induzida por M, satisfazendo as seguintes propriedades:

Valoração

LEMA Sejam L uma linguagem proposicional e M uma atribuição de L. Então existe uma única aplicação

$$v_M : \{A \mid A \text{ fórmula de } L\} \longrightarrow \{V, F\},$$

chamada *valoração* de L induzida por M, satisfazendo as seguintes propriedades:

- $$v_M(\neg A) = \begin{cases} V, & \text{se } v_M(A) = F \\ F, & \text{se } v_M(A) = V \end{cases}$$

Valoração

- $$v_M(A \wedge B) = \begin{cases} V, & \text{se } v_M(A) = V \text{ e } v_M(B) = V \\ F, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Valoração

- $$v_M(A \wedge B) = \begin{cases} V, & \text{se } v_M(A) = V \text{ e } v_M(B) = V \\ F, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $$v_M(A \vee B) = \begin{cases} V, & \text{se } v_M(A) = V \text{ ou } v_M(B) = V \\ F, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Valoração

- $$v_M(A \wedge B) = \begin{cases} V, & \text{se } v_M(A) = V \text{ e } v_M(B) = V \\ F, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $$v_M(A \vee B) = \begin{cases} V, & \text{se } v_M(A) = V \text{ ou } v_M(B) = V \\ F, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $v_M(A \rightarrow B) = v_M(\neg A \vee B)$

Valoração

- $$v_M(A \wedge B) = \begin{cases} V, & \text{se } v_M(A) = V \text{ e } v_M(B) = V \\ F, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $$v_M(A \vee B) = \begin{cases} V, & \text{se } v_M(A) = V \text{ ou } v_M(B) = V \\ F, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $v_M(A \to B) = v_M(\neg A \vee B)$
- $v_M(A \leftrightarrow B) = v_M\big((A \to B) \wedge (B \to A)\big)$

Fórmulas Tautológicas e Contra-Válidas

DEFINIÇÃO Seja L uma linguagem proposicional. Diz-se que uma fórmula A de L é *tautológica* ou *logicamente válida* se, para toda atribuição M de L, tem-se $v_M(A) = V$. Diz-se que A é *contra-válida* se $\neg A$ for tautológica, i.e. se para toda atribuição M de L, tem-se $v_M(A) = F$.

Satisfabilidade, Conseqüência Lógica

DEFINIÇÃO Sejam L uma linguagem proposicional M uma L-atribuição. Diz-se que M *satisfaz* uma L-fórmula A se $v_M(A) = V$.

DEFINIÇÃO Sejam L uma linguagem proposicional S um conjunto de L-fórmulas. Diz-se que S é *satisfatível* se existir uma atribuição M que satisfaça todas as fórmulas de L.

Satisfabilidade, Conseqüência Lógica

DEFINIÇÃO Sejam S um conjunto de fórmulas de uma linguagem proposicional L, e B uma L-fórmula. Diz-se que B é uma*conseqüência lógica* de S se toda atribuição M que satisfaz S também satisfizer B, i.e. se $v_M(B) = V$ sempre que $v_M(A) = V$ para toda $A \in S$. NOTAÇÃO: $S \models B$.