MAT349 - Introdução à Lógica http://www.ime.usp.br/mat/349

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Teorias com Igualdade

DEFINIÇÃO Seja K uma teoria de 1a. ordem que possui um símbolo predicativo binário "$=$". Diz-se que K é uma *teoria de 1a. ordem com igualdade* se as seguintes fórmulas forem teoremas de K:

A6 $(\forall x_1)x_1 = x_1$

A7 $x = y \rightarrow \big(\mathcal{B}(x,x) \rightarrow \mathcal{B}(x,y)\big)$ se y livre para x em $\mathcal{B}(x,x)$ e $\mathcal{B}(x,y)$ se obtém de $\mathcal{B}(x,x)$ por substituição de algumas das ocorrências livres de x por y.

Teorias com Igualdade

PROPOSIÇÃO Em toda teoria com igualdade, tem-se:

1. $\vdash t = t$ (para qualquer termo t)
2. $\vdash t = s \rightarrow s = t$ (para quaisquer termos s e t)
3. $\vdash t = s \rightarrow (s = r \rightarrow t = r)$ (para quaisquer termos r, s e t)

Teorias com Igualdade

PROPOSIÇÃO Seja K uma teoria de 1a. ordem na qual (A6) é um teorema e (A7) vale para todas as fórmulas atômicas $\mathcal{B}(x, x)$ nas quais não figuram constantes individuais. Então K é uma teoria com igualdade, i.e. (A7) vale para quaisquer fórmulas $\mathcal{B}(x, x)$.

Teorias com Igualdade

PROPOSIÇÃO Seja K uma teoria de 1a. ordem na qual (A6) é um teorema e as seguintes condições são satisfeitas:

1. O esquema (A7) vale para todas as fórmulas atômicas $\mathcal{B}(x, x)$ nas quais não figuram símbolos funcionais ou constantes individuais, e $\mathcal{B}(x, y)$ é obtida de $\mathcal{B}(x, x)$ pela substituição de uma única ocorrência de x por y.

Teorias com Igualdade

2. $\vdash x = y \rightarrow f_j^n(z_1, \ldots, z_n) = f_j^n(w_1, \ldots, w_n)$, onde f_j^n é um símbolo funcional qualquer, $z_1, \ldots, z_n$ são variáveis e $f_j^n(w_1, \ldots, w_n)$ é obtida a partir de $f_j^n(z_1, \ldots, z_n)$ pela substituição de uma única ocorrência de x por y.

Então K é uma teoria com igualdade.

Exemplos

- A teoria elementar dos grupos é uma teoria com igualdade.
- Idem para a teoria elementar dos corpos e para a teoria elementar dos corpos ordenados.

Exercícios

Mostre que, em toda teoria de 1a. ordem com igualdade:

1. $x = y \to f(x) = f(y)$ onde f é qualquer símbolo funcional unário.
2. $(\forall x)(\exists y)x = y$
3. $(\forall x)\big(\mathcal{B}(x) \leftrightarrow (\forall y)(x = y \to \mathcal{B}(y))\big)$ se y não ocorre em $\mathcal{B}(x)$