

MAT349 - Introdução à Lógica

<http://www.ime.usp.br/mat/349>

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Teoremas e Regras de Inferências Derivadas Adicionais

Particularização: $(\forall x)\mathcal{A}(x) \vdash \mathcal{A}(t)$ se t livre para x em $\mathcal{A}(x)$.

Regra Existencial: $\mathcal{A}(t, t) \vdash (\exists x)\mathcal{A}(x, t)$ se t livre para x em $\mathcal{A}(x, t)$.

Eliminação de Negação: $\neg\neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$

Introdução de Negação: $\mathcal{A} \vdash \neg\neg\mathcal{A}$

Teoremas e Regras de Inferências Derivadas Adicionais

Eliminação de Conjunção: • $A \wedge B \vdash A$

- $A \wedge B \vdash B$
- $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$

Introdução de Conjunção: $A, B \vdash A \wedge B$

Eliminação de Disjunção: • $A \vee B, \neg A \vdash B$

- $A \vee B, \neg B \vdash A$
- $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$
- $A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B \vdash C$

Teoremas e Regras de Inferências Derivadas Adicionais

Introdução de Disjunção: • $A \vdash A \vee B$

• $B \vdash A \vee B$

Eliminação de Condicional: • $A \rightarrow B, \neg B \vdash A$

• $A \rightarrow \neg B, B \vdash A$

• $\neg A \rightarrow B, \neg B \vdash A$

• $\neg A \rightarrow \neg B, B \vdash A$

Contraposição: • $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

• $\neg A \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow A$

Teoremas e Regras de Inferências Derivadas Adicionais

Eliminação de Bicondicional: • $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$

- $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$
- $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}, \neg \mathcal{B} \vdash \neg \mathcal{A}$
- $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}, \neg \mathcal{A} \vdash \neg \mathcal{B}$
- $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$

Introdução de Bicondicional:

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$$

Prova por Contradição: Se $\Gamma, \neg \mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{B}$ e na dedução não se aplica (Gen) a uma fórmula com variável quantificada livre em $\mathcal{A}$, então $\Gamma \vdash \mathcal{A}$.

Teoremas da Equivalência e da Substituição

PROPOSIÇÃO Sejam $\mathcal{C}$ uma subfórmula de $\mathcal{B}$, e $\mathcal{B}'$ a fórmula obtida de $\mathcal{B}$ por substituição de uma ou mais ocorrências de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{D}$. Suponha que todas as variáveis livres de $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}$ que sejam variáveis ligadas em $\mathcal{B}$ estejam na lista $\{y_1, \dots, y_k\}$. Tem-se:

$$1. \vdash ((\forall y_1) \dots (\forall y_k)(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}')$$

(TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA)

2. Se $\vdash \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D}$, então $\vdash \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}'$ (TEOREMA DA SUBSTITUIÇÃO)

Exercícios

Verifique que, numa teoria de 1a. ordem:

1. $\vdash \neg(\exists x)\mathcal{B} \leftrightarrow (\forall x)\neg\mathcal{B}$
2. $\vdash (\forall x)\mathcal{B} \rightarrow (\forall x)(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$

Assuma que x não ocorre livre em $\mathcal{B}$. Então:

1. $\vdash \mathcal{B} \rightarrow (\forall x)\mathcal{B}$
2. $\vdash \mathcal{B} \rightarrow (\exists x)\mathcal{B}$
3. $\vdash (\mathcal{B} \rightarrow (\forall x)\mathcal{C}) \leftrightarrow (\forall x)(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$
4. $\vdash ((\exists x)\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}) \leftrightarrow (\forall x)(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B})$

Exercícios(cont.)

1. $\vdash (\exists x)\neg\mathcal{B} \leftrightarrow \neg(\forall x)\mathcal{B}$

2. $\vdash (\exists x)(\mathcal{B} \rightarrow \neg(\mathcal{C} \vee \mathcal{D})) \leftrightarrow (\exists x)(\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D})$

3. $\vdash (\forall x)(\exists y)(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$

Regra C

MOTIVAÇÃO:

$$(\exists x)(\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{C}(x)), (\forall x)\mathcal{B}(x) \vdash (\exists x)\mathcal{C}(x)$$

Regra C

MOTIVAÇÃO:

$$(\exists x)(\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{C}(x)), (\forall x)\mathcal{B}(x) \vdash (\exists x)\mathcal{C}(x)$$

A1 $(\exists x)(\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{C}(x))$ (hip.)

A2 $(\forall x)\mathcal{B}(x)$ (hip.)

A3 $\mathcal{B}(d) \rightarrow \mathcal{C}(d)$ (de A1, “escolhendo um d ”)

A4 $(\forall x)\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{B}(d)$ (axioma IV)

A5 $\mathcal{B}(d)$ ((MP), de A2 e A4)

A6 $\mathcal{C}(d)$ ((MP), de A3 e A5)

A7 $\mathcal{C}(d) \rightarrow (\exists x)\mathcal{C}(x)$ (regra existencial)

A8 $(\exists x)\mathcal{C}(x)$ ((MP), de A6 e A7)

Regra C

DEFINIÇÃO Uma *dedução usando a regra C* numa teoria de 1a. ordem K , de uma fórmula $\mathcal{B}$ a partir de um conjunto de fórmulas Γ (**NOTAÇÃO:** $\Gamma \vdash_C \mathcal{B}$), é uma seqüência de fórmulas $(B_1, \dots, B_n)$, com $B_n = \mathcal{B}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

Regra C

1. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, uma das seguintes condições é satisfeita:
 - (a) A_i é um axioma de K ou $A_i \in \Gamma$.
 - (b) A_i é obtida por (MP) ou (Gen) a partir de fórmulas anteriores da seqüência.
 - (c) existe $j < i$ tal que $A_j = (\exists x)\mathcal{C}(x)$ e $A_i = \mathcal{C}(d)$, onde d é uma nova constante individual (**regra C**).

Regra C

2. Ao ser aplicada a regra C, a constante individual introduzida passa a fazer parte da linguagem, i.e. estamos estendendo a linguagem de K . Portanto, nas fórmulas seguintes da seqüência, esta constante pode ser usada nos esquemas de axiomas.
3. Nenhuma aplicação de (Gen) é feita com variável quantificada livre numa fórmula $(\exists x)\mathcal{C}(x)$ à qual tenha sido aplicada a regra C anteriormente.
4. As constantes individuais novas não figuram em $\mathcal{B}$.

Regra C

PROPOSIÇÃO Se $\Gamma \vdash_C \mathcal{B}$, então $\Gamma \vdash \mathcal{B}$. Além disso, é possível tomar uma dedução de $\Gamma \vdash \mathcal{B}$ satisfazendo a seguinte propriedade: se, nesta dedução, ocorrer uma aplicação de (Gen) a uma fórmula que dependa de uma fórmula $\mathcal{D}$, com variável quantificada x , então isto já acontecia na dedução original de $\Gamma \vdash_C \mathcal{B}$.

Exercícios

Verifique que, numa teoria de 1a. ordem:

$$1. \vdash (\forall x)(\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{C}(x)) \rightarrow ((\exists x)\mathcal{B}(x) \rightarrow (\exists x)\mathcal{C}(x))$$

$$2. \vdash (\exists x)(\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{C}(x)) \rightarrow ((\forall x)\mathcal{B}(x) \rightarrow (\exists x)\mathcal{C}(x))$$

$$3. \vdash \neg(\exists y)(\forall x)(A_1^2(x, y) \leftrightarrow \neg A_1^2(x, x))$$