MAT349 - Introdução à Lógica
http://www.ime.usp.br/mat/349

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Teorias de 1a. Ordem

DEFINIÇÃO Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem. Uma *teoria de 1a. ordem* K na linguagem L é uma teoria formal, cujos símbolos e fórmulas são os mesmos de L, e cujos axiomas e regras de inferência são especificados conforme abaixo.

Teorias de 1a. Ordem

DEFINIÇÃO Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem. Uma *teoria de 1a. ordem* K na linguagem L é uma teoria formal, cujos símbolos e fórmulas são os mesmos de L, e cujos axiomas e regras de inferência são especificados conforme abaixo.

- Axiomas Lógicos. Para quaisquer fórmulas $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$:

(A1) $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$

(A2) $\big(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\big) \to \big((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})\big)$

Teorias de 1a. Ordem

(A3) $(\neg\mathcal{A} \rightarrow \neg\mathcal{B}) \rightarrow \big((\neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}\big)$

(A4) $(\forall x_i)\mathcal{B}(x_i) \rightarrow \mathcal{B}(t)$ se t for livre para x_i em $\mathcal{B}(x_i)$

(A5) $(\forall x_i)(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow \big(\mathcal{B} \rightarrow (\forall x_i)\mathcal{C}\big)$ se x_i não ocorrer livre em $\mathcal{B}$.

Teorias de 1a. Ordem

- Axiomas próprios. São específicos de cada teoria.
- Regras de Inferência:

MP $$\frac{\mathcal{A}, \mathcal{A} \to \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$

Gen $$\frac{\mathcal{A}}{(\forall x_i)\mathcal{A}}$$

Cálculo de Predicados de 1a. Ordem, Modelos

DEFINIÇÃO Uma teoria de 1a. ordem que não possui axiomas próprios (i.e. só tem os 5 esquemas de axiomas lógicos) chama-se um *cálculo de predicados de 1a. ordem*.

DEFINIÇÃO Seja K uma teoria de 1a. ordem na linguagem $\mathcal{L}$. Um *modelo* de K é uma interpretação de K na qual todos os axiomas de K são válidos.

Exemplos de Teorias de 1a. Ordem

- *Ordem Parcial.* $\mathcal{L}$: um símbolo predicativo binário $<$. Axiomas próprios:

O1: $(\forall x_1)\neg x_1 < x_1$

O2: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \rightarrow x_1 < x_3)$

Um modelo desta teoria chama-se uma *estrutura parcialmente ordenada*.

Exemplos de Teorias de 1a. Ordem

- *Teoria dos Grupos.* $\mathcal{L}$: um símbolo funcional binário $+$, uma constante individual 0, um símbolo predicativo binário $=$. Axiomas próprios:

G1: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$

G2: $(\forall x_1)0 + x_1 = x_1$

G3: $(\forall x_1)(\exists x_2)x_2 + x_1 = 0$

Exemplos de Teorias de 1a. Ordem

=1: $(\forall x_1)x_1 = x_1$

=2: $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1 = x_2 \to x_2 = x_1)$

=3: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \to x_1 = x_3)$

=4: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_2 = x_3 \to x_1 + x_2 = x_1 + x_3 \wedge x_2 + x_1 = x_3 + x_1)$

Um modelo para esta teoria, na qual a interpretação de “=” é a relação de identidade no universo, chama-se um *grupo*. O grupo diz-se *abeliano* se também satisfizer o axioma (G3) $(\forall x_1)(\forall x_2)x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

Propriedades das Teorias de 1a. Ordem

PROPOSIÇÃO Todo teorema de uma teoria de 1a. ordem K é válido em qualquer modelo de K.

Propriedades das Teorias de 1a. Ordem

PROPOSIÇÃO Todo teorema de uma teoria de 1a. ordem K é válido em qualquer modelo de K.

PROPOSIÇÃO Sejam K uma teoria de 1a. ordem e $\mathcal{A}$ uma quasi-tautologia de K. Então $\mathcal{A}$ é um teorema de K e pode ser demonstrada usando-se apenas os esquemas de axiomas (A1) a (A3) e (MP).

Propriedades das Teorias de 1a. Ordem

PROPOSIÇÃO Todo teorema de um cálculo de predicados de 1a. ordem é logicamente válido.

DEFINIÇÃO Uma teoria de 1a. ordem K diz-se *consistente* se, para qualquer fórmula A de K, se A e $\neg A$ não são ambos teoremas de K.

COROLÁRIO Todo cálculo de predicados de 1a. ordem é consistente.

Dependência de Fórmulas numa Dedução Formal

DEFINIÇÃO Sejam K uma teoria de 1a. ordem, $\mathcal{A}$ uma fórmula pertencente a um conjunto Γ de fórmulas de K, e $(A_1, \ldots, A_n)$ uma dedução em K a partir de Γ, com uma justificativa em cada passo da dedução. Diz-se que, nesta dedução, A_i *depende de* A, se uma das seguintes condições ocorrer:

1. A_i é A e a justificativa é "A_i pertence a Γ".
2. A_i é obtida por (MP) ou (Gen) de fórmulas anteriores da seqüência, com pelo menos uma das quais depende de A.

Exemplo

Tome $\Gamma = \{\mathcal{A}, (\forall x_1)\mathcal{A} \to \mathcal{B}\}$, e a seguinte dedução a partir de Γ:

(A1) $\mathcal{A}$ (hip.)

(A2) $(\forall x_1)\mathcal{A}$ (Gen, de A1)

(A3) $(\forall x_1)\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (hip.)

(A4) $\mathcal{B}$ (MP, de A2 e A3)

(A5) $(\forall x_1)\mathcal{B}$ (Gen, de A4)

A1 depende de $\mathcal{A}$, A2 depende de $\mathcal{A}$, A3 depende de $(\forall x_1)\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, A4 e A5 dependem de ambas.

Teorema da Dedução

PROPOSIÇÃO Sejam K uma teoria de 1a. ordem, Γ um conjunto de fórmulas, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fórmulas de K. Se, numa dedução mostrando que $\Gamma, \mathcal{A} \vdash_K \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ não depende de $\mathcal{A}$, então $\Gamma \vdash_K \mathcal{B}$.

TEOREMA Sejam K uma teoria de 1a. ordem, Γ um conjunto de fórmulas, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fórmulas de K. Se, numa dedução mostrando que $\Gamma, \mathcal{A} \vdash_K \mathcal{B}$ não se aplica (Gen) a uma fórmula que depende de $\mathcal{A}$ com variável quantificada livre em $\mathcal{A}$, então $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Teorema da Dedução

COROLÁRIO Sejam K uma teoria de 1a. ordem, Γ um conjunto de fórmulas, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fórmulas de K. Se, numa dedução mostrando que $\Gamma, \mathcal{A} \vdash_K \mathcal{B}$ não se aplica (Gen) a uma fórmula com variável quantificada livre em $\mathcal{A}$, então $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Teorema da Dedução

OBSERVAÇÃO: É possível mostrar que, no teorema da dedução (bem como na proposição que o precede), podemos tomar uma dedução de $\Gamma \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ (ou de $\Gamma \vdash_K \mathcal{B}$, na proposição) que satisfaz a seguinte propriedade: ocorre nesta dedução uma aplicação de (Gen) a uma fórmula que depende de uma fórmula $\mathcal{C}$ se, e somente se, na dedução original de $\Gamma, \mathcal{A} \vdash_K \mathcal{B}$ já ocorria uma tal aplicação, com a mesma variável quantificada. Esta observação é útil para aplicações do teorema da dedução em "cascata".

Exercícios

Seja K uma teoria de 1a. ordem. Mostre que:

1. $\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_2)(\forall x_1)\mathcal{A}$
2. $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \big((\forall x)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x)\mathcal{B}\big)$
3. $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \big((\exists x)\mathcal{A} \rightarrow (\exists x)\mathcal{B}\big)$
4. $\vdash (\forall x)(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \leftrightarrow \big((\forall x)\mathcal{A} \wedge (\forall x)\mathcal{B}\big)$
5. $\vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$
6. $\vdash \neg(\forall x)\mathcal{A} \rightarrow (\exists x)\neg\mathcal{A}$