MAT349 - Introdução à Lógica http://www.ime.usp.br/mat/349

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO [satisfatibilidade] Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$, $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis e A uma fórmula de $\mathcal{L}$. Define-se por indução no comprimento de A que *a avaliação $\overrightarrow{a}$ satisfaz A em M* (NOTAÇÃO: $M \models A[\overrightarrow{a}]$) por:

A Definição de Verdade de Tarski

1. se A é atômica, da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $R^M\big(t_1(\overrightarrow{a}), \ldots, t_n(\overrightarrow{a})\big)$.
2. se A é da forma $\neg B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se não se tem que $M \models B[\overrightarrow{a}]$;
3. se A é da forma $B \to C$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $M \models \neg B[\overrightarrow{a}]$ ou $M \models C[\overrightarrow{a}]$;
4. se A é da forma $(\forall x)B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a'}$ que coincide com $\overrightarrow{a}$ exceto (possivelmente) na variável x, tem-se $M \models B[\overrightarrow{a'}]$.

Exercícios

1. Mostre que, se duas avaliações $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ coincidem no conjunto das variáveis de um termo t, então $t(\overrightarrow{a}) = t(\overrightarrow{b})$.
2. Sejam A uma fórmula de$\mathcal{L}$, M uma interpretação, $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ duas avaliações que coincidem nas variáveis livres de A. Então $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\overrightarrow{b}]$.

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D. Denote por $A(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ cujas variáveis livres pertencem ao conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, e seja $(a_1, \ldots, a_n) \in D^n$. Diz-se que $M \models A[a_1, \ldots, a_n]$ se, para alguma avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$ tal que $\overrightarrow{a}(x_i) = a_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, tem-se $M \models A[\overrightarrow{a}]$.

Fórmulas Válidas numa Interpretação

DEFINIÇÃO Sejam M uma interpretação de uma linguagem de 1a. ordem $\mathcal{L}$ e A uma fórmula de $\mathcal{L}$. Diz-se que:

- A é *válida em* M (NOTAÇÃO: $M \models A$) se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$, tem-se $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- A é *satisfatível em* M se existir uma avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$, tal que $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- A é *contra-válida em* M se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$, não se tem $M \models A[\overrightarrow{a}]$.

Exercícios

Estudar a satisfatibilidade das seguintes fórmulas de L_{KO} no modelo “standard” dos números reais (onde x e y são variáveis):

1. $x > 0$
2. $x^2 > 0 \vee x = 0$
3. $x^2 < 0$
4. $(\forall x) x < y$
5. $(\exists x) x < y$
6. $(\forall x)(\exists y) x = y$
7. $(\exists y)(\forall x) x = y$

Relações Definidas por Fórmulas

DEFINIÇÃO Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D e $A(x)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ na qual figura uma única variável livre, x. O *conjunto verdade* ou a *relação 1-ária* definida por $A(x)$ na interpretação M é o subconjunto de D dado por $\{a \in D \mid M \models A[a]\}$.

Relações Definidas por Fórmulas

DEFINIÇÃO Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D e $A(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ na qual figuram as variáveis livres $x_1, \ldots, x_n$. A *relação n-ária* definida por $A(x_1, \ldots, x_n)$ na interpretação M é o subconjunto de D^n dado por $\{(a_1, \ldots, a_n) \in D^n \mid M \models A[a_1, \ldots, a_n]\}$.

Fórmulas Válidas (cont.)

DEFINIÇÃO Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem. Diz-se que:

- Uma interpretação M é um *modelo* para um conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas Γ se toda fórmula de Γ for válida em M.
- Uma fórmula A de $\mathcal{L}$ é *logicamente válida* se A for válida em toda interpretação de $\mathcal{L}$, e *contraditória* ou *contra-válida* se $\neg A$ for logicamente válida. NOTAÇÃO: $\models A$ para A logicamente válida.

Fórmulas Válidas (cont.)

- Uma fórmula A de $\mathcal{L}$ é *satisfatível* se existir uma interpretação M de $\mathcal{L}$ e uma avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$ tais que $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- Um conjunto Γ de fórmulas de $\mathcal{L}$ *implica logicamente* uma fórmula A se, para toda interpretação M e toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$ tais que $\overrightarrow{a}$ satisfaz em M toda fórmula de Γ, tem-se $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- Duas fórmulas A e B de $\mathcal{L}$ são *logicamente equivalentes* se cada uma delas implica logicamente a outra.

Propriedades das Noções de Satisfatibilidade e Validade

Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e M uma interpretação de $\mathcal{L}$. Tem-se:

1. (a) A é válida em M se, e somente se, $\neg A$ é contra-válida em M;
   (b) A é contra-válida em M se, e somente se, $\neg A$ é válida em M.
2. Nenhuma fórmula é válida e contra-válida em M.
3. Se $M \models A$ e $M \models A \to B$, então $M \models B$.
4. $A \to B$ é contra-válida em M se, e somente se, $M \models A$ e $M \models \neg B$.

Propriedades (cont.)

5. Sejam M uma interpretação com universo D e $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis. Tem-se:
   (a) $M \models A \wedge B[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ e $M \models B[\overrightarrow{a}]$;
   (b) $M \models A \vee B[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ ou $M \models B[\overrightarrow{a}]$;
   (c) $M \models A \leftrightarrow B[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $\overrightarrow{a}$ satisfaz simultaneamente A e B ou não satisfaz ambas em M.
   (d) $M \models (\exists x)A[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, existe $\overrightarrow{a'}$ que coincide com $\overrightarrow{a}$ exceto (possivelmente) em x tal que $M \models A[\overrightarrow{a'}]$.

Propriedades (cont.)

6. $M \models A$ se, e somente se, $M \models (\forall x)A$.
7. Toda *quasi-tautologia* (i.e. uma fórmula de $\mathcal{L}$ obtida a partir de uma tautologia do cálculo proposicional por substituições de fórmulas de $\mathcal{L}$ no lugar dos átomos) é válida em qualquer interpretação de $\mathcal{L}$.

Termo Livre para uma Variável

Notação. Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e $x_1, \ldots, x_n$ variáveis de $\mathcal{L}$. A notação $A(x_1, \ldots, x_n)$ será usada para denotar uma fórmula A de $\mathcal{L}$ na qual podem ocorrer livres as variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Esta notação é útil para efeito da seguinte:

Termo Livre para uma Variável

DEFINIÇÃO Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, $A(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$, e $t_1, \ldots, t_n$ termos de $\mathcal{L}$. Denotar-se-á por $A(t_1, \ldots, t_n)$ a fórmula obtida a partir de $A(x_1, \ldots, x_n)$ por substituição de todas as ocorrências **livres** de x_i por t_i, para $1 \leqslant i \leqslant n$.

Termo Livre para uma Variável

DEFINIÇÃO Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, $A(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$, e $t_1, \ldots, t_n$ termos de $\mathcal{L}$. Denotar-se-á por $A(t_1, \ldots, t_n)$ a fórmula obtida a partir de $A(x_1, \ldots, x_n)$ por substituição de todas as ocorrências **livres** de x_i por t_i, para $1 \leqslant i \leqslant n$.

PERGUNTA: Se $B(x_i)$ for uma fórmula de $\mathcal{L}$, qual a condição a ser colocada sobre um termo t de $\mathcal{L}$ para que a substituição das ocorrências livres de x_i em $B(x_i)$ por t não gere novas variáveis ligadas?

Termo Livre para uma Variável

DEFINIÇÃO Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, t um termo, x_i uma variável e $A(x_i)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$. Diz-se que *t é livre para x_i em $A(x_i)$* se, para toda variável y que ocorre em t, nenhuma ocorrência livre de x_i em $A(x_i)$ pertence ao escopo de $(\forall y)$.

Termo Livre para uma Variável

Decorre imediatamente da última definição que:

- x_i é livre para x_i em qualquer fórmula;
- se t é um termo no qual não ocorrem variáveis, ou se nenhuma variável de t ocorre quantificada em $A(x_i)$, então t é livre para x_i em $A(x_i)$;
- se todas as ocorrências de x_i em $A(x_i)$ são ligadas, então qualquer termo é livre para x_i em $A(x_i)$.

Exercícios

Em L_{KO}, sejam $t_1 = x_1$ e $t_2 = (x_1 + 1) \cdot x_2$. Decida se t_1 e t_2 são livres para cada uma das variáveis que figuram nas seguintes fórmulas:

1. $x_1 < x_2 \cdot x_3$
2. $(\forall x_1) x_1 < x_2 \cdot x_3$
3. $(\forall x_1)(\exists x_2) x_1 < x_2 \cdot x_3$

Mais Propriedades das Noções de Satisfatibilidade e Validade

Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem. Tem-se:

8. Se A é uma *sentença fechada* (i.e. uma fórmula sem variáveis livres), então, dada M interpretação de $\mathcal{L}$, ou $M \models A$ ou $M \models \neg A$.
9. Sejam $B(x_i)$ uma fórmula e t um termo livre para x_i. Então $\models (\forall x_i)B(x_i) \rightarrow B(t)$.
10. $\models (\forall x_i)(B \rightarrow C) \rightarrow \big(B \rightarrow (\forall x_i)C\big)$ se x_i não ocorre livre em B.

Exercícios

Mostre que, numa linguagem de 1a. ordem:

1. A implica logicamente B se, e somente se, $\models A \to B$.
2. A é logicamente equivalente a B se, e somente se, $\models A \leftrightarrow B$.
3. $\models B(t) \to (\exists x_i)B(x_i)$ se t for um termo livre para x_i.
4. $\models (\forall x_i)B \to (\exists x_i)B$.
5. $\models (\forall x_i)(\forall x_j)B \leftrightarrow (\forall x_j)(\forall x_i)B$.
6. $\models (\exists x_i)(\exists x_j)B \leftrightarrow (\exists x_j)(\exists x_i)B$.
7. $\models (\forall x_i)(B \to C) \to \big((\forall x_i)B \to (\forall x_i)C\big)$.