MAT349 - Introdução à Lógica
http://www.ime.usp.br/mat/349

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Linguagens de 1a. Ordem

Uma *linguagem de 1a. ordem* $\mathcal{L}$ consiste dos seguintes símbolos:

1. Conectivos proposicionais $\rightarrow, \neg$ e o quantificador universal $\forall$.
2. Símbolos de Pontuação: $(),$
3. Um conjunto enumerável de símbolos, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, chamados *variáveis*.

Linguagens de 1a. Ordem

4. Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de *símbolos funcionais* de $\mathcal{L}$: $\{f_k^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$
5. Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de *constantes individuais* de $\mathcal{L}$: $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
6. Um conjunto enumerável, não-vazio, de *símbolos predicativos* de $\mathcal{L}$: $\{P_k^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

Termos

Os *termos* de uma linguagem de 1a. ordem $\mathcal{L}$ são definidos indutivamente por:

T1 variáveis e constantes individuais de $\mathcal{L}$ são termos;

T2 se f_k^n é um símbolo funcional de $\mathcal{L}$ e $t_1, \ldots, t_n$ são termos de $\mathcal{L}$, então $f_k^n(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo de $\mathcal{L}$.

Fórmulas

As *fórmulas* de uma linguagem de 1a. ordem $\mathcal{L}$ são definidas indutivamente por:

F1 se P_k^n é um símbolo predicativo de $\mathcal{L}$ e $t_1, \ldots, t_n$ são termos de $\mathcal{L}$, então $P_k^n(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}$ (FÓRMULA ATÔMICA)

F2 se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são fórmulas e x é uma variável de $\mathcal{L}$, as seguintes expressões são fórmulas de $\mathcal{L}$: $\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\big((\forall\, x)\, \mathcal{A}\big)$

Abreviações

1. $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ são definidas como no Cálculo Proposicional;
2. $\big((\exists x)\mathcal{B}\big)$ é uma abreviação para $\neg\big((\forall x)(\neg\mathcal{B})\big)$.

Interpretações de uma Linguagem de 1a. Ordem

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem. Uma *interpretação* M de $\mathcal{L}$ consiste de:

1. Um conjunto não-vazio D, chamado *domínio* ou *universo* da interpretação.
2. Para cada símbolo predicativo A_i^n de $\mathcal{L}$, uma relação n-ária $(A_i^n)^M$ em D.

Interpretações de uma Linguagem de 1a. Ordem

3. Para cada símbolo funcional f_i^n de $\mathcal{L}$, uma operação n-ária $(f_i^n)^M$ em D, i.e. uma aplicação $(f_i^n)^M : D^n \to D$.
4. Para cada constante individual a_i de $\mathcal{L}$, um elemento $(a_i)^M$ de D.

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e M uma interpretação de $\mathcal{L}$. Uma *avaliação de variáveis* é uma aplicação do conjunto das variáveis de $\mathcal{L}$ no conjunto universo de M.

NOTAÇÃO: as avaliações serão denotadas por $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, etc.

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO Sejam t um termo e $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis de $\mathcal{L}$. Define-se $t(\overrightarrow{a})$ (leia-se: “valor de t em $\overrightarrow{a}$”) indutivamente por:

1. se t é a variável x_n, $t(\overrightarrow{a}) \doteq \overrightarrow{a}(x_n)$;
2. se t é a constante individual c, $t(\overrightarrow{a}) \doteq c^M$;
3. se t é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, $t(\overrightarrow{a}) \doteq f^M\big(t_1(\overrightarrow{a}), \ldots, t_n(\overrightarrow{a})\big)$.

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO [satisfatibilidade] Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$, $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis e A uma fórmula de $\mathcal{L}$. Define-se por indução no comprimento de A que *a avaliação $\overrightarrow{a}$ satisfaz A em M* (NOTAÇÃO: $M \models A[\overrightarrow{a}]$) por:

A Definição de Verdade de Tarski

1. se A é atômica, da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $R^M\big(t_1(\overrightarrow{a}), \ldots, t_n(\overrightarrow{a})\big)$.
2. se A é da forma $\neg B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se não se tem que $M \models B[\overrightarrow{a}]$;
3. se A é da forma $B \to C$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $M \models \neg B[\overrightarrow{a}]$ ou $M \models C[\overrightarrow{a}]$;
4. se A é da forma $(\forall x)B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a'}$ que coincide com $\overrightarrow{a}$ exceto (possivelmente) na variável x, tem-se $M \models B[\overrightarrow{a'}]$.

Exercícios

1. Mostre que, se duas avaliações $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ coincidem no conjunto das variáveis de um termo t, então $t(\overrightarrow{a}) = t(\overrightarrow{b})$.
2. Sejam A uma fórmula de$\mathcal{L}$, M uma interpretação, $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ duas avaliações que coincidem nas variáveis livres de A. Então $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\overrightarrow{b}]$.

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D. Denote por $A(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ cujas variáveis livres pertencem ao conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, e seja $(a_1, \ldots, a_n) \in D^n$. Diz-se que $M \models A[a_1, \ldots, a_n]$ se, para alguma avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$ tal que $\overrightarrow{a}(x_i) = a_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, tem-se $M \models A[\overrightarrow{a}]$.

Fórmulas Válidas numa Interpretação

DEFINIÇÃO Sejam M uma interpretação de uma linguagem de 1a. ordem $\mathcal{L}$ e A uma fórmula de $\mathcal{L}$. Diz-se que:

- A é *válida em* M (NOTAÇÃO: $M \models A$) se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$, tem-se $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- A é *satisfatível em M* se existir uma avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$, tal que $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- A é *contra-válida em* M se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$, não se tem $M \models A[\overrightarrow{a}]$.

Exercícios

Estudar a satisfatibilidade das seguintes fórmulas de L_{KO} na interpretação “standard”:

1. $x > 0$
2. $x^2 > 0 \vee x = 0$
3. $x^2 < 0$
4. $(\forall x)x < y$
5. $(\exists x)x < y$
6. $(\forall x)(\exists y)x = y$
7. $(\exists y)(\forall x)x = y$

Relações Definidas por Fórmulas

DEFINIÇÃO Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D e $A(x)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ na qual figura uma única variável livre, x. O *conjunto verdade* ou a *relação 1-ária* definida por $A(x)$ na interpretação M é o subconjunto de D dado por $\{a \in D \mid M \models A[a]\}$.

Relações Definidas por Fórmulas

DEFINIÇÃO Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$ com universo D e $A(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ na qual figuram as variáveis livres $x_1, \ldots, x_n$. A *relação n-ária* definida por $A(x_1, \ldots, x_n)$ na interpretação M é o subconjunto de D^n dado por $\{(a_1, \ldots, a_n) \in D^n \mid M \models A[a_1, \ldots, a_n]\}$.