MAT349 - Introdução à Lógica http://www.ime.usp.br/mat/349

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Fórmulas Válidas numa Interpretação

DEFINIÇÃO Sejam M uma interpretação de uma linguagem de 1a. ordem $\mathcal{L}$ e A uma fórmula de $\mathcal{L}$. Diz-se que:

- A é *válida em* M (NOTAÇÃO: $M \models A$) se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$, tem-se $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- A é *contra-válida em* M se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a}$, não se tem $M \models A[\overrightarrow{a}]$.
- M é um *modelo* para um conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas Γ se toda fórmula de Γ for válida em M.

Propriedades das Noções de Satisfatibilidade e Validade

1. (a) A é válida em M se, e somente se, $\neg A$ é contra-válida em M;
   (b) A é contra-válida em M se, e somente se, $\neg A$ é válida em M.
2. Nenhuma fórmula é válida e contra-válida em M.
3. Se $M \models A$ e $M \models A \to B$, então $M \models B$.
4. $A \to B$ é contra-válida em M se, e somente se, $M \models A$ e $M \models \neg B$.

Propriedades (cont.)

5. Sejam M uma interpretação com universo D e $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis. Tem-se:
   (a) $M \models A \wedge B[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ e $M \models B[\overrightarrow{a}]$;
   (b) $M \models A \vee B[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ ou $M \models B[\overrightarrow{a}]$;
   (c) $M \models A \leftrightarrow B[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $\overrightarrow{a}$ satisfaz simultaneamente A e B ou não satisfaz ambas em M.
   (d) $M \models (\exists x)A[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, existe $\overrightarrow{a'}$ que coincide com $\overrightarrow{a}$ exceto (possivelmente) em x tal que $M \models A[\overrightarrow{a'}]$.

Propriedades (cont.)

6. $M \models A$ se, e somente se, $M \models (\forall x)A$.
7. Toda *quasi-tautologia* (i.e. uma fórmula de $\mathcal{L}$ obtida a partir de uma tautologia do cálculo proposicional por substituições de fórmulas de $\mathcal{L}$ no lugar dos átomos) é válida em qualquer interpretação de $\mathcal{L}$.