MAT349 - Introdução à Lógica
http://www.ime.usp.br/mat/349

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Interpretações de uma Linguagem de 1a. Ordem

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem. Uma *interpretação* M de $\mathcal{L}$ consiste de:

Interpretações de uma Linguagem de 1a. Ordem

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem. Uma *interpretação* M de $\mathcal{L}$ consiste de:

1. Um conjunto não-vazio D, chamado *domínio* ou *universo* da interpretação.

Interpretações de uma Linguagem de 1a. Ordem

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem. Uma *interpretação* M de $\mathcal{L}$ consiste de:

1. Um conjunto não-vazio D, chamado *domínio* ou *universo* da interpretação.
2. Para cada símbolo predicativo A_i^n de $\mathcal{L}$, uma relação n-ária $(A_i^n)^M$ em D.

Interpretações de uma Linguagem de 1a. Ordem

3. Para cada símbolo funcional f_i^n de $\mathcal{L}$, uma operação n-ária $(f_i^n)^M$ em D, i.e. uma aplicação $(f_i^n)^M : D^n \to D$.

Interpretações de uma Linguagem de 1a. Ordem

3. Para cada símbolo funcional f_i^n de $\mathcal{L}$, uma operação n-ária $(f_i^n)^M$ em D, i.e. uma aplicação $(f_i^n)^M : D^n \rightarrow D$.
4. Para cada constante individual a_i de $\mathcal{L}$, um elemento $(a_i)^M$ de D.

Exemplos de Interpretações

1. Em L_N, tomamos a interpretação $\mathcal{N}$ com domínio $\mathbb{N}$ e: $(+)^{\mathcal{N}}$, $(\cdot)^{\mathcal{N}}$, $(<)^{\mathcal{N}}$ a soma, multiplicação e relação de ordem usuais de $\mathbb{N}$; $0^{\mathcal{N}} \doteq 0 \in \mathbb{N}$, $1^{\mathcal{N}} \doteq 1 \in \mathbb{N}$ e $S^{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $n \mapsto n + 1$.
2. Em L_G, a interpretação com domínio $\mathbb{N}$ e $(\cdot)^{\mathcal{N}}$ dada por $(a, b) \mapsto \sup\{a, b\}$.

Comprimento de uma Fórmula

DEFINIÇÃO O comprimento de uma fórmula A de $\mathcal{L}$, $\mathrm{cp}\,(A)$, define-se indutivamente por:

Comprimento de uma Fórmula

DEFINIÇÃO O comprimento de uma fórmula A de $\mathcal{L}$, $\operatorname{cp}(A)$, define-se indutivamente por:

1. se A é atômica, $\operatorname{cp}(A) \doteq 1$;

Comprimento de uma Fórmula

DEFINIÇÃO O comprimento de uma fórmula A de $\mathcal{L}$, $\mathrm{cp}\,(A)$, define-se indutivamente por:

1. se A é atômica, $\mathrm{cp}\,(A) \doteq 1$;
2. se A é da forma $B \rightarrow C$,
   $\mathrm{cp}\,(A) \doteq \mathrm{cp}\,(B) + \mathrm{cp}\,(C)$;

Comprimento de uma Fórmula

DEFINIÇÃO O comprimento de uma fórmula A de $\mathcal{L}$, $\mathrm{cp}\,(A)$, define-se indutivamente por:

1. se A é atômica, $\mathrm{cp}\,(A) \doteq 1$;
2. se A é da forma $B \longrightarrow C$,
   $\mathrm{cp}\,(A) \doteq \mathrm{cp}\,(B) + \mathrm{cp}\,(C)$;
3. se A é da forma $\neg B$ ou $(\forall x)B$,
   $\mathrm{cp}\,(A) \doteq \mathrm{cp}\,(B) + 1$.

Variáveis Livres e Ligadas

DEFINIÇÃO Uma ocorrência de uma variável x numa fórmula A diz-se *ligada* se (i) for a ocorrência de x em “$(\forall x)$” ou (ii) ocorrer no escopo de “$(\forall x)$”. Caso não seja ligada, a ocorrência diz-se *livre*.

Variáveis Livres e Ligadas

DEFINIÇÃO Uma ocorrência de uma variável x numa fórmula A diz-se *ligada* se (i) for a ocorrência de x em "$(\forall x)$" ou (ii) ocorrer no escopo de "$(\forall x)$". Caso não seja ligada, a ocorrência diz-se *livre*.

EXEMPLO:

1. $A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1)$

Variáveis Livres e Ligadas

DEFINIÇÃO Uma ocorrência de uma variável x numa fórmula A diz-se *ligada* se (i) for a ocorrência de x em "$(\forall x)$" ou (ii) ocorrer no escopo de "$(\forall x)$". Caso não seja ligada, a ocorrência diz-se *livre*.

EXEMPLO:

1. $A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1)$
2. $(\forall x_1)\big(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1)\big)$

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem e M uma interpretação de $\mathcal{L}$. Uma *avaliação de variáveis* é uma aplicação do conjunto das variáveis de $\mathcal{L}$ no conjunto universo de M.

NOTAÇÃO: as avaliações serão denotadas por $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, etc.

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO Sejam t um termo e $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis de $\mathcal{L}$. Define-se $t(\overrightarrow{a})$ (leia-se: “valor de t em $\overrightarrow{a}$”) indutivamente por:

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO Sejam t um termo e $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis de $\mathcal{L}$. Define-se $t(\overrightarrow{a})$ (leia-se: "valor de t em $\overrightarrow{a}$") indutivamente por:

1. se t é a variável x_n, $t(\overrightarrow{a}) \doteq \overrightarrow{a}(x_n)$;

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO Sejam t um termo e $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis de $\mathcal{L}$. Define-se $t(\overrightarrow{a})$ (leia-se: "valor de t em $\overrightarrow{a}$") indutivamente por:

1. se t é a variável x_n, $t(\overrightarrow{a}) \doteq \overrightarrow{a}(x_n)$;
2. se t é a constante individual c, $t(\overrightarrow{a}) \doteq c^M$;

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO Sejam t um termo e $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis de $\mathcal{L}$. Define-se $t(\overrightarrow{a})$ (leia-se: "valor de t em $\overrightarrow{a}$") indutivamente por:

1. se t é a variável x_n, $t(\overrightarrow{a}) \doteq \overrightarrow{a}(x_n)$;
2. se t é a constante individual c, $t(\overrightarrow{a}) \doteq c^M$;
3. se t é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$,
   $t(\overrightarrow{a}) \doteq f^M\big(t_1(\overrightarrow{a}), \ldots, t_n(\overrightarrow{a})\big)$.

A Definição de Verdade de Tarski

DEFINIÇÃO [satisfatibilidade] Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1a. ordem, M uma interpretação de $\mathcal{L}$, $\overrightarrow{a}$ uma avaliação de variáveis e A uma fórmula de $\mathcal{L}$. Define-se por indução no comprimento de A que *a avaliação $\overrightarrow{a}$ satisfaz A em M* (NOTAÇÃO: $M \models A[\overrightarrow{a}]$) por:

A Definição de Verdade de Tarski

1. se A é atômica, da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$,
   $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $R^M\big(t_1(\overrightarrow{a}), \ldots, t_n(\overrightarrow{a})\big)$.

A Definição de Verdade de Tarski

1. se A é atômica, da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $R^M\big(t_1(\overrightarrow{a}), \ldots, t_n(\overrightarrow{a})\big)$.
2. se A é da forma $\neg B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se não se tem que $M \models B[\overrightarrow{a}]$;

A Definição de Verdade de Tarski

1. se A é atômica, da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $R^M\big(t_1(\overrightarrow{a}), \ldots, t_n(\overrightarrow{a})\big)$.
2. se A é da forma $\neg B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se não se tem que $M \models B[\overrightarrow{a}]$;
3. se A é da forma $B \to C$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $M \models \neg B[\overrightarrow{a}]$ ou $M \models C[\overrightarrow{a}]$;

A Definição de Verdade de Tarski

1. se A é atômica, da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $R^M\big(t_1(\overrightarrow{a}), \ldots, t_n(\overrightarrow{a})\big)$.
2. se A é da forma $\neg B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se não se tem que $M \models B[\overrightarrow{a}]$;
3. se A é da forma $B \to C$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se $M \models \neg B[\overrightarrow{a}]$ ou $M \models C[\overrightarrow{a}]$;
4. se A é da forma $(\forall x)B$, $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se, para toda avaliação de variáveis $\overrightarrow{a'}$ que coincide com $\overrightarrow{a}$ exceto (possivelmente) na variável x, tem-se $M \models B[\overrightarrow{a'}]$.

Exercícios

1. Mostre que, se duas avaliações $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ coincidem no conjunto das variáveis de um termo t, então $t(\overrightarrow{a}) = t(\overrightarrow{b})$.
2. Sejam A uma fórmula de$\mathcal{L}$, M uma interpretação, $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ duas avaliações que coincidem nas variáveis livres de A. Então $M \models A[\overrightarrow{a}]$ se, e somente se, $M \models A[\overrightarrow{b}]$.