Álgebra Linear II - Poli - Prova 2 - Gabarito Q9- Q16

2017

Q9 Alternativa correta: (a).

(I) é falsa: a base precisa ser ortonormal (todos os vetores da base ortogonais entre si **e de norma** 1) e não só ortogonal.

(II) é verdadeira: teremos que a norma é a norma usual em $\mathbb{R}^n$ e portanto que o produto interno é o usual em $\mathbb{R}^n$ (o produto interno é determinado pela norma porque

$$4 < u, v >= \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2.)$$

Sendo o produto interno o produto usual, a base canônica será ortonormal.

(III) é falsa: a desigualdade é a desigualdade de Cauchy-Schwarz, que sempre vale para produto interno, independente de a base canônica de $\mathbb{R}^n$ ser ortonormal ou não para $< ., . >$.

Q10 Alternativa correta: (a)

(I) é falsa: se a multiplicidade algébrica é 3, a geométrica pode ser 1,2 ou 3. Se for 1 ou 2, teremos no máximo 2 vetores v, w LI em V(4), i.e., tais que $T(v) = 4v$ e $T(w) = 4w$.

(II) é falsa: a soma das multiplicidades algébricas será igual a 7, mas como as multiplicidades geométricas podem ser menores, a soma das multiplicidades geométricas pode ser menor do que 7.

(III) é verdadeira. A multiplicidade algébrica n de 20 satisfaz $n \geq 3$. Do outro lado, a soma das multiplicidades algébricas é menor ou igual a 7, e a multiplicidade algébrica de 40 é pelo menos 1. Logo $n + 3 + 1 \leq 7$. Segue que $n = 3$. Como 20 e 30 têm multiplicidade algébrica igual a 3, a multiplicidade algébrica de 40 é no máximo $7 - 3 - 3 = 1$, logo vale 1. Nesse caso a geométrica também vale 1.

Q11 Alternativa correta: (a)

S é gerado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo uma equação de $S^\perp$ é

$$\begin{cases} a + 2b + 5c - d = 0 \\ a - 3c - 3d = 0 \\ -a - b - c + 2d = 0 \end{cases} \text{Escalonando} \begin{cases} a + 2b + 5c - d = 0 \\ 2b + 8c + 2d = 0 \\ b + 4c + d = 0 \end{cases}$$

Como a terceira e a segunda linha são proporcionais:

$$\begin{cases} a = -2b - 5c + d \\ b = -4c - d \end{cases} \text{ou seja} \begin{cases} a = 3c + 3d \\ b = -4c - d \end{cases}$$

Isso significa $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R}$

Q12 Alternativa correta: (a)

(I) é verdadeira (por teorema).

(II) também: como $S_1 \cap S_2 \subset S_1$, temos $S_1^\perp \subset (S_1 \cap S_2)^\perp$. Vale para $S_2^\perp$ também, e para a soma porque $(S_1 \cap S_2)^\perp$ é espaço vetorial.

(III) verdadeira, porque v ortogonal a todos os w_i implica que v é ortogonal a todas as combinações lineares dos w_i, ou seja, a todos os vetores de S_1.

Q13 Alternativa correta: (a)

(I) é falsa: 3 pontos não suficientes. O polinômio $p = t(t-1)(t+1)$ satisfaz que $< p, p >= 0$. Se $< ., . >$ fosse produto interno isso só seria possível para $p = 0$.

(II) verdadeira por teorema (é até produto interno em $P(\mathbb{R})$)

(III) falsa porque se $p = -t$, então $< p, p >= -1$. Se fosse produto interno esse número deveria ser ≥ 0.

Q14 Alternativa correta: (a)

(a) é falsa porque Pitágoras implica que $\|v + w\| = \sqrt{2}\|v\|$.

(b) verdadeira pois teremos $< v - w, v >= 0$ logo $\|v\|^2 =< w, v >$. Além disso, ou $v = 0$, ou $v \neq 0$ e $w = \lambda v$, em qual caso

$$\|v\|^2 =< \lambda v, v >= \lambda \|v\|^2,$$

e $\lambda = 1$.

(c) teorema de aula.

(d) teremos $0 =< v + w, v - w >= \|v\|^2 - \|w\|^2$, logo $\|v\| = \|w\|$.

(e) verdadeiro: qualquer família ortogonal de vetores não nulos é LI.

Q15 Alternativa correta: (a)

(I) é verdadeira por teorema.

(II) é verdadeira porque os autovalores são as raizes do polinômio característico.

(II) é falsa, por exemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ têm como autovalores 1 de multiplicidade algébrica 2, porém não são semelhantes (pois $PAP^{-1} = A \neq B$ para todo P inversível).

Q16 Alternativa correta: (a)

Como $A = [T]_{can}$ e $D = [T]_B$ se B for qualquer base de autovetores associados a $0, 2, 1$ respetivamente, teremos

$$A = PDP^{-1}$$

quando $P = M_{can,B}$ ou seja, quando as colunas de P forem as coordenadas em can de autovetores associados aos valores $0, 2, 1$ respetivamente. Pelos dados, $(1, 0, -1) \in V(0)$ (e $(-1, 0, 1)$ também), $(1, 0, 1) \in V(2)$ (e $(-1, 0, -1)$ também), e $(0, 1, 1) \in V(1)$. Logo P_1 e P_2 são matrizes P tais que $A = PDP^{-1}$.