+1/1/60+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- D A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 2 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a = -1$.
- C $a \neq 0$.
- D $a \neq 1$.
- E $a = 0$.

Teste 3 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 4 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [B] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [C] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [D] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- [E] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

Teste 5 Assinale a alternativa correta:

A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

E existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

A $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

B $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

C (x, y, z).

D $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

E $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

Teste 8 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- [B] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- [E] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- [A] $(3,3,3)$.
- [B] $(1,1,1)$.
- [C] $(6,6,6)$.
- [D] $(3,6,9)$.
- [E] $(4,4,4)$.

Teste 10 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 11 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t)$.
- E $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 12 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A $1, 2$ e -3.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- D $1, 4$ e 5.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{1}{5}$.
- B $a = 2$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = \frac{4}{5}$.
- E $a = 1$.

Teste 14 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 4$.
- B $11t^2 + s^2 = 11$.
- C $11t^2 + s^2 = 3$.
- D $11t^2 + s^2 = 7$.
- E $11t^2 + s^2 = 1$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 16 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 1.
- C 6.
- D 13.
- E 11.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Assinale a alternativa correta:

A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

D existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^{\text{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 3 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 3.$
- B $11t^2 + s^2 = 4.$
- C $11t^2 + s^2 = 1.$
- D $11t^2 + s^2 = 7.$
- E $11t^2 + s^2 = 11.$

Teste 4 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- B $a \neq 1$ e $b = 2$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- E $a \neq 0$ e $b = 1$.

Teste 5 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x+3y+2z, -2y-2z, x+2y+3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A $1, 4$ e 5.
- B $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- C $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- D $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- E $1, 2$ e -3.

Teste 6 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 7 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- B $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- C $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- D $\operatorname{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\operatorname{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(3,6,9)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(3,3,3)$.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 13.
- C 3.
- D 11.
- E 6.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 11 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

A $a = -1$.
B $a \neq 0$.
C $a = 0$.
D $a \neq 1$.
E $a = 1$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

A $a \neq -1$.
B $a = \frac{4}{5}$.
C $a = \frac{1}{5}$.
D $a = 2$.
E $a = 1$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- [A] $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- [B] $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- [C] $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- [D] (x, y, z).
- [E] $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 14 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [B] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [C] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [D] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [E] A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- B $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- D $a \neq 1$ e $b = 2$.
- E $a \neq 0$ e $b = 1$.

Teste 2 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 3$.
- B $11t^2 + s^2 = 7$.
- C $11t^2 + s^2 = 11$.
- D $11t^2 + s^2 = 4$.
- E $11t^2 + s^2 = 1$.

Teste 3 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^{2t}\cos(3t)$.
- [B] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [C] $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- [D] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = 1$.
- [B] $a = 2$.
- [C] $a = \frac{4}{5}$.
- [D] $a \neq -1$.
- [E] $a = \frac{1}{5}$.

Teste 5 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a = 0$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a = 1$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a \neq 0$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a = -1$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a \neq 1$.

Teste 6 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- $\boxed{\text{A}}$ $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{B}}$ $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{C}}$ $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{D}}$ $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{E}}$ $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 7 Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{A}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- $\boxed{B}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- $\boxed{C}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- $\boxed{D}$ existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- $\boxed{E}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 8 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{A}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{B}$ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- $\boxed{C}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{D}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{E}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 9 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- D A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- E A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

Teste 10 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- C $1, 2$ e -3.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- E $1, 4$ e 5.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 12 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- [A] $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- [B] $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- [C] (x, y, z).
- [D] $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- [E] $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1, 2, 3)$ é igual a:

- [A] $(3, 3, 3)$.
- [B] $(3, 6, 9)$.
- [C] $(6, 6, 6)$.
- [D] $(4, 4, 4)$.
- [E] $(1, 1, 1)$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 16 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 6.
- B 1.
- C 13.
- D 11.
- E 3.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 2 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- B A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- C não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- [A] $(3,6,9)$.
- [B] $(6,6,6)$.
- [C] $(3,3,3)$.
- [D] $(4,4,4)$.
- [E] $(1,1,1)$.

Teste 4 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 6 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- C (x, y, z).
- D $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- E $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$ e que $T(0, 1, 1 + i) = (0, 1, 1 + i)$. Se $T(1, 2, 3) = (a, b, c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 3.
- B 6.
- C 13.
- D 11.
- E 1.

Teste 9 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t)$.

Teste 10 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 3.$
- B $11t^2 + s^2 = 7.$
- C $11t^2 + s^2 = 1.$
- D $11t^2 + s^2 = 4.$
- E $11t^2 + s^2 = 11.$

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 12 Assinale a alternativa correta:

A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

D existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.

E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 13 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

A $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

B $a \neq 0$ e $b = 1$.

C $a \neq 1$ e $b = 2$.

D $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

E $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

A 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

B $1, 2$ e -3.

C 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

D 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

E $1, 4$ e 5.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

A $a \neq -1$.

B $a = \frac{4}{5}$.

C $a = 2$.

D $a = 1$.

E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 16 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a = 1$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a = 0$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a \neq 0$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a = -1$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a \neq 1$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

A $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

B $a \neq 1$ e $b = 2$.

C $a \neq 0$ e $b = 1$.

D $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

E $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 3 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 1.
- C 6.
- D 11.
- E 13.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a \neq -1$.
- [B] $a = \frac{1}{5}$.
- [C] $a = 1$.
- [D] $a = \frac{4}{5}$.
- [E] $a = 2$.

Teste 6 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a = 1$.
- [B] $a = 0$.
- [C] $a \neq 0$.
- [D] $a = -1$.
- [E] $a \neq 1$.

Teste 7 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x,y,z) no subespaço $[(1,1,2),(2,0,2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- C $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- D (x,y,z).
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 9 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- [B] $2e^t \cos(3t) + 2e^t \operatorname{sen}(3t)$.
- [C] $2e^{2t} \cos(3t)$.
- [D] $2e^{2t} \cos(3t) + e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t} \cos(3t) - e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.

Teste 10 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, 2$ e -3.
- [B] $1, 4$ e 5.
- [C] $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [D] $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [E] $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 11 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- $\boxed{\text{A}}$ $11t^2 + s^2 = 7$.
- $\boxed{\text{B}}$ $11t^2 + s^2 = 1$.
- $\boxed{\text{C}}$ $11t^2 + s^2 = 11$.
- $\boxed{\text{D}}$ $11t^2 + s^2 = 4$.
- $\boxed{\text{E}}$ $11t^2 + s^2 = 3$.

Teste 12 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- $\boxed{\text{D}}$ $\text{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- $\boxed{\text{E}}$ $\text{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t, t^3]$.

Teste 13 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- B B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- E A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 14 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,6,9)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(6,6,6)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(1,1,1)$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+6/1/60+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [B] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- [C] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [D] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [E] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- $\boxed{\text{A}}$ $11t^2 + s^2 = 3.$
- $\boxed{\text{B}}$ $11t^2 + s^2 = 1.$
- $\boxed{\text{C}}$ $11t^2 + s^2 = 4.$
- $\boxed{\text{D}}$ $11t^2 + s^2 = 7.$
- $\boxed{\text{E}}$ $11t^2 + s^2 = 11.$

Teste 4 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t).$
- $\boxed{\text{B}}$ $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t).$
- $\boxed{\text{C}}$ $2e^{2t}\cos(3t).$
- $\boxed{\text{D}}$ $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t).$
- $\boxed{\text{E}}$ $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t).$

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a \neq -1$.
- C $a = \frac{1}{5}$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{4}{5}$.

Teste 6 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a \neq 1$.
- B $a = -1$.
- C $a = 1$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = 0$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 8 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,3,3)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(3,6,9)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(1,1,1)$.

Teste 10 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- D $1, 2$ e -3.
- E $1, 4$ e 5.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A (x, y, z).
- B $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- E $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

Teste 12 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2, 1 + t + t^2 + t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1 - t, 1 - t^2, 1 - t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + t + t^2, t - t^3]$.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] 3.
- [B] 13.
- [C] 6.
- [D] 11.
- [E] 1.

Teste 14 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [B] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [C] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [D] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [E] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A,B,C\}$.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- $\boxed{\text{D}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- $\boxed{\text{B}}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- $\boxed{\text{C}}$ existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- $\boxed{\text{D}}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- $\boxed{\text{E}}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

+6/11/50+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- C não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- D A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 2 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 3 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 4 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a \neq 1$.
- B $a = 0$.
- C $a = 1$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = -1$.

Teste 5 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 11.$
- B $11t^2 + s^2 = 3.$
- C $11t^2 + s^2 = 4.$
- D $11t^2 + s^2 = 1.$
- E $11t^2 + s^2 = 7.$

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z).$
- B $(x, y, z).$
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z).$
- D $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z).$
- E $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z).$

Teste 7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [B] $1, 2$ e -3.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [D] $1, 4$ e 5.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a = \frac{4}{5}$.
- C $a = \frac{1}{5}$.
- D $a = 1$.
- E $a \neq -1$.

Teste 11 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- B $a \neq 0$ e $b = 1$.
- C $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- E $a \neq 1$ e $b = 2$.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(6,6,6)$.
- B $(3,3,3)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(3,6,9)$.
- E $(1,1,1)$.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 6.
- C 13.
- D 1.
- E 11.

Teste 15 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t,t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t,t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t,t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t,t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t,t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 16 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

+8/2/35+

Teste 1 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

A $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

B $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

C $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

D (x, y, z).

E $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

Teste 3 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a = -1$.
- [B] $a = 0$.
- [C] $a \neq 0$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a \neq 1$.

Teste 4 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [B] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- [C] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [D] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [E] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(6,6,6)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(3,6,9)$.

Teste 6 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- C não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- D B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 7 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t)$.
- C $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 8 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 11$.
- B $11t^2 + s^2 = 7$.
- C $11t^2 + s^2 = 1$.
- D $11t^2 + s^2 = 3$.
- E $11t^2 + s^2 = 4$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 10 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- D existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.
- E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = \frac{4}{5}$.
- [B] $a = 1$.
- [C] $a \neq -1$.
- [D] $a = 2$.
- [E] $a = \frac{1}{5}$.

Teste 12 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [B] $1, 4$ e 5.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [D] $1, 2$ e -3.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^\perp$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 6.
- B 13.
- C 1.
- D 3.
- E 11.

Teste 16 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t - t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,3,3)$.
- B $(6,6,6)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(3,6,9)$.
- E $(1,1,1)$.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- C (x, y, z).
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 5 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- [B] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- [E] $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

Teste 6 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 7.$
- [B] $11t^2 + s^2 = 3.$
- [C] $11t^2 + s^2 = 1.$
- [D] $11t^2 + s^2 = 4.$
- [E] $11t^2 + s^2 = 11.$

Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 6.
- B 13.
- C 1.
- D 3.
- E 11.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t)$.
- C $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 11 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, 2$ e -3.
- [B] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [D] $1, 4$ e 5.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 12 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [B] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- [C] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [D] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [E] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 13 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- B A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- C A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- D B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- E não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a = 1$.
- C $a = \frac{4}{5}$.
- D $a \neq -1$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 15 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 16 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a = -1$.
- C $a \neq 1$.
- D $a = 0$.
- E $a \neq 0$.

+9/11/14+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 13.
- B 6.
- C 3.
- D 11.
- E 1.

Teste 2 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 4$.
- B $11t^2 + s^2 = 11$.
- C $11t^2 + s^2 = 7$.
- D $11t^2 + s^2 = 1$.
- E $11t^2 + s^2 = 3$.

Teste 3 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- D existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = \frac{4}{5}$.
- [B] $a = 1$.
- [C] $a = 2$.
- [D] $a = \frac{1}{5}$.
- [E] $a \neq -1$.

Teste 6 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

B $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

C $\operatorname{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [t, t^3]$.

D $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

E $\operatorname{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

A (x, y, z).

B $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

D $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

E $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 8 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [B] 1, 2 e -3.
- [C] 1, 4 e 5.
- [D] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 11 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 12 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- B $a \neq 0$ e $b = 1$.
- C $a \neq 1$ e $b = 2$.
- D $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- E $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

Teste 13 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(6,6,6)$.
- B $(1,1,1)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(3,6,9)$.

Teste 15 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 16 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a \neq 1$.
- B $a = 0$.
- C $a = -1$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = 1$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B apenas a afirmação (II) é verdadeira.

C todas as afirmações são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

A $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

B $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

C $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

D (x, y, z).

E $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

Teste 4 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

A 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

B $1, 4$ e 5.

C 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

D $1, 2$ e -3.

E 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 5 Assinale a alternativa correta:

A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

D existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

E existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,6,9)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(1,1,1)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(3,3,3)$.

Teste 7 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 8 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- B $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- C $a \neq 1$ e $b = 2$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- E $a \neq 0$ e $b = 1$.

Teste 9 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 10 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 7.$
- B $11t^2 + s^2 = 11.$
- C $11t^2 + s^2 = 4.$
- D $11t^2 + s^2 = 3.$
- E $11t^2 + s^2 = 1.$

Teste 11 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{E}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 12 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \neq 0$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a \neq 1$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a = -1$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a = 0$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a = 1$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a = 2$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a = \frac{1}{5}$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a = 1$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a \neq -1$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a = \frac{4}{5}$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] 1.
- [B] 6.
- [C] 13.
- [D] 3.
- [E] 11.

Teste 16 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^{2t}\cos(3t)$.
- [B] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [C] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [D] $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(3,3,3)$.
- C $(3,6,9)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(4,4,4)$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{1}{5}$.
- B $a = 1$.
- C $a = 2$.
- D $a \neq -1$.
- E $a = \frac{4}{5}$.

Teste 5 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ e $b = 2$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- C $a \neq 0$ e $b = 1$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 6 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t)$.
- B $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- B $1, 4$ e 5.
- C $1, 2$ e -3.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$ e que $T(0, 1, 1 + i) = (0, 1, 1 + i)$. Se $T(1, 2, 3) = (a, b, c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 3.
- B 6.
- C 1.
- D 13.
- E 11.

Teste 9 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 3$.
- B $11t^2 + s^2 = 4$.
- C $11t^2 + s^2 = 11$.
- D $11t^2 + s^2 = 1$.
- E $11t^2 + s^2 = 7$.

Teste 10 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 11 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 12 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- C B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

A $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

B $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

C $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

D (x, y, z).

E $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

Teste 16 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

A $a \neq 0$.

B $a \neq 1$.

C $a = 1$.

D $a = -1$.

E $a = 0$.

+12/11/38+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ____________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t)$.
- C $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,6,9)$.
- B $(6,6,6)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(1,1,1)$.

Teste 3 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [B] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [C] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [E] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 5 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 11.$
- B $11t^2 + s^2 = 1.$
- C $11t^2 + s^2 = 3.$
- D $11t^2 + s^2 = 4.$
- E $11t^2 + s^2 = 7.$

Teste 6 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 8 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- [B] $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- [C] $\operatorname{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [t, t^3]$.
- [D] $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- [E] $\operatorname{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] 1.
- [B] 11.
- [C] 6.
- [D] 13.
- [E] 3.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = \frac{1}{5}$.
- [B] $a = 1$.
- [C] $a = 2$.
- [D] $a \neq -1$.
- [E] $a = \frac{4}{5}$.

Teste 11 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [B] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [C] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [D] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [E] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 12 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a \neq 0$.
- [B] $a \neq 1$.
- [C] $a = 0$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a = -1$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- B $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- D (x, y, z).
- E $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

Teste 14 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ e $b = 2$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- C $a \neq 0$ e $b = 1$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- D $1, 2$ e -3.
- E $1, 4$ e 5.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^\perp$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

+13/11/26+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- B A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- E A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

Teste 2 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t - t^3]$.

Teste 3 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a \neq 1$.
- B $a = 0$.
- C $a = -1$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = 1$.

Teste 4 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^\perp$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(3,6,9)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(6,6,6)$.

Teste 6 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, 4$ e 5.
- [B] $1, 2$ e -3.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [D] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$ e que $T(0, 1, 1 + i) = (0, 1, 1 + i)$. Se $T(1, 2, 3) = (a, b, c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- [A] 1.
- [B] 6.
- [C] 13.
- [D] 3.
- [E] 11.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 10 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 7$.
- [B] $11t^2 + s^2 = 1$.
- [C] $11t^2 + s^2 = 3$.
- [D] $11t^2 + s^2 = 11$.
- [E] $11t^2 + s^2 = 4$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 12 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [B] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [C] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.
- [E] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 13 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- C (x, y, z).
- D $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

Teste 15 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ e $b = 1$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- C $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- E $a \neq 1$ e $b = 2$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{1}{5}$.
- B $a = 2$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{4}{5}$.

+14/11/14+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 3 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2), (1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a \neq -1$.
- B $a = 1$.
- C $a = 2$.
- D $a = \frac{4}{5}$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 5 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ e $b = 2$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- C $a \neq 0$ e $b = 1$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 6 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 11.
- B 13.
- C 1.
- D 3.
- E 6.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,6,9)$.
- B $(1,1,1)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(6,6,6)$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x,y,z) no subespaço $[(1,1,2),(2,0,2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x+y-z, x+4y-z, -x-y+4z)$.
- B $\frac{1}{3}(x-2y+2z, -2x+y+2z, 2x+2y+z)$.
- C $\frac{1}{3}(2x-y+z, -x+2y+z, x+y+2z)$.
- D (x,y,z).
- E $\frac{1}{3}(4x+y-z, -x+2y+z, 2x+2y+z)$.

Teste 9 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 10 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 11 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 7.$
- [B] $11t^2 + s^2 = 11.$
- [C] $11t^2 + s^2 = 3.$
- [D] $11t^2 + s^2 = 4.$
- [E] $11t^2 + s^2 = 1.$

Teste 12 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [B] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [C] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [E] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 13 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a \neq 0$.
- [B] $a \neq 1$.
- [C] $a = 0$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a = -1$.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [B] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [D] $1, 4$ e 5.
- [E] $1, 2$ e -3.

Teste 15 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

B A é semelhante a B e B é semelhante a C.

C A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

D A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

E não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

+15/11/2+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+16/1/60+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 2 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 3 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

C $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

E $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

Teste 4 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^\perp$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas a afirmação (II) é verdadeira.

D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 5 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A $1, 4$ e 5.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- E $1, 2$ e -3.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- B $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- D (x, y, z).
- E $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(3,3,3)$.
- C $(3,6,9)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(4,4,4)$.

Teste 8 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^t \cos(3t) + 2e^t \operatorname{sen}(3t)$.
- B $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t} \cos(3t) + e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t} \cos(3t)$.
- E $2e^{2t} \cos(3t) - e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 11.
- B 3.
- C 6.
- D 13.
- E 1.

Teste 10 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 1$.
- B $11t^2 + s^2 = 7$.
- C $11t^2 + s^2 = 3$.
- D $11t^2 + s^2 = 4$.
- E $11t^2 + s^2 = 11$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{4}{5}$.
- B $a = 2$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 12 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- E A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

Teste 13 Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{A}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- $\boxed{B}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- $\boxed{C}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- $\boxed{D}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- $\boxed{E}$ existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

Teste 14 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- $\boxed{A}$ $a \neq 0$.
- $\boxed{B}$ $a = -1$.
- $\boxed{C}$ $a = 0$.
- $\boxed{D}$ $a \neq 1$.
- $\boxed{E}$ $a = 1$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 16 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

A $a \neq 1$ e $b = 2$.

B $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

D $a \neq 0$ e $b = 1$.

E $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A $1, 2$ e -3.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- C $1, 4$ e 5.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 2 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 3 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 6.
- B 13.
- C 1.
- D 11.
- E 3.

Teste 4 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = -1$.
- B $a = 0$.
- C $a \neq 0$.
- D $a = 1$.
- E $a \neq 1$.

Teste 5 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

A $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

B (x, y, z).

C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

E $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

Teste 9 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 4$.
- B $11t^2 + s^2 = 1$.
- C $11t^2 + s^2 = 11$.
- D $11t^2 + s^2 = 3$.
- E $11t^2 + s^2 = 7$.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t)$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,3,3)$.
- B $(1,1,1)$.
- C $(6,6,6)$.
- D $(4,4,4)$.
- E $(3,6,9)$.

Teste 12 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- B $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- C $\text{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t, t^3]$.
- D $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- E $\text{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{1}{5}$.
- B $a = 1$.
- C $a = \frac{4}{5}$.
- D $a \neq -1$.
- E $a = 2$.

Teste 14 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 15 Assinale a alternativa correta:

A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

D existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.

E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 16 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

A $a \neq 1$ e $b = 2$.

B $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

D $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

E $a \neq 0$ e $b = 1$.

+17/11/38+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{1}{5}$.
- B $a = \frac{4}{5}$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = 2$.
- E $a = 1$.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- C $a \neq 1$ e $b = 2$.
- D $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- E $a \neq 0$ e $b = 1$.

Teste 4 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 4$.
- B $11t^2 + s^2 = 7$.
- C $11t^2 + s^2 = 3$.
- D $11t^2 + s^2 = 11$.
- E $11t^2 + s^2 = 1$.

Teste 5 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- $\boxed{\text{A}}$ 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $1, 4$ e 5.
- $\boxed{\text{C}}$ $1, 2$ e -3.
- $\boxed{\text{D}}$ 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- $\boxed{\text{E}}$ 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 6 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $2e^{2t}\cos(3t)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A (x, y, z).
- B $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- D $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- E $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 11.
- B 6.
- C 3.
- D 13.
- E 1.

Teste 10 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- D B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 11 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

E $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 12 Assinale a alternativa correta:

A existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.

B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

C existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 13 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = -1$.
- B $a \neq 1$.
- C $a \neq 0$.
- D $a = 1$.
- E $a = 0$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,3,3)$.
- B $(3,6,9)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(1,1,1)$.
- E $(6,6,6)$.

Teste 16 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

+18/11/26+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- $\boxed{\text{A}}$ $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{B}}$ $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{C}}$ $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{D}}$ $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{E}}$ $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 2 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a \neq 0$ e $b = 1$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a \neq 1$ e $b = 2$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 4 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 5 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- C não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- D A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- E A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- B (x, y, z).
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

Teste 7 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 0$.
- B $a \neq 1$.
- C $a = 1$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = -1$.

Teste 8 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- C existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- E existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = \frac{4}{5}$.
- [B] $a = 2$.
- [C] $a \neq -1$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a = \frac{1}{5}$.

Teste 11 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

D $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

Teste 12 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

A $11t^2 + s^2 = 3$.

B $11t^2 + s^2 = 1$.

C $11t^2 + s^2 = 11$.

D $11t^2 + s^2 = 4$.

E $11t^2 + s^2 = 7$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(6,6,6)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(3,6,9)$.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A $1, 4$ e 5.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- E $1, 2$ e -3.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 11.
- C 13.
- D 6.
- E 1.

Teste 16 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t)$.

+19/11/14+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 2 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

A $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

B $a \neq 1$ e $b = 2$.

C $a \neq 0$ e $b = 1$.

D $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 3 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- C B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- D A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- E não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.

Teste 4 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^t \cos(3t) + 2e^t \operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t} \cos(3t) + e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.
- C $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t} \cos(3t) - e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t} \cos(3t)$.

Teste 5 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = -1$.
- B $a \neq 1$.
- C $a = 1$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = 0$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a \neq -1$.
- B $a = \frac{1}{5}$.
- C $a = 1$.
- D $a = \frac{4}{5}$.
- E $a = 2$.

Teste 7 Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{A}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- $\boxed{B}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- $\boxed{C}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- $\boxed{D}$ existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- $\boxed{E}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{A}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{B}$ apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- $\boxed{C}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{D}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{E}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- $\boxed{\text{A}}$ 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $1, 4$ e 5.
- $\boxed{\text{C}}$ 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- $\boxed{\text{D}}$ 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- $\boxed{\text{E}}$ $1, 2$ e -3.

Teste 10 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 11 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 11.
- B 13.
- C 1.
- D 3.
- E 6.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(6,6,6)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(3,6,9)$.

Teste 13 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$.
- $\boxed{\text{D}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- $\boxed{\text{E}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$.

Teste 14 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- $\boxed{\text{A}}$ $11t^2 + s^2 = 11$.
- $\boxed{\text{B}}$ $11t^2 + s^2 = 1$.
- $\boxed{\text{C}}$ $11t^2 + s^2 = 3$.
- $\boxed{\text{D}}$ $11t^2 + s^2 = 4$.
- $\boxed{\text{E}}$ $11t^2 + s^2 = 7$.

Teste 15 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- $\boxed{\text{A}}$ $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{B}}$ $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{C}}$ $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{D}}$ $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{E}}$ $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x,y,z) no subespaço $[(1,1,2),(2,0,2)]$ é igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ (x,y,z).
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

+20/11/2+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- C não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- D B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 2 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2\cos(3t) + 2\,\text{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\text{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\text{sen}(3t)$.
- D $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\text{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t)$.

Teste 3 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $(4,4,4)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $(1,1,1)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $(6,6,6)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $(3,3,3)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $(3,6,9)$.

Teste 6 Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- $\boxed{\text{B}}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- $\boxed{\text{C}}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- $\boxed{\text{D}}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- $\boxed{\text{E}}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 7 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- B $a \neq 1$ e $b = 2$.
- C $a \neq 0$ e $b = 1$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- E $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E (x, y, z).

Teste 9 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a \neq 0$.
- B $a \neq 1$.
- C $a = 0$.
- D $a = 1$.
- E $a = -1$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a = \frac{1}{5}$.
- C $a = \frac{4}{5}$.
- D $a \neq -1$.
- E $a = 2$.

Teste 11 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- B $1, 2$ e -3.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- E $1, 4$ e 5.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 13 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- [B] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- [E] $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] 13.
- [B] 11.
- [C] 1.
- [D] 3.
- [E] 6.

Teste 16 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 11$.
- [B] $11t^2 + s^2 = 4$.
- [C] $11t^2 + s^2 = 7$.
- [D] $11t^2 + s^2 = 1$.
- [E] $11t^2 + s^2 = 3$.

+21/11/50+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

A 11.
B 3.
C 6.
D 13.
E 1.

Teste 2 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

A $11t^2 + s^2 = 4$.
B $11t^2 + s^2 = 3$.
C $11t^2 + s^2 = 7$.
D $11t^2 + s^2 = 11$.
E $11t^2 + s^2 = 1$.

Teste 3 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 0$.
- B $a = 1$.
- C $a \neq 0$.
- D $a \neq 1$.
- E $a = -1$.

Teste 4 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.
- C existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- D existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,6,9)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(1,1,1)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(6,6,6)$.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 7 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- [B] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- [E] $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

Teste 8 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [B] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [C] $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [D] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t}\cos(3t)$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a \neq -1$.
- B $a = 2$.
- C $a = \frac{4}{5}$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 12 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 13 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [B] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [C] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [D] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [E] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 14 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [B] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- [C] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- [D] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [E] $a \neq 0$ e $b = 1$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x,y,z) no subespaço $[(1,1,2),(2,0,2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(x-2y+2z, -2x+y+2z, 2x+2y+z)$.
- B (x,y,z).
- C $\frac{1}{3}(4x+y-z, -x+2y+z, 2x+2y+z)$.
- D $\frac{1}{3}(4x+y-z, x+4y-z, -x-y+4z)$.
- E $\frac{1}{3}(2x-y+z, -x+2y+z, x+y+2z)$.

Teste 16 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x+3y+2z, -2y-2z, x+2y+3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- B $1, 4$ e 5.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- D $1, 2$ e -3.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (II) é verdadeira.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 2 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.

C A é semelhante a B e B é semelhante a C.

D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 3 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 4 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- C existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- E existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

Teste 5 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 6 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 13.
- B 11.
- C 6.
- D 3.
- E 1.

Teste 7 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 1$.
- [B] $11t^2 + s^2 = 11$.
- [C] $11t^2 + s^2 = 4$.
- [D] $11t^2 + s^2 = 3$.
- [E] $11t^2 + s^2 = 7$.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 10 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- [B] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- [E] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E (x, y, z).

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a \neq -1$.
- B $a = 2$.
- C $a = \frac{4}{5}$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 13 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a = 1$.
- [B] $a \neq 0$.
- [C] $a = 0$.
- [D] $a = -1$.
- [E] $a \neq 1$.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [B] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [D] $1, 4$ e 5.
- [E] $1, 2$ e -3.

Teste 15 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- C $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- D $a \neq 1$ e $b = 2$.
- E $a \neq 0$ e $b = 1$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,3,3)$.
- B $(1,1,1)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(3,6,9)$.
- E $(6,6,6)$.

+23/11/26+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- B $\text{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t, t^3]$.
- C $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- D $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- E $\text{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 2 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- D A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- E A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(3,6,9)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(3,3,3)$.

Teste 4 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t)$.
- B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 5 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] 11.
- [B] 13.
- [C] 1.
- [D] 3.
- [E] 6.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a = 2$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = \frac{1}{5}$.
- E $a = \frac{4}{5}$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- B $1, 4$ e 5.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- D $1, 2$ e -3.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 9 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 10 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 12 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$.
- [B] $a = 1$.
- [C] $a = 0$.
- [D] $a = -1$.
- [E] $a \neq 0$.

Teste 13 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- B $a \neq 1$ e $b = 2$.
- C $a \neq 0$ e $b = 1$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A (x, y, z).
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

Teste 15 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 4.$
- B $11t^2 + s^2 = 7.$
- C $11t^2 + s^2 = 1.$
- D $11t^2 + s^2 = 11.$
- E $11t^2 + s^2 = 3.$

Teste 16 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- C não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 2 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- C $1, 4$ e 5.
- D $1, 2$ e -3.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 3 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = -1$.
- B $a = 0$.
- C $a \neq 1$.
- D $a = 1$.
- E $a \neq 0$.

Teste 4 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- B $a \neq 1$ e $b = 2$.
- C $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- D $a \neq 0$ e $b = 1$.
- E $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

Teste 5 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 6.
- C 3.
- D 11.
- E 13.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x,y,z) no subespaço $[(1,1,2),(2,0,2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(x-2y+2z, -2x+y+2z, 2x+2y+z)$.
- B (x,y,z).
- C $\frac{1}{3}(2x-y+z, -x+2y+z, x+y+2z)$.
- D $\frac{1}{3}(4x+y-z, -x+2y+z, 2x+2y+z)$.
- E $\frac{1}{3}(4x+y-z, x+4y-z, -x-y+4z)$.

Teste 8 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

A $2e^t \cos(3t) + 2e^t \operatorname{sen}(3t)$.

B $2e^{2t} \cos(3t) - e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.

C $2e^{2t} \cos(3t) + e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.

D $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.

E $2e^{2t} \cos(3t)$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a = 1$.
- C $a = \frac{4}{5}$.
- D $a \neq -1$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 11 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 11$.
- B $11t^2 + s^2 = 7$.
- C $11t^2 + s^2 = 3$.
- D $11t^2 + s^2 = 1$.
- E $11t^2 + s^2 = 4$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- [A] $(3,6,9)$.
- [B] $(6,6,6)$.
- [C] $(4,4,4)$.
- [D] $(1,1,1)$.
- [E] $(3,3,3)$.

Teste 13 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [B] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [C] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.
- [E] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 15 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{E}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 16 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+26/1/60+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x,y,z) no subespaço $[(1,1,2),(2,0,2)]$ é igual a:

- A (x,y,z).
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- C $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 3 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- B B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a = 1$.
- C $a = \frac{4}{5}$.
- D $a = \frac{1}{5}$.
- E $a \neq -1$.

Teste 5 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 11.$
- B $11t^2 + s^2 = 3.$
- C $11t^2 + s^2 = 1.$
- D $11t^2 + s^2 = 4.$
- E $11t^2 + s^2 = 7.$

Teste 6 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t).$
- B $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t).$
- C $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t).$
- D $2e^{2t}\cos(3t).$
- E $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t).$

Teste 7 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas a afirmação (II) é verdadeira.

D todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 9 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- D $a \neq 1$ e $b = 2$.
- E $a \neq 0$ e $b = 1$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(4,4,4)$.
- B $(3,6,9)$.
- C $(3,3,3)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(1,1,1)$.

Teste 11 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

E $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

Teste 12 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

A 13.

B 3.

C 6.

D 11.

E 1.

Teste 13 Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{A}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- $\boxed{B}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- $\boxed{C}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- $\boxed{D}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- $\boxed{E}$ existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{A}$ apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- $\boxed{B}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{C}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{D}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{E}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

A $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
B $1, 2$ e -3.
C $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
D $1, 4$ e 5.
E $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 16 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

A $a = 1$.
B $a \neq 0$.
C $a = -1$.
D $a \neq 1$.
E $a = 0$.

+26/11/50+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^{2t}\cos(3t)$.
- [B] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [C] $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- [D] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(4,4,4)$.
- B $(3,3,3)$.
- C $(3,6,9)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(1,1,1)$.

Teste 4 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 6.
- C 11.
- D 1.
- E 13.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 6 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [B] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [C] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- [D] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [E] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- B $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- C (x, y, z).
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 8 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a \neq 1$.
- C $a \neq 0$.
- D $a = 0$.
- E $a = -1$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a = \frac{4}{5}$.
- C $a = \frac{1}{5}$.
- D $a \neq -1$.
- E $a = 1$.

Teste 10 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- C existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 11 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- B A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 12 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 3$.
- B $11t^2 + s^2 = 7$.
- C $11t^2 + s^2 = 1$.
- D $11t^2 + s^2 = 11$.
- E $11t^2 + s^2 = 4$.

Teste 13 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 14 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [B] $1, 2$ e -3.
- [C] $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [D] $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [E] $1, 4$ e 5.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

+27/11/38+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- $\boxed{\text{D}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 2 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- $\boxed{\text{B}}$ não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- $\boxed{\text{C}}$ B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- $\boxed{\text{D}}$ A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- $\boxed{\text{E}}$ A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- [A] $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- [B] $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- [C] (x, y, z).
- [D] $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- [E] $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1, 2, 3)$ é igual a:

- [A] $(6, 6, 6)$.
- [B] $(3, 3, 3)$.
- [C] $(3, 6, 9)$.
- [D] $(1, 1, 1)$.
- [E] $(4, 4, 4)$.

Teste 5 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = -1$.
- B $a = 1$.
- C $a \neq 1$.
- D $a = 0$.
- E $a \neq 0$.

Teste 6 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^t \cos(3t) + 2e^t \operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t} \cos(3t) + e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t} \cos(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t} \cos(3t) - e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 8 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 7$.
- [B] $11t^2 + s^2 = 11$.
- [C] $11t^2 + s^2 = 1$.
- [D] $11t^2 + s^2 = 3$.
- [E] $11t^2 + s^2 = 4$.

Teste 9 Assinale a alternativa correta:

[A] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

[B] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

[C] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

[D] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.

[E] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

Teste 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[D] todas as afirmações são verdadeiras.

[E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 11 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 12 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- C $a \neq 0$ e $b = 1$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- E $a \neq 1$ e $b = 2$.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 6.
- C 3.
- D 11.
- E 13.

Teste 14 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a \neq -1$.
- B $a = 2$.
- C $a = 1$.
- D $a = \frac{1}{5}$.
- E $a = \frac{4}{5}$.

Teste 16 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- B $1, 2$ e -3.
- C $1, 4$ e 5.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

+28/11/26+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ________________________________ **NUSP:** ______________ **Turma:** _________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+29/1/24+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a \neq -1$.
- C $a = \frac{4}{5}$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 3 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [B] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [C] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [D] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [E] A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- [A] $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- [B] $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- [C] $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- [D] $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- [E] (x, y, z).

Teste 5 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- B $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t)$.
- E $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 6 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 7 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 13.
- B 3.
- C 11.
- D 1.
- E 6.

Teste 9 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [B] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.
- [C] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [D] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [E] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 10 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [B] $1, 2$ e -3.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [D] $1, 4$ e 5.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 11 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \neq 1$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a = 1$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a \neq 0$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a = -1$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a = 0$.

Teste 12 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a \neq 1$ e $b = 2$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a \neq 0$ e $b = 1$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,6,9)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(1,1,1)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(6,6,6)$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 15 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 1$.
- B $11t^2 + s^2 = 4$.
- C $11t^2 + s^2 = 7$.
- D $11t^2 + s^2 = 3$.
- E $11t^2 + s^2 = 11$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

+29/11/14+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a = 2$.
- C $a = \frac{4}{5}$.
- D $a = \frac{1}{5}$.
- E $a \neq -1$.

Teste 2 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$ e que $T(0, 1, 1 + i) = (0, 1, 1 + i)$. Se $T(1, 2, 3) = (a, b, c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 1.
- B 13.
- C 6.
- D 3.
- E 11.

Teste 3 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- [A] $(6,6,6)$.
- [B] $(3,3,3)$.
- [C] $(1,1,1)$.
- [D] $(4,4,4)$.
- [E] $(3,6,9)$.

Teste 7 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 4.$
- B $11t^2 + s^2 = 7.$
- C $11t^2 + s^2 = 11.$
- D $11t^2 + s^2 = 3.$
- E $11t^2 + s^2 = 1.$

Teste 8 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 9 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 10 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- B A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- C não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 11 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$.
- [B] $a = 0$.
- [C] $a = -1$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a \neq 0$.

Teste 12 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- [B] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [C] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [D] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [E] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- B $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- D (x, y, z).
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 14 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2, 1 + t + t^2 + t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1 - t, 1 - t^2, 1 - t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + t + t^2, t - t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [B] $1, 4$ e 5.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [D] $1, 2$ e -3.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 16 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^t \cos(3t) + 2e^t \operatorname{sen}(3t)$.
- [B] $2e^{2t} \cos(3t)$.
- [C] $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- [D] $2e^{2t} \cos(3t) + e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t} \cos(3t) - e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.

+30/11/2+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 2 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A $1, 4$ e 5.
- B $1, 2$ e -3.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 3 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [B] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [C] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [D] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [E] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 4 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [B] $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- [C] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [D] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t}\cos(3t)$.

Teste 5 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 1$.
- B $11t^2 + s^2 = 3$.
- C $11t^2 + s^2 = 4$.
- D $11t^2 + s^2 = 7$.
- E $11t^2 + s^2 = 11$.

Teste 6 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 3.
- B 1.
- C 6.
- D 13.
- E 11.

Teste 7 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.
- D existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = \frac{4}{5}$.
- [B] $a \neq -1$.
- [C] $a = 2$.
- [D] $a = \frac{1}{5}$.
- [E] $a = 1$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 10 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [B] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- [C] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [D] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [E] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- [A] $(3,3,3)$.
- [B] $(1,1,1)$.
- [C] $(6,6,6)$.
- [D] $(3,6,9)$.
- [E] $(4,4,4)$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- C $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- D (x, y, z).
- E $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 14 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 15 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a \neq 1$.
- B $a \neq 0$.
- C $a = 1$.
- D $a = -1$.
- E $a = 0$.

Teste 16 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- B $\text{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t, t^3]$.
- C $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- D $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- E $\text{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

+31/11/50+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 2 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 11.$
- B $11t^2 + s^2 = 4.$
- C $11t^2 + s^2 = 3.$
- D $11t^2 + s^2 = 1.$
- E $11t^2 + s^2 = 7.$

Teste 3 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 4 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 0$.
- B $a \neq 1$.
- C $a = 1$.
- D $a = -1$.
- E $a \neq 0$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{1}{5}$.
- B $a = 1$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = \frac{4}{5}$.
- E $a = 2$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A (x, y, z).
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- E $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

Teste 7 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 8 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- B $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- C $\text{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- D $\text{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, 4$ e 5.
- [B] $1, 2$ e -3.
- [C] $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [D] $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [E] $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(6,6,6)$.
- C $(3,6,9)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(4,4,4)$.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 13 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [B] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [C] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [D] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [E] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$ e que $T(0, 1, 1 + i) = (0, 1, 1 + i)$. Se $T(1, 2, 3) = (a, b, c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- [A] 11.
- [B] 3.
- [C] 6.
- [D] 1.
- [E] 13.

Teste 16 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- D $a \neq 0$ e $b = 1$.
- E $a \neq 1$ e $b = 2$.

+32/11/38+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{1}{5}$.
- B $a = 2$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{4}{5}$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- E (x, y, z).

Teste 3 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

A $(3,6,9)$.

B $(3,3,3)$.

C $(4,4,4)$.

D $(6,6,6)$.

E $(1,1,1)$.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 6 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [B] $1, 4$ e 5.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [D] $1, 2$ e -3.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 7 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 8 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a = 0$.
- C $a = -1$.
- D $a \neq 1$.
- E $a \neq 0$.

Teste 9 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 10 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- C existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- D existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 11 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ e $b = 2$.
- B $a \neq 0$ e $b = 1$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 12 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- D B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- E A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 11.
- C 1.
- D 6.
- E 13.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 15 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ $\text{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t, t^3]$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- $\boxed{\text{D}}$ $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- $\boxed{\text{E}}$ $\text{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 16 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- $\boxed{\text{A}}$ $11t^2 + s^2 = 3$.
- $\boxed{\text{B}}$ $11t^2 + s^2 = 4$.
- $\boxed{\text{C}}$ $11t^2 + s^2 = 11$.
- $\boxed{\text{D}}$ $11t^2 + s^2 = 1$.
- $\boxed{\text{E}}$ $11t^2 + s^2 = 7$.

+33/11/26+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

A $11t^2 + s^2 = 1$.
B $11t^2 + s^2 = 11$.
C $11t^2 + s^2 = 7$.
D $11t^2 + s^2 = 4$.
E $11t^2 + s^2 = 3$.

Teste 2 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
B A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
C B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
D A é semelhante a B e B é semelhante a C.
E não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.

Teste 3 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 4 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [B] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- [C] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- [D] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [E] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- B $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- D (x, y, z).
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [B] $1, 2$ e -3.
- [C] $1, 4$ e 5.
- [D] $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [E] $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = \frac{1}{5}$.
- [B] $a = 2$.
- [C] $a = \frac{4}{5}$.
- [D] $a \neq -1$.
- [E] $a = 1$.

Teste 9 Assinale a alternativa correta:

A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

B existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

D existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1, 2, 3)$ é igual a:

A $(1, 1, 1)$.

B $(3, 6, 9)$.

C $(3, 3, 3)$.

D $(6, 6, 6)$.

E $(4, 4, 4)$.

Teste 11 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 12 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$.

Teste 13 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B apenas a afirmação (II) é verdadeira.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 14 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

A $a \neq 1$.

B $a = -1$.

C $a \neq 0$.

D $a = 0$.

E $a = 1$.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 6.
- C 1.
- D 11.
- E 13.

+34/11/14+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [B] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [C] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [E] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = 1$.
- [B] $a \neq -1$.
- [C] $a = \frac{1}{5}$.
- [D] $a = \frac{4}{5}$.
- [E] $a = 2$.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 4 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

A $a = 0$.

B $a = -1$.

C $a \neq 1$.

D $a \neq 0$.

E $a = 1$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(6,6,6)$.
- B $(1,1,1)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(3,6,9)$.
- E $(3,3,3)$.

Teste 6 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 7 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 11$.
- B $11t^2 + s^2 = 7$.
- C $11t^2 + s^2 = 3$.
- D $11t^2 + s^2 = 1$.
- E $11t^2 + s^2 = 4$.

Teste 8 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- B $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- C $\text{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- D $\text{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [B] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [C] $1, 2$ e -3.
- [D] $1, 4$ e 5.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 11 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 12 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^t \cos(3t) + 2e^t \operatorname{sen}(3t)$.
- [B] $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- [C] $2e^{2t} \cos(3t)$.
- [D] $2e^{2t} \cos(3t) + e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t} \cos(3t) - e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.

Teste 13 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- E A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 3.
- C 13.
- D 6.
- E 11.

Teste 15 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- B $a \neq 0$ e $b = 1$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- E $a \neq 1$ e $b = 2$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- D (x, y, z).
- E $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

+35/11/2+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a = -1$.
- [B] $a = 0$.
- [C] $a = 1$.
- [D] $a \neq 1$.
- [E] $a \neq 0$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = 2$.
- [B] $a = \frac{1}{5}$.
- [C] $a = \frac{4}{5}$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a \neq -1$.

Teste 3 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A Ker$(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e Im$(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- B Ker$(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e Im$(T) = [t, t^3]$.
- C Ker$(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e Im$(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- D Ker$(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e Im$(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- E Ker$(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e Im$(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 5 Assinale a alternativa correta:

- [A] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [B] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [C] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [E] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

Teste 6 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [B] $2e^{2t}\cos(3t)$.
- [C] $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [D] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 7 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ e $b = 1$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- D $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- E $a \neq 1$ e $b = 2$.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 1.
- C 13.
- D 6.
- E 11.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 11 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [B] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [C] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [D] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [E] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

Teste 12 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [B] $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [C] $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [D] $1, 4$ e 5.
- [E] $1, 2$ e -3.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- C (x, y, z).
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

Teste 14 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x, y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x, y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x, y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x, y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x, y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(4,4,4)$.
- B $(6,6,6)$.
- C $(3,3,3)$.
- D $(1,1,1)$.
- E $(3,6,9)$.

Teste 16 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 3$.
- B $11t^2 + s^2 = 7$.
- C $11t^2 + s^2 = 1$.
- D $11t^2 + s^2 = 4$.
- E $11t^2 + s^2 = 11$.

+36/11/50+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+37/1/48+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- B $1, 4$ e 5.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- D $1, 2$ e -3.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 3 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [B] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [C] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [D] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [E] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.

Teste 4 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 11.$
- [B] $11t^2 + s^2 = 7.$
- [C] $11t^2 + s^2 = 1.$
- [D] $11t^2 + s^2 = 4.$
- [E] $11t^2 + s^2 = 3.$

Teste 5 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [B] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [C] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [D] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [E] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- B (x, y, z).
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- E $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

Teste 8 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a \neq 0$.
- C $a = 0$.
- D $a = -1$.
- E $a \neq 1$.

Teste 9 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.

C $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

D $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.

E $2e^{2t}\cos(3t)$.

Teste 10 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 450$, então $\operatorname{Im}(T)$ estará contida em $\operatorname{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são verdadeiras.

B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C apenas a afirmação (II) é verdadeira.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a = 2$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = \frac{1}{5}$.
- E $a = \frac{4}{5}$.

Teste 12 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$ e que $T(0, 1, 1 + i) = (0, 1, 1 + i)$. Se $T(1, 2, 3) = (a, b, c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 3.
- B 6.
- C 13.
- D 1.
- E 11.

Teste 13 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ e $b = 2$.
- B $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- D $a \neq 0$ e $b = 1$.
- E $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

Teste 14 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

Teste 15 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(3,6,9)$.
- C $(3,3,3)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(4,4,4)$.

+37/11/38+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** _____________ **Turma:** _________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+38/1/36+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- D $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 2 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ e $b = 1$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- D $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- E $a \neq 1$ e $b = 2$.

Teste 3 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{4}{5}$.
- B $a = 1$.
- C $a = 2$.
- D $a \neq -1$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A (x, y, z).
- B $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- D $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- E $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

Teste 6 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 4$.
- B $11t^2 + s^2 = 3$.
- C $11t^2 + s^2 = 1$.
- D $11t^2 + s^2 = 11$.
- E $11t^2 + s^2 = 7$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{t})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(4,4,4)$.
- B $(6,6,6)$.
- C $(3,3,3)$.
- D $(1,1,1)$.
- E $(3,6,9)$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- E A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 11 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- [B] $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- [E] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

Teste 12 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x+3y+2z, -2y-2z, x+2y+3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [B] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [C] $1, 4$ e 5.
- [D] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [E] $1, 2$ e -3.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 13.
- B 1.
- C 6.
- D 11.
- E 3.

Teste 14 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 0$.
- B $a = -1$.
- C $a \neq 1$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = 1$.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas a afirmação (II) é verdadeira.

D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 16 Assinale a alternativa correta:

A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

D existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

+38/11/26+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

A $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

B $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

C $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

D $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

E $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas a afirmação (I) é verdadeira.

D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 3$.
- B $11t^2 + s^2 = 7$.
- C $11t^2 + s^2 = 1$.
- D $11t^2 + s^2 = 4$.
- E $11t^2 + s^2 = 11$.

Teste 4 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 5 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t)$.
- C $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- D $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- E (x, y, z).

Teste 7 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- E existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

Teste 8 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- B $a \neq 0$ e $b = 1$.
- C $a \neq 1$ e $b = 2$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 11.
- B 1.
- C 3.
- D 6.
- E 13.

Teste 10 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [B] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [C] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [D] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [E] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 11 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [B] $1, 2$ e -3.
- [C] $1, 4$ e 5.
- [D] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a = \frac{4}{5}$.
- C $a = 1$.
- D $a \neq -1$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 14 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a \neq 0$.
- [B] $a \neq 1$.
- [C] $a = 1$.
- [D] $a = 0$.
- [E] $a = -1$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- [A] $(4,4,4)$.
- [B] $(6,6,6)$.
- [C] $(3,6,9)$.
- [D] $(3,3,3)$.
- [E] $(1,1,1)$.

Teste 16 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

B $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

C $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

+39/11/14+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,3,3)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(1,1,1)$.
- D $(3,6,9)$.
- E $(6,6,6)$.

Teste 4 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t, t^3]$.
- B $\text{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- C $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- D $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- E $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 6 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- B A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.

Teste 7 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ e $b = 2$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- D $a \neq 0$ e $b = 1$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 11.
- B 3.
- C 13.
- D 1.
- E 6.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, 4$ e 5.
- [B] $1, 2$ e -3.
- [C] $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [D] $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [E] $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 10 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 3$.
- [B] $11t^2 + s^2 = 11$.
- [C] $11t^2 + s^2 = 7$.
- [D] $11t^2 + s^2 = 4$.
- [E] $11t^2 + s^2 = 1$.

Teste 11 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- D existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 12 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x, y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x, y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x, y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x, y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x, y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{1}{5}$.
- B $a \neq -1$.
- C $a = 2$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{4}{5}$.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- D $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- E (x, y, z).

Teste 15 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 16 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 0$.
- B $a = -1$.
- C $a \neq 1$.
- D $a = 1$.
- E $a \neq 0$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a = 0$.
- [B] $a \neq 0$.
- [C] $a = -1$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a \neq 1$.

Teste 2 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [B] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [C] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [D] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [E] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

Teste 3 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- C $a \neq 0$ e $b = 1$.
- D $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- E $a \neq 1$ e $b = 2$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1, 2, 3)$ é igual a:

- A $(3, 6, 9)$.
- B $(3, 3, 3)$.
- C $(4, 4, 4)$.
- D $(6, 6, 6)$.
- E $(1, 1, 1)$.

Teste 5 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 4.$
- B $11t^2 + s^2 = 11.$
- C $11t^2 + s^2 = 7.$
- D $11t^2 + s^2 = 3.$
- E $11t^2 + s^2 = 1.$

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $(x, y, z).$
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z).$
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z).$
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z).$
- E $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z).$

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A $1, 2$ e -3.
- B $1, 4$ e 5.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 9 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{E}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t)$.
- E $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 11 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

B $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

C $\operatorname{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [t, t^3]$.

D $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

E $\operatorname{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 450$, então $\operatorname{Im}(T)$ estará contida em $\operatorname{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C apenas a afirmação (II) é verdadeira.

D todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 14 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- C existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- D existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- E existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 11.
- C 13.
- D 6.
- E 3.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a = \frac{1}{5}$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = \frac{4}{5}$.
- E $a = 1$.

+41/11/50+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t)$.
- B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 2 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 6.
- B 3.
- C 11.
- D 13.
- E 1.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,6,9)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(6,6,6)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(1,1,1)$.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 5 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [B] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [C] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [D] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [E] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 6 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [B] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [C] $1, 2$ e -3.
- [D] $1, 4$ e 5.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 7 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{E}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 8 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- B (x, y, z).
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

Teste 10 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2, 1 + t + t^2 + t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1 - t, 1 - t^2, 1 - t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + t + t^2, t - t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$.

Teste 11 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [B] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- [C] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [D] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [E] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^\perp$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 13 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 4$.
- B $11t^2 + s^2 = 7$.
- C $11t^2 + s^2 = 1$.
- D $11t^2 + s^2 = 11$.
- E $11t^2 + s^2 = 3$.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{4}{5}$.
- B $a = \frac{1}{5}$.
- C $a = 2$.
- D $a = 1$.
- E $a \neq -1$.

Teste 16 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 0$.
- B $a \neq 0$.
- C $a \neq 1$.
- D $a = 1$.
- E $a = -1$.

+42/11/38+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 6.
- C 11.
- D 3.
- E 13.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a \neq -1$.
- C $a = 2$.
- D $a = \frac{4}{5}$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- [A] $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- [B] $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- [C] (x, y, z).
- [D] $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- [E] $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

Teste 4 Assinale a alternativa correta:

- [A] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [B] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [C] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [E] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 5 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- C $a \neq 1$ e $b = 2$.
- D $a \neq 0$ e $b = 1$.
- E $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

Teste 6 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- B $1, 2$ e -3.
- C $1, 4$ e 5.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(3,6,9)$.
- C $(3,3,3)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(4,4,4)$.

Teste 10 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 0$.
- B $a = 1$.
- C $a \neq 1$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = -1$.

Teste 11 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 12 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 13 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

Teste 14 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- $\boxed{\text{B}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 16 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- $\boxed{\text{A}}$ $11t^2 + s^2 = 11.$
- $\boxed{\text{B}}$ $11t^2 + s^2 = 3.$
- $\boxed{\text{C}}$ $11t^2 + s^2 = 7.$
- $\boxed{\text{D}}$ $11t^2 + s^2 = 4.$
- $\boxed{\text{E}}$ $11t^2 + s^2 = 1.$

+43/11/26+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

A $11t^2 + s^2 = 4$.
B $11t^2 + s^2 = 7$.
C $11t^2 + s^2 = 11$.
D $11t^2 + s^2 = 3$.
E $11t^2 + s^2 = 1$.

Teste 2 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

A $a \neq 0$ e $b = 1$.
B $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
D $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
E $a \neq 1$ e $b = 2$.

Teste 3 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a = 1$.
- [B] $a = 0$.
- [C] $a \neq 0$.
- [D] $a = -1$.
- [E] $a \neq 1$.

Teste 4 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [B] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [C] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [D] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [E] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 6 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{E}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x, y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x, y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x, y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x, y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x, y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

A $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

B $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

C $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

D (x, y, z).

E $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$ e que $T(0, 1, 1 + i) = (0, 1, 1 + i)$. Se $T(1, 2, 3) = (a, b, c)$, então $a + b + c$ será igual a:

A 11.

B 3.

C 1.

D 13.

E 6.

Teste 9 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- $\boxed{\text{D}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- $\boxed{\text{E}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 10 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^\perp$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- $\boxed{\text{D}}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 11 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

A $1, 4$ e 5.

B 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

C $1, 2$ e -3.

D 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

E 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 12 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

B $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

C $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.

D $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.

E $2e^{2t}\cos(3t)$.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2), (1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{1}{5}$.
- B $a = 1$.
- C $a = 2$.
- D $a \neq -1$.
- E $a = \frac{4}{5}$.

Teste 15 Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{A}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- $\boxed{B}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- $\boxed{C}$ existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- $\boxed{D}$ existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- $\boxed{E}$ existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1, 2, 3)$ é igual a:

- $\boxed{A}$ $(3, 6, 9)$.
- $\boxed{B}$ $(1, 1, 1)$.
- $\boxed{C}$ $(4, 4, 4)$.
- $\boxed{D}$ $(3, 3, 3)$.
- $\boxed{E}$ $(6, 6, 6)$.

+44/11/14+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ________________________________ **NUSP:** _____________ **Turma:** _________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

A 1.
B 3.
C 11.
D 6.
E 13.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x,y,z) no subespaço $[(1,1,2),(2,0,2)]$ é igual a:

A $\frac{1}{3}(x-2y+2z, -2x+y+2z, 2x+2y+z)$.
B $\frac{1}{3}(4x+y-z, x+4y-z, -x-y+4z)$.
C $\frac{1}{3}(2x-y+z, -x+2y+z, x+y+2z)$.
D $\frac{1}{3}(4x+y-z, -x+2y+z, 2x+2y+z)$.
E (x,y,z).

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

A $(3,6,9)$.
B $(3,3,3)$.
C $(4,4,4)$.
D $(6,6,6)$.
E $(1,1,1)$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a = \frac{1}{5}$.
- C $a = \frac{4}{5}$.
- D $a \neq -1$.
- E $a = 1$.

Teste 5 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- D existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

Teste 6 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [B] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [D] $1, 2$ e -3.
- [E] $1, 4$ e 5.

Teste 7 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2, 1 + t + t^2 + t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1 - t, 1 - t^2, 1 - t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\text{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$.
- [B] $\text{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$.
- [C] $\text{Ker}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t, t^3]$.
- [D] $\text{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$.
- [E] $\text{Ker}(T) = [1 + t, 1 + t + t^2 + t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1 + t + t^2, t - t^3]$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 11$.
- B $11t^2 + s^2 = 3$.
- C $11t^2 + s^2 = 1$.
- D $11t^2 + s^2 = 4$.
- E $11t^2 + s^2 = 7$.

Teste 11 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{E}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 12 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = -1$.
- B $a \neq 1$.
- C $a = 0$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = 1$.

Teste 13 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t)$.
- E $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 14 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- C B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- D não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- E A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 15 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- B $a \neq 1$ e $b = 2$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- E $a \neq 0$ e $b = 1$.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

+45/11/2+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 2 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- B B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- E A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 3 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 0$.
- B $a \neq 1$.
- C $a = 1$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = -1$.

Teste 4 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 13.
- B 11.
- C 1.
- D 3.
- E 6.

Teste 5 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t)$.
- B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 6 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- B $1, 2$ e -3.
- C $1, 4$ e 5.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 7 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

Teste 8 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

A $(1,1,1)$.

B $(6,6,6)$.

C $(4,4,4)$.

D $(3,3,3)$.

E $(3,6,9)$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a \neq -1$.
- C $a = \frac{1}{5}$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{4}{5}$.

Teste 12 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- C existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- D existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 14 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

A $11t^2 + s^2 = 7.$

B $11t^2 + s^2 = 11.$

C $11t^2 + s^2 = 3.$

D $11t^2 + s^2 = 4.$

E $11t^2 + s^2 = 1.$

Teste 15 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ e $b = 1$.
- B $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- D $a \neq 1$ e $b = 2$.
- E $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E (x, y, z).

+46/11/50+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ____________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 3 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^{2t}\cos(3t)$.
- [B] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [C] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [D] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [E] $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 4 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 1$.
- [B] $11t^2 + s^2 = 7$.
- [C] $11t^2 + s^2 = 11$.
- [D] $11t^2 + s^2 = 3$.
- [E] $11t^2 + s^2 = 4$.

Teste 5 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- B A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- C não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- D A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 6 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = \frac{4}{5}$.
- [B] $a \neq -1$.
- [C] $a = 2$.
- [D] $a = \frac{1}{5}$.
- [E] $a = 1$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [B] $1, 2$ e -3.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [D] $1, 4$ e 5.
- [E] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(6,6,6)$.
- B $(1,1,1)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(3,6,9)$.

Teste 10 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 3.
- C 11.
- D 6.
- E 13.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x,y,z) no subespaço $[(1,1,2),(2,0,2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x+y-z, x+4y-z, -x-y+4z)$.
- B $\frac{1}{3}(x-2y+2z, -2x+y+2z, 2x+2y+z)$.
- C (x,y,z).
- D $\frac{1}{3}(2x-y+z, -x+2y+z, x+y+2z)$.
- E $\frac{1}{3}(4x+y-z, -x+2y+z, 2x+2y+z)$.

Teste 12 Assinale a alternativa correta:

A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.

D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 13 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

E $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 14 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a \neq 0$.
- [B] $a = -1$.
- [C] $a = 1$.
- [D] $a = 0$.
- [E] $a \neq 1$.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^\perp$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ e $b = 2$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- C $a \neq 0$ e $b = 1$.
- D $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- E $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+48/1/36+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- B $a \neq 0$ e $b = 1$.
- C $a \neq 1$ e $b = 2$.
- D $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- E $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

Teste 2 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 5 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 7$.
- B $11t^2 + s^2 = 1$.
- C $11t^2 + s^2 = 3$.
- D $11t^2 + s^2 = 11$.
- E $11t^2 + s^2 = 4$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(4,4,4)$.
- B $(3,3,3)$.
- C $(1,1,1)$.
- D $(3,6,9)$.
- E $(6,6,6)$.

Teste 7 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- D $1, 2$ e -3.
- E $1, 4$ e 5.

Teste 9 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t)$.
- D $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 10 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- D existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 11 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

Teste 12 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 13.
- C 6.
- D 3.
- E 11.

Teste 13 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 14 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a = 0$.
- [B] $a \neq 1$.
- [C] $a = -1$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a \neq 0$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a = \frac{4}{5}$.
- C $a = \frac{1}{5}$.
- D $a = 1$.
- E $a \neq -1$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- C (x, y, z).
- D $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- E $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

+48/11/26+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = -1$.
- B $a \neq 1$.
- C $a = 0$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = 1$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- B (x, y, z).
- C $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 3 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

Teste 4 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- B A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- C A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- D B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- E não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.

Teste 5 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 13.
- C 6.
- D 11.
- E 1.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 7 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- [B] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [C] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [D] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- [E] $a \neq 1$ e $b = 2$.

Teste 8 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 4.$
- [B] $11t^2 + s^2 = 3.$
- [C] $11t^2 + s^2 = 7.$
- [D] $11t^2 + s^2 = 1.$
- [E] $11t^2 + s^2 = 11.$

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2), (1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = \frac{4}{5}$.
- [B] $a = 1$.
- [C] $a \neq -1$.
- [D] $a = \frac{1}{5}$.
- [E] $a = 2$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{t})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 12 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 13 Assinale a alternativa correta:

A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

D existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

A $1, 2$ e -3.

B $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

C $1, 4$ e 5.

D $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

E $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,6,9)$.
- B $(1,1,1)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(6,6,6)$.

Teste 16 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+50/1/12+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \neq 0$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a = 0$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a \neq 1$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a = 1$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a = -1$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- $\boxed{\text{C}}$ (x, y, z).
- $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 3 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 4 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 11.$
- B $11t^2 + s^2 = 3.$
- C $11t^2 + s^2 = 4.$
- D $11t^2 + s^2 = 7.$
- E $11t^2 + s^2 = 1.$

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a \neq -1$.
- B $a = \frac{4}{5}$.
- C $a = 2$.
- D $a = \frac{1}{5}$.
- E $a = 1$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1, 2, 3)$ é igual a:

- A $(4, 4, 4)$.
- B $(3, 6, 9)$.
- C $(3, 3, 3)$.
- D $(1, 1, 1)$.
- E $(6, 6, 6)$.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, 4$ e 5.
- [B] $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [C] $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [D] $1, 2$ e -3.
- [E] $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 9 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- B $a \neq 1$ e $b = 2$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- D $a \neq 0$ e $b = 1$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 11 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 11.
- B 1.
- C 3.
- D 13.
- E 6.

Teste 12 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 13 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [B] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [C] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [D] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [E] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^\perp$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 15 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{t})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

+50/11/2+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 2 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [B] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [C] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [D] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [E] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- [A] $(6,6,6)$.
- [B] $(1,1,1)$.
- [C] $(3,6,9)$.
- [D] $(4,4,4)$.
- [E] $(3,3,3)$.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 5 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- [B] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- [E] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- [A] (x, y, z).
- [B] $\frac{1}{3}(x-2y+2z, -2x+y+2z, 2x+2y+z)$.
- [C] $\frac{1}{3}(2x-y+z, -x+2y+z, x+y+2z)$.
- [D] $\frac{1}{3}(4x+y-z, x+4y-z, -x-y+4z)$.
- [E] $\frac{1}{3}(4x+y-z, -x+2y+z, 2x+2y+z)$.

Teste 7 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$.
- [B] $a = -1$.
- [C] $a \neq 0$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a = 0$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x+3y+2z, -2y-2z, x+2y+3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, 4$ e 5.
- [B] $1, 2$ e -3.
- [C] $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [D] $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [E] $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 10 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- B $a \neq 1$ e $b = 2$.
- C $a \neq 0$ e $b = 1$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 11 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

A $11t^2 + s^2 = 3.$
B $11t^2 + s^2 = 1.$
C $11t^2 + s^2 = 4.$
D $11t^2 + s^2 = 11.$
E $11t^2 + s^2 = 7.$

Teste 12 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
D B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
E A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 13 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [B] $2e^{2t}\cos(3t)$.
- [C] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [D] $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = \frac{1}{5}$.
- [B] $a = \frac{4}{5}$.
- [C] $a \neq -1$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a = 2$.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 6.
- C 13.
- D 11.
- E 3.

Teste 16 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

+51/11/50+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Assinale a alternativa correta:

A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a \neq -1$.
- B $a = \frac{4}{5}$.
- C $a = 2$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 4 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = -1$.
- B $a = 1$.
- C $a \neq 0$.
- D $a \neq 1$.
- E $a = 0$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(1,1,1)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(3,3,3)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(3,6,9)$.

Teste 6 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 4$.
- B $11t^2 + s^2 = 3$.
- C $11t^2 + s^2 = 11$.
- D $11t^2 + s^2 = 1$.
- E $11t^2 + s^2 = 7$.

Teste 7 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A (x, y, z).
- B $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- D $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- E $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$ e que $T(0, 1, 1 + i) = (0, 1, 1 + i)$. Se $T(1, 2, 3) = (a, b, c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 1.
- B 11.
- C 3.
- D 6.
- E 13.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2\cos(3t) + 2\,\text{sen}(3t)$.
- [B] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\text{sen}(3t)$.
- [C] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\text{sen}(3t)$.
- [D] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\text{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t}\cos(3t)$.

Teste 11 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 12 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- D A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A $1, 2$ e -3.
- B $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- C $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- D $1, 4$ e 5.
- E $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 14 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\operatorname{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [t, t^3]$.

B $\operatorname{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

C $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

D $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

E $\operatorname{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\operatorname{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 16 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- B $a \neq 0$ e $b = 1$.
- C $a \neq 1$ e $b = 2$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

+52/11/38+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+53/1/36+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a \neq 1$.
- C $a = 0$.
- D $a = -1$.
- E $a \neq 0$.

Teste 2 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^t \cos(3t) + 2e^t \operatorname{sen}(3t)$.
- B $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t} \cos(3t) - e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t} \cos(3t) + e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t} \cos(3t)$.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 4 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- B B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- C não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 5 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 6 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- C existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- D existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 7 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- B $a \neq 0$ e $b = 1$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- D $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- E $a \neq 1$ e $b = 2$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A $1, 4$ e 5.
- B $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- C $1, 2$ e -3.
- D $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- E $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 9 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- $\boxed{\text{A}}$ $11t^2 + s^2 = 11$.
- $\boxed{\text{B}}$ $11t^2 + s^2 = 1$.
- $\boxed{\text{C}}$ $11t^2 + s^2 = 3$.
- $\boxed{\text{D}}$ $11t^2 + s^2 = 4$.
- $\boxed{\text{E}}$ $11t^2 + s^2 = 7$.

Teste 10 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ 1.
- $\boxed{\text{B}}$ 13.
- $\boxed{\text{C}}$ 6.
- $\boxed{\text{D}}$ 3.
- $\boxed{\text{E}}$ 11.

Teste 11 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- B $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- C $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- D $\text{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\text{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(6,6,6)$.
- B $(4,4,4)$.
- C $(3,6,9)$.
- D $(3,3,3)$.
- E $(1,1,1)$.

Teste 13 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C apenas a afirmação (II) é verdadeira.

D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

A $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

B $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

C (x, y, z).

D $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

E $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a = \frac{4}{5}$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 13.
- B 6.
- C 3.
- D 11.
- E 1.

Teste 2 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- D $a \neq 0$ e $b = 1$.
- E $a \neq 1$ e $b = 2$.

Teste 3 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 4 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^\perp$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 5 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a = 0$.
- [B] $a \neq 1$.
- [C] $a \neq 0$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a = -1$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- [A] $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- [B] $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- [C] $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- [D] (x, y, z).
- [E] $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

Teste 7 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [B] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [C] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [E] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 8 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,3,3)$.
- B $(1,1,1)$.
- C $(3,6,9)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(4,4,4)$.

Teste 11 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 11$.
- B $11t^2 + s^2 = 3$.
- C $11t^2 + s^2 = 7$.
- D $11t^2 + s^2 = 4$.
- E $11t^2 + s^2 = 1$.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, 4$ e 5.
- [B] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [D] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [E] $1, 2$ e -3.

Teste 14 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [B] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [C] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [D] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [E] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = 2$.
- [B] $a = 1$.
- [C] $a \neq -1$.
- [D] $a = \frac{4}{5}$.
- [E] $a = \frac{1}{5}$.

Teste 16 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t)$.
- D $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- C $1, 2$ e -3.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- E $1, 4$ e 5.

Teste 2 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a \neq 0$.
- B $a = 0$.
- C $a \neq 1$.
- D $a = -1$.
- E $a = 1$.

Teste 3 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 2$.
- B $a \neq -1$.
- C $a = 1$.
- D $a = \frac{1}{5}$.
- E $a = \frac{4}{5}$.

Teste 5 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 4.$
- [B] $11t^2 + s^2 = 7.$
- [C] $11t^2 + s^2 = 1.$
- [D] $11t^2 + s^2 = 3.$
- [E] $11t^2 + s^2 = 11.$

Teste 6 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 7 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 9 Assinale a alternativa correta:

- A existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- E existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

Teste 10 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- B $a \neq 1$ e $b = 2$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- D $a \neq 0$ e $b = 1$.
- E $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

Teste 11 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 11.
- B 3.
- C 6.
- D 1.
- E 13.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,3,3)$.
- B $(3,6,9)$.
- C $(1,1,1)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(4,4,4)$.

Teste 13 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 14 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- C $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- E (x, y, z).

Teste 16 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

+55/11/2+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] $1, \frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [B] $1, \frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [C] $1, 4$ e 5.
- [D] $1, 2$ e -3.
- [E] $1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 2 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [B] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [C] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- [D] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- [E] $a \neq 0$ e $b = 1$.

Teste 3 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

A $11t^2 + s^2 = 7$.

B $11t^2 + s^2 = 1$.

C $11t^2 + s^2 = 11$.

D $11t^2 + s^2 = 4$.

E $11t^2 + s^2 = 3$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 5 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [B] $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- [C] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [D] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t}\cos(3t)$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- [A] $a = \frac{1}{5}$.
- [B] $a = 2$.
- [C] $a = 1$.
- [D] $a \neq -1$.
- [E] $a = \frac{4}{5}$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,3,3)$.
- B $(3,6,9)$.
- C $(1,1,1)$.
- D $(4,4,4)$.
- E $(6,6,6)$.

Teste 8 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 9 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

Teste 10 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 13.
- B 3.
- C 6.
- D 1.
- E 11.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C todas as afirmações são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

A $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

B (x, y, z).

C $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

D $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

E $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 13 Assinale a alternativa correta:

A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

C existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

D existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

E existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

Teste 14 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [B] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [C] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [D] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [E] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.

Teste 15 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x, y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x, y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x, y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x, y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x, y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 16 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a = -1$.
- [B] $a \neq 0$.
- [C] $a \neq 1$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a = 0$.

+56/11/50+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a = \frac{4}{5}$.
- C $a = \frac{1}{5}$.
- D $a = 2$.
- E $a \neq -1$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1, 2, 3)$ é igual a:

- A $(6, 6, 6)$.
- B $(3, 3, 3)$.
- C $(1, 1, 1)$.
- D $(3, 6, 9)$.
- E $(4, 4, 4)$.

Teste 3 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- D A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- E não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.

Teste 4 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- B existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- C existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- D existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

Teste 5 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- B $a \neq 0$ e $b = 1$.
- C $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- D $a \neq 1$ e $b = 2$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 6 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 7 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 3.$
- B $11t^2 + s^2 = 4.$
- C $11t^2 + s^2 = 11.$
- D $11t^2 + s^2 = 1.$
- E $11t^2 + s^2 = 7.$

Teste 8 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x, y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x, y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x, y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x, y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x, y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 10 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- [A] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- [B] $1, 2$ e -3.
- [C] 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- [D] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- [E] $1, 4$ e 5.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 12 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

A 13.

B 6.

C 1.

D 3.

E 11.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x,y,z) no subespaço $[(1,1,2),(2,0,2)]$ é igual a:

A $\frac{1}{3}(x-2y+2z, -2x+y+2z, 2x+2y+z)$.

B $\frac{1}{3}(4x+y-z, x+4y-z, -x-y+4z)$.

C $\frac{1}{3}(4x+y-z, -x+2y+z, 2x+2y+z)$.

D $\frac{1}{3}(2x-y+z, -x+2y+z, x+y+2z)$.

E (x,y,z).

Teste 14 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t)$.
- D $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 15 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 0$.
- B $a = 1$.
- C $a \neq 1$.
- D $a = -1$.
- E $a \neq 0$.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (II) é verdadeira.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

+57/11/38+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x+3y+2z, -2y-2z, x+2y+3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A $1, 2$ e -3.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- D $1, 4$ e 5.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 2 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 0$.
- B $a = -1$.
- C $a \neq 1$.
- D $a = 1$.
- E $a \neq 0$.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 4 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 5 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^{2t}\cos(3t)$.
- [B] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [C] $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [D] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(6,6,6)$.
- B $(1,1,1)$.
- C $(3,6,9)$.
- D $(4,4,4)$.
- E $(3,3,3)$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{4}{5}$.
- B $a \neq -1$.
- C $a = 2$.
- D $a = \frac{1}{5}$.
- E $a = 1$.

Teste 9 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- B A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- C não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 10 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 11 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t, t^3]$.
- B $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- C $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- D $\text{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- E $\text{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\text{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- B (x, y, z).
- C $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- D $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

Teste 13 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [B] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [C] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [E] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\text{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

Teste 14 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [B] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- [C] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [D] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [E] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 15 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 1$.
- B $11t^2 + s^2 = 11$.
- C $11t^2 + s^2 = 7$.
- D $11t^2 + s^2 = 4$.
- E $11t^2 + s^2 = 3$.

Teste 16 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 6.
- B 11.
- C 3.
- D 1.
- E 13.

+58/11/26+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+59/1/24+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x,y,z) no subespaço $[(1,1,2),(2,0,2)]$ é igual a:

- A (x,y,z).
- B $\frac{1}{3}(2x-y+z, -x+2y+z, x+y+2z)$.
- C $\frac{1}{3}(4x+y-z, -x+2y+z, 2x+2y+z)$.
- D $\frac{1}{3}(4x+y-z, x+4y-z, -x-y+4z)$.
- E $\frac{1}{3}(x-2y+2z, -2x+y+2z, 2x+2y+z)$.

Teste 2 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O,\mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x-y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 1$.
- B $11t^2 + s^2 = 4$.
- C $11t^2 + s^2 = 11$.
- D $11t^2 + s^2 = 7$.
- E $11t^2 + s^2 = 3$.

Teste 3 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 1.
- C 13.
- D 11.
- E 6.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \neq -1$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a = \frac{1}{5}$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a = \frac{4}{5}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a = 2$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a = 1$.

Teste 5 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \neq 0$ e $b = 1$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a \neq 1$ e $b = 2$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,6,9)$.
- B $(1,1,1)$.
- C $(3,3,3)$.
- D $(6,6,6)$.
- E $(4,4,4)$.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A $1, 2$ e -3.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- D $1, 4$ e 5.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 8 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

B $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

C $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 10 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 11 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^\perp$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 13 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- [B] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [C] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [D] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [E] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 14 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t)$.
- C $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 15 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a \neq 1$.
- B $a = 0$.
- C $a = 1$.
- D $a \neq 0$.
- E $a = -1$.

Teste 16 Assinale a alternativa correta:

- A existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- E existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

+59/11/14+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(4,4,4)$.
- B $(6,6,6)$.
- C $(3,6,9)$.
- D $(1,1,1)$.
- E $(3,3,3)$.

Teste 3 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 1.$
- B $11t^2 + s^2 = 7.$
- C $11t^2 + s^2 = 3.$
- D $11t^2 + s^2 = 4.$
- E $11t^2 + s^2 = 11.$

Teste 4 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- B $1, 4$ e 5.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- E $1, 2$ e -3.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- B $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- C $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- D (x, y, z).
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 6 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$ e que $T(0, 1, 1 + i) = (0, 1, 1 + i)$. Se $T(1, 2, 3) = (a, b, c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 13.
- B 3.
- C 11.
- D 6.
- E 1.

Teste 7 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{4}{5}$.
- B $a = \frac{1}{5}$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = 1$.
- E $a = 2$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{A}$ apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- $\boxed{B}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{C}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{D}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{E}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 10 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- $\boxed{A}$ $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- $\boxed{B}$ $a \neq 0$ e $b = 1$.
- $\boxed{C}$ $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- $\boxed{D}$ $a \neq 1$ e $b = 2$.
- $\boxed{E}$ $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.

Teste 11 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 13 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a \neq 1$.
- B $a = -1$.
- C $a \neq 0$.
- D $a = 0$.
- E $a = 1$.

Teste 14 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- B A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- C não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- D A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 15 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [B] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [C] $2e^{2t}\cos(3t)$.
- [D] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- [E] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 16 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [B] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [C] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [E] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+61/1/60+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

Boa Prova!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- B $1, 4$ e 5.
- C 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- E $1, 2$ e -3.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- [A] $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- [B] $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- [C] $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- [D] (x, y, z).
- [E] $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

Teste 5 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [E] $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 6 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 11.$
- [B] $11t^2 + s^2 = 4.$
- [C] $11t^2 + s^2 = 7.$
- [D] $11t^2 + s^2 = 1.$
- [E] $11t^2 + s^2 = 3.$

Teste 7 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- C B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- D A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- E A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 8 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a = -1$.
- C $a \neq 1$.
- D $a = 0$.
- E $a \neq 0$.

Teste 9 Seja $T: P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- [B] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- [E] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

Teste 10 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$.
- [B] existe um único operador linear $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [C] existe um único operador linear $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [E] existem infinitos operadores lineares $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1+t+t^2) = 2+3t+99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a \neq -1$.
- B $a = 2$.
- C $a = \frac{4}{5}$.
- D $a = 1$.
- E $a = \frac{1}{5}$.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] 6.
- [B] 11.
- [C] 13.
- [D] 1.
- [E] 3.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- [A] $(6,6,6)$.
- [B] $(3,6,9)$.
- [C] $(4,4,4)$.
- [D] $(3,3,3)$.
- [E] $(1,1,1)$.

Teste 15 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- C $a \neq 1$ e $b = 2$.
- D $a \neq 0$ e $b = 1$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 16 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- C $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- D $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t)$.

+61/11/50+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E
Teste 2: A B C D E
Teste 3: A B C D E
Teste 4: A B C D E
Teste 5: A B C D E
Teste 6: A B C D E
Teste 7: A B C D E
Teste 8: A B C D E
Teste 9: A B C D E
Teste 10: A B C D E
Teste 11: A B C D E
Teste 12: A B C D E
Teste 13: A B C D E
Teste 14: A B C D E
Teste 15: A B C D E
Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 2 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- [B] $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- [C] $a \neq 0$ e $b = 1$.
- [D] $a \neq 1$ e $b = 2$.
- [E] $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 3 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.
C $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.
E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 4 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

A $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
B $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
C $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
D $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
E $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 5 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- B $1, 2$ e -3.
- C $1, 4$ e 5.
- D 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a \neq -1$.
- B $a = \frac{4}{5}$.
- C $a = 2$.
- D $a = \frac{1}{5}$.
- E $a = 1$.

Teste 7 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.
- [B] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [C] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [E] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 9 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [B] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [C] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [D] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [E] A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 10 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- [A] $11t^2 + s^2 = 7$.
- [B] $11t^2 + s^2 = 1$.
- [C] $11t^2 + s^2 = 4$.
- [D] $11t^2 + s^2 = 3$.
- [E] $11t^2 + s^2 = 11$.

Teste 11 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 6.
- C 11.
- D 1.
- E 13.

Teste 12 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t)$.
- C $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x,y,z) no subespaço $[(1,1,2),(2,0,2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x+y-z, -x+2y+z, 2x+2y+z)$.
- B $\frac{1}{3}(x-2y+2z, -2x+y+2z, 2x+2y+z)$.
- C (x,y,z).
- D $\frac{1}{3}(4x+y-z, x+4y-z, -x-y+4z)$.
- E $\frac{1}{3}(2x-y+z, -x+2y+z, x+y+2z)$.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [B] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [C] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [D] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- [E] $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- [A] $(4,4,4)$.
- [B] $(3,6,9)$.
- [C] $(6,6,6)$.
- [D] $(1,1,1)$.
- [E] $(3,3,3)$.

Teste 16 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a \neq 1$.
- B $a = 0$.
- C $a = -1$.
- D $a = 1$.
- E $a \neq 0$.

+62/11/38+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

+63/1/36+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sabe-se que $(1, 3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- A $11t^2 + s^2 = 4.$
- B $11t^2 + s^2 = 1.$
- C $11t^2 + s^2 = 3.$
- D $11t^2 + s^2 = 11.$
- E $11t^2 + s^2 = 7.$

Teste 2 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.
- C $1, 2$ e -3.
- D $1, 4$ e 5.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

Teste 3 Assinale a alternativa correta:

- [A] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [B] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [C] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [E] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

Teste 4 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a \neq 1$.
- [B] $a = 0$.
- [C] $a = -1$.
- [D] $a = 1$.
- [E] $a \neq 0$.

Teste 5 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 0$ e $b = 1$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- C $a \neq 1$ e $b = 2$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 6 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 11.
- B 13.
- C 1.
- D 3.
- E 6.

Teste 7 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

C $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

D $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 9 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^\perp$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D apenas a afirmação (II) é verdadeira.

E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

A $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

B $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

C $2e^{2t}\cos(3t)$.

D $2\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t)$.

E $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- A $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- B $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- C (x, y, z).
- D $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- E $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1, 2, 3)$ é igual a:

- A $(3, 6, 9)$.
- B $(6, 6, 6)$.
- C $(1, 1, 1)$.
- D $(4, 4, 4)$.
- E $(3, 3, 3)$.

Teste 13 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{E}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- A $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- B $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- C $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- D $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- E $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 14 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- B A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- C A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- D não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2), (1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a \neq -1$.
- B $a = \frac{4}{5}$.
- C $a = 2$.
- D $a = \frac{1}{5}$.
- E $a = 1$.

+63/11/26+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ___________________________________ **NUSP:** _____________ **Turma:** _____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

- A 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.
- B 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
- C $1, 4$ e 5.
- D $1, 2$ e -3.
- E 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 2+i)$ for um autovetor de T, então $(1-i, 2-i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1+i, 1+i)$ for um autovetor de T, então $(1,1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 3 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.
- B $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t - t^2 + t^3, -t + t^2 + t^3]$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = [1 - t + t^2 - t^3, 1 + t - t^2 - t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.
- E $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2), (1,-1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

- A $a = \frac{4}{5}$.
- B $a = 2$.
- C $a \neq -1$.
- D $a = \frac{1}{5}$.
- E $a = 1$.

Teste 5 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- [B] A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- [C] A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- [D] B é semelhante a C e A não é semelhante a C.
- [E] A é semelhante a B e B é semelhante a C.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

- [A] $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.
- [B] $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.
- [C] $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.
- [D] $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.
- [E] (x, y, z).

Teste 7 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Assinale a alternativa correta:

- [A] existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.
- [B] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.
- [C] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.
- [D] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.
- [E] existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$ e que $T(0, 1, 1 + i) = (0, 1, 1 + i)$. Se $T(1, 2, 3) = (a, b, c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- [A] 13.
- [B] 1.
- [C] 11.
- [D] 3.
- [E] 6.

Teste 10 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- A $a \neq 1$ e $b = 2$.
- B $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- C $a \neq 0$ e $b = 1$.
- D $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.
- E $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

- A $(3,6,9)$.
- B $(3,3,3)$.
- C $(4,4,4)$.
- D $(1,1,1)$.
- E $(6,6,6)$.

Teste 12 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- $\boxed{\text{A}}$ $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{B}}$ $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{C}}$ $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{D}}$ $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{E}}$ $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 13 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

- $\boxed{\text{A}}$ $11t^2 + s^2 = 11$.
- $\boxed{\text{B}}$ $11t^2 + s^2 = 1$.
- $\boxed{\text{C}}$ $11t^2 + s^2 = 7$.
- $\boxed{\text{D}}$ $11t^2 + s^2 = 4$.
- $\boxed{\text{E}}$ $11t^2 + s^2 = 3$.

Teste 14 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^{2t}\cos(3t)$.
- B $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- C $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.
- D $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- E $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

- A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- C $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 16 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- [A] $a = 1$.
- [B] $a = -1$.
- [C] $a = 0$.
- [D] $a \neq 0$.
- [E] $a \neq 1$.

+64/11/14+

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E