



MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+1/2/59+



**Teste 1** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{1 - t\}$ .
- C  $\{-5 + 9t\}$ .
- D  $\{t + 2\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .

**Teste 2** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A 21.
- B 12.
- C 23.
- D 34.
- E 40.



**Teste 3** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) todas as afirmações são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- (A)  $\frac{1}{5}$ .
- (B)  $-5$ .
- (C)  $22$ .
- (D)  $\frac{1}{10}$ .
- $\frac{22}{5}$ .



**Teste 5** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

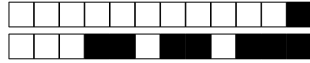
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = -1$ .
- B  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a = 0$ .
- E  $a = \frac{1}{2}$ .

**Teste 6** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $-16A$ .
- B  $64I$ .
- C  $0$ .
- D  $-64I$ .
- E  $16A$ .



**Teste 7** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .

**Teste 8** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 9** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- B**  $T$  é injetora.
- C**  $T$  é sobrejetora.
- D** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.

**Teste 10** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A** 1.
- B** 0.
- C** -1.
- D**  $\frac{1}{2}$ .
- E** -2.



**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- (A)  $(-7, 2, 2)$ .
- (B)  $(-1, 8, -10)$ .
- (C)  $(-1, 3, 1)$ .
- (D)  $(2, 8, -4)$ .
- (E)  $(-1, 9, -9)$ .

**Teste 12** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- (A) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- (B) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- (C)  $A$  é inversível.
- (D) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- (E) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 13** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- (A) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- (B) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- (C) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- (D) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- (E) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.





**Teste 14** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são falsas.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 15** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- o operador  $T$  é simétrico.
- $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- $0$  é um autovalor de  $T$ .
- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- $1$  é um autovalor de  $T$ .



**Teste 16** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 16.
- B -2.
- C 0.
- D 4.
- E 8.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E





MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+2/2/47+



**Teste 1** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- $\{-5 + 9t\}$ .
- $\{3 + 4t\}$ .
- $\{1 - t\}$ .
- $\{t - 5\}$ .
- $\{t + 2\}$ .

**Teste 2** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = 0$ .
- $a = -1$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .
- $a = 1$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .



**Teste 3** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- D o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.

**Teste 4** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 0 é um autovalor de  $T$ .
- B  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- C 1 é um autovalor de  $T$ .
- D  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- E o operador  $T$  é simétrico.

**Teste 5** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E  $A$  é inversível.





**Teste 6** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

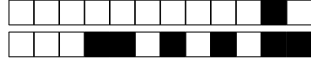
- A) todas as afirmações são falsas.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 7** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- C)  $T$  é sobrejetora.
- D) a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- E)  $T$  é injetora.



**Teste 8** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 16.
- 0.
- 4.
- 8.
- 2.

**Teste 9** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- 23.
- 34.
- 21.
- 40.
- 12.



**Teste 10** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- C**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- D**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- E**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .

**Teste 11** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B** apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E** todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 9, -9)$ .
- B  $(2, 8, -4)$ .
- C  $(-1, 3, 1)$ .
- D  $(-7, 2, 2)$ .
- E  $(-1, 8, -10)$ .

**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A 22.
- B  $\frac{1}{10}$ .
- C  $\frac{22}{5}$ .
- D  $-5$ .
- E  $\frac{1}{5}$ .



**Teste 14** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

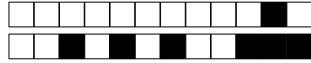
- A)  $16A$ .
- B)  $-16A$ .
- C)  $0$ .
- D)  $64I$ .
- E)  $-64I$ .

**Teste 15** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A)  $1$ .
- B)  $\frac{1}{2}$ .
- C)  $0$ .
- D)  $-1$ .
- E)  $-2$ .



**Teste 16** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

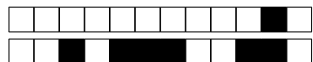
for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

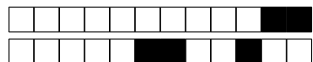
Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+2/12/37+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+3/2/35+



**Teste 1** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- D  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- E  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .

**Teste 2** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{10}$ .
- B 22.
- C  $\frac{22}{5}$ .
- D  $\frac{1}{5}$ .
- E  $-5$ .



**Teste 3** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são falsas.
- B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C) todas as afirmações são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 4** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 8.
- B) -2.
- C) 4.
- D) 16.
- E) 0.



**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

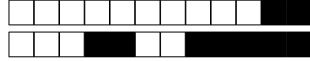
- (A) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (B) todas as afirmações são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 6** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.



**Teste 7** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{1 - t\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{3 + 4t\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{t + 2\}$ .

**Teste 8** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- B o operador  $T$  é simétrico.
- C  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- D  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- E  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .



**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 3, 1)$ .
- B  $(2, 8, -4)$ .
- C  $(-7, 2, 2)$ .
- D  $(-1, 9, -9)$ .
- E  $(-1, 8, -10)$ .

**Teste 10** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $-64I$ .
- B  $0$ .
- C  $16A$ .
- D  $64I$ .
- E  $-16A$ .



**Teste 11** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 D todas as afirmações são verdadeiras.  
 E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 12** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A -2.  
 B 1.  
 C 0.  
 D  $\frac{1}{2}$ .  
 E -1.





**Teste 13** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- $A$  é inversível.
- se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 14** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

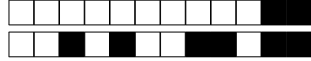
- a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- $T$  é injetora.
- $T$  é sobrejetora.
- a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.

**Teste 15** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = 1$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .
- $a = -1$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .
- $a = 0$ .



**Teste 16** Considere a base

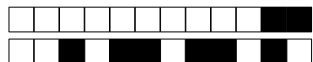
$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 12.
- B) 40.
- C) 23.
- D) 21.
- E) 34.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

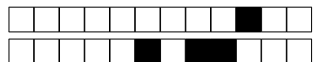
Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+3/12/25+



+4/1/24+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

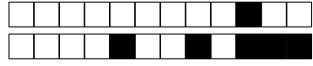
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

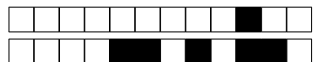
1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+4/2/23+



**Teste 1** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- C) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

**Teste 2** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A) 40.
- B) 23.
- C) 12.
- D) 21.
- 34.



**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{t - 5\}$ .
- D  $\{1 - t\}$ .
- E  $\{t + 2\}$ .

**Teste 4** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- B  $T$  é injetora.
- C a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D  $T$  é sobrejetora.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.





**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- (A)  $(-1, 3, 1)$ .
- (B)  $(-1, 8, -10)$ .
- (C)  $(2, 8, -4)$ .
- (D)  $(-1, 9, -9)$ .
- (E)  $(-7, 2, 2)$ .

**Teste 6** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

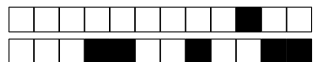
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (A) o operador  $T$  é simétrico.
- (B)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- (C)  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- (D)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- (E)  $0$  é um autovalor de  $T$ .



**Teste 7** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $16A$ .
- B)  $64I$ .
- C)  $0$ .
- D)  $-16A$ .
- E)  $-64I$ .

**Teste 8** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E)  $A$  é inversível.

**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A)  $\frac{22}{5}$ .
- B)  $-5$ .
- C)  $\frac{1}{10}$ .
- D)  $22$ .
- E)  $\frac{1}{5}$ .



**Teste 10** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são falsas.
- todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 11** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 4.
- B) 8.
- C) 16.
- D) -2.
- E) 0.



**Teste 12** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) todas as afirmações são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Teste 13** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- (A)  $\frac{1}{2}$ .
- (B)  $-1$ .
- (C)  $-2$ .
- (D)  $0$ .
- (E)  $1$ .



**Teste 14** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

**A**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .

**B**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .

**C**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .

**D**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .

**E**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .

**Teste 15** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

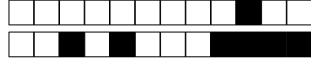
**A**  $a = 1$ .

**B**  $a = 0$ .

**C**  $a = \frac{1}{2}$ .

**D**  $a = -1$ .

**E**  $a \neq \frac{1}{2}$ .



**Teste 16** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D

Teste 2:  A  B  C  D

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D

Teste 7:  A  B  C  D

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

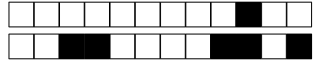
Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+4/12/13+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+5/2/11+



**Teste 1** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = \frac{1}{2}$ .
- B  $a = -1$ .
- C  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- D  $a = 1$ .
- E  $a = 0$ .

**Teste 2** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $-16A$ .
- B  $64I$ .
- C  $16A$ .
- D  $0$ .
- E  $-64I$ .



**Teste 3** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

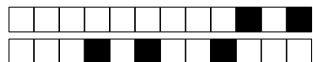
- A) 8.
- B) 4.
- C) 0.
- D) 16.
- E) -2.

**Teste 4** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A) a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- B) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- C)  $T$  é injetora.
- D)  $T$  é sobrejetora.
- E) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.



**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

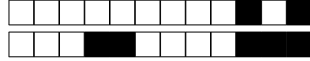
para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A)  $(-7, 2, 2)$ .
- B)  $(2, 8, -4)$ .
- C)  $(-1, 8, -10)$ .
- D)  $(-1, 3, 1)$ .
- E)  $(-1, 9, -9)$ .



**Teste 7** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- C  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- E  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .

**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{10}$ .
- B 22.
- C  $\frac{22}{5}$ .
- D  $\frac{1}{5}$ .
- E  $-5$ .



**Teste 9** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.

**Teste 10** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

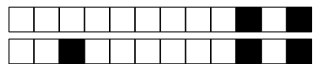
- A  $A$  é inversível.
- B se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 11** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $\frac{1}{2}$ .
- B 0.
- C -2.
- D 1.
- E -1.



**Teste 12** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 13** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.





**Teste 14** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t + 2\}$ .
- B  $\{3 + 4t\}$ .
- C  $\{t - 5\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{1 - t\}$ .

**Teste 15** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

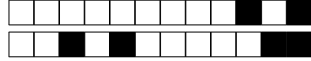
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 1 é um autovalor de  $T$ .
- B o operador  $T$  é simétrico.
- C  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- D 0 é um autovalor de  $T$ .
- E  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .



**Teste 16** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A 12.
- B 40.
- C 23.
- D 34.
- E 21.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+5/12/1+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+6/2/59+



**Teste 1** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são falsas.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 2** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A) 1.
- B) -2.
- C) 0.
- D) -1.
- E)  $\frac{1}{2}$ .



**Teste 3** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) -2.
- B) 8.
- C) 4.
- D) 16.
- E) 0.

**Teste 4** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.





**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 6** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- E o conjunto solução dessa equação é uma elipse.



**Teste 7** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $16A$ .
- B)  $0$ .
- C)  $-16A$ .
- D)  $64I$ .
- E)  $-64I$ .

**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A)  $\frac{1}{10}$ .
- B)  $\frac{22}{5}$ .
- C)  $22$ .
- D)  $\frac{1}{5}$ .
- E)  $-5$ .



**Teste 9** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- B**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- C**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- D**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- E**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .

**Teste 10** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A**  $\{3 + 4t\}$ .
- B**  $\{-5 + 9t\}$ .
- C**  $\{t - 5\}$ .
- D**  $\{t + 2\}$ .
- E**  $\{1 - t\}$ .



**Teste 11** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- 34.
- 23.
- 21.
- 12.
- 40.

**Teste 12** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = -1$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .
- $a = 1$ .
- $a = 0$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .



**Teste 13** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A**  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- B** o operador  $T$  é simétrico.
- C**  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- D**  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- E**  $0$  é um autovalor de  $T$ .

**Teste 14** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A**  $(-7, 2, 2)$ .
- B**  $(-1, 8, -10)$ .
- C**  $(-1, 9, -9)$ .
- D**  $(2, 8, -4)$ .
- E**  $(-1, 3, 1)$ .

**Teste 15** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A** se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B** se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C** se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D** se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E**  $A$  é inversível.



**Teste 16** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C  $T$  é sobrejetora.
- D  $T$  é injetora.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+6/12/49+





MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+7/2/47+



**Teste 1** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A) 0.
- B)  $-64I$ .
- C)  $16A$ .
- D)  $64I$ .
- E)  $-16A$ .

**Teste 2** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 12.
- C) 23.
- D) 34.
- E) 40.



**Teste 3** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- C  $T$  é sobrejetora.
- D  $T$  é injetora.
- E a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.

**Teste 4** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 5** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 0$ .
- B  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a = \frac{1}{2}$ .
- E  $a = -1$ .

**Teste 6** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

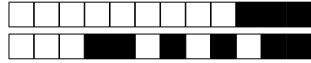
$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A 1.
- B  $-1$ .
- C 0.
- D  $\frac{1}{2}$ .
- E  $-2$ .

**Teste 7** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B  $A$  é inversível.
- C se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .



**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 9, -9)$ .
- B  $(-1, 8, -10)$ .
- C  $(2, 8, -4)$ .
- D  $(-1, 3, 1)$ .
- E  $(-7, 2, 2)$ .

**Teste 9** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 4.
- B  $-2$ .
- C 16.
- D 0.
- E 8.



**Teste 10** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.  
 B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 E) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Teste 11** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A)  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .  
 B)  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .  
 C)  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .  
 D)  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .  
 E)  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .



**Teste 12** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- $\frac{22}{5}$ .
- $\frac{1}{10}$ .
- $-5$ .
- $22$ .
- $\frac{1}{5}$ .





**Teste 14** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E o conjunto solução dessa equação é uma elipse.

**Teste 15** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

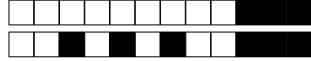
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- B  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- C  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- D o operador  $T$  é simétrico.
- E  $0$  é um autovalor de  $T$ .



**Teste 16** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t + 2\}$ .
- B  $\{1 - t\}$ .
- C  $\{3 + 4t\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{t - 5\}$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

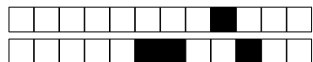
Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+7/12/37+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+8/2/35+



**Teste 1** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 34.
- C) 12.
- D) 40.
- E) 23.

**Teste 2** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1,1,1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1,4,-2)$  é igual a:

- A)  $(-1, 8, -10)$ .
- B)  $(-7, 2, 2)$ .
- C)  $(-1, 3, 1)$ .
- D)  $(-1, 9, -9)$ .
- E)  $(2, 8, -4)$ .



**Teste 3** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A -1.
- B -2.
- C 0.
- D 1.
- E  $\frac{1}{2}$ .

**Teste 4** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.





**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{t + 2\}$ .

**Teste 6** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

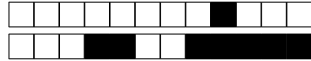
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 0 é um autovalor de  $T$ .
- B 1 é um autovalor de  $T$ .
- C o operador  $T$  é simétrico.
- D  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- E  $-1$  é um autovalor de  $T$ .



**Teste 7** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

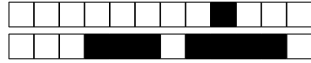
- A)  $16A$ .
- B)  $-16A$ .
- C)  $0$ .
- D)  $64I$ .
- E)  $-64I$ .

**Teste 8** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A)  $T$  é injetora.
- B) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C) a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- D)  $T$  é sobrejetora.
- E) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.



**Teste 9** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B  $x(t) = e^t (2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t} (\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t} (2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- E  $x(t) = e^{3t} (2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .

**Teste 10** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 11** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- B  $a = 1$ .
- C  $a = -1$ .
- D  $a = 0$ .
- E  $a = \frac{1}{2}$ .

**Teste 12** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- D o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- E o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

**Teste 13** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A  $A$  é inversível.
- B se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .



**Teste 14** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

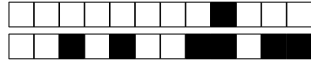
- A) 0.
- B) 8.
- C) 4.
- D) -2.
- E) 16.

**Teste 15** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) todas as afirmações são falsas.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

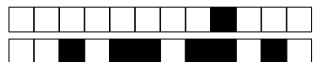


**Teste 16** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- $\frac{22}{5}$ .
- $\frac{1}{5}$ .
- $-5$ .
- $\frac{1}{10}$ .
- $22$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

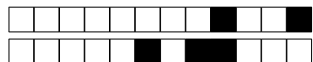
Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+8/12/25+





IDENTIFICAÇÃO

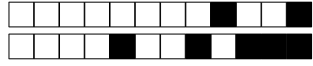
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+9/2/23+



**Teste 1** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = \frac{1}{2}$ .
- B  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- C  $a = -1$ .
- D  $a = 1$ .
- E  $a = 0$ .

**Teste 2** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A  $-2$ .
- B  $0$ .
- C  $8$ .
- D  $4$ .
- E  $16$ .



**Teste 3** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- C a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- D  $T$  é sobrejetora.
- E  $T$  é injetora.

**Teste 4** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

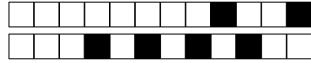
$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- B o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- C o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.

**Teste 5** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B  $A$  é inversível.
- C se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

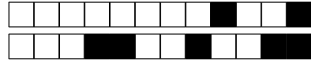


**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-7, 2, 2)$ .
- B  $(-1, 3, 1)$ .
- C  $(2, 8, -4)$ .
- D  $(-1, 8, -10)$ .
- E  $(-1, 9, -9)$ .

**Teste 7** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $64I$ .
- B  $0$ .
- C  $-64I$ .
- D  $16A$ .
- E  $-16A$ .



**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t + 2\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{3 + 4t\}$ .
- E  $\{-5 + 9t\}$ .

**Teste 9** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A 23.
- B 12.
- C 34.
- D 40.
- E 21.



**Teste 10** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 1 é um autovalor de  $T$ .
- B  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- C  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- D 0 é um autovalor de  $T$ .
- E o operador  $T$  é simétrico.

**Teste 11** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- E  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .



**Teste 12** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A -2.
- B 0.
- C -1.
- D  $\frac{1}{2}$ .
- E 1.

**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B -5.
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D 22.
- E  $\frac{22}{5}$ .





**Teste 14** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

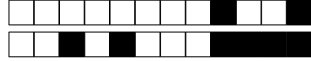
- (A) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (B) todas as afirmações são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 15** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (B) todas as afirmações são falsas.
- (C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (D) todas as afirmações são verdadeiras.
- (E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 16** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

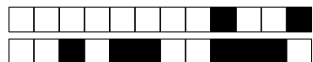
for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

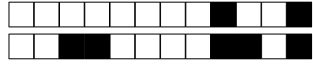
Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+9/12/13+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+10/2/11+



**Teste 1** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A**  $T$  é injetora.
- B**  $T$  é sobrejetora.
- C** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- D** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.

**Teste 2** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C** apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D** todas as afirmações são verdadeiras.
- E** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



**Teste 3** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 8.
- B) 4.
- C) -2.
- D) 16.
- E) 0.

**Teste 4** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A) 0.
- B) -1.
- C)  $\frac{1}{2}$ .
- D) 1.
- E) -2.





**Teste 5** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

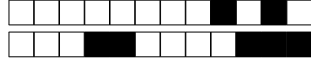
- A) 12.
- B) 23.
- C) 34.
- D) 21.
- E) 40.

**Teste 6** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- C) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- D) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.



**Teste 7** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B  $-5$ .
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $22$ .

**Teste 8** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E  $A$  é inversível.

**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-7, 2, 2)$ .
- B  $(-1, 3, 1)$ .
- C  $(-1, 8, -10)$ .
- D  $(2, 8, -4)$ .
- E  $(-1, 9, -9)$ .



**Teste 10** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

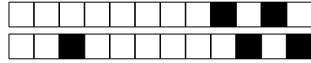
- (A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (B) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (D) todas as afirmações são verdadeiras.
- (E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 11** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- (A)  $a = 1$ .
- (B)  $a = 0$ .
- (C)  $a = -1$ .
- (D)  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- (E)  $a = \frac{1}{2}$ .



**Teste 12** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $16A$ .
- B)  $64I$ .
- C)  $0$ .
- D)  $-64I$ .
- E)  $-16A$ .

**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A)  $\{t + 2\}$ .
- B)  $\{t - 5\}$ .
- C)  $\{3 + 4t\}$ .
- D)  $\{1 - t\}$ .
- E)  $\{-5 + 9t\}$ .



**Teste 14** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

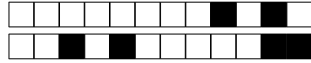
- A 1 é um autovalor de  $T$ .
- B  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- C  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- D o operador  $T$  é simétrico.
- 0 é um autovalor de  $T$ .

**Teste 15** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- C  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .



**Teste 16** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são falsas.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) todas as afirmações são verdadeiras.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+10/12/1+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+11/2/59+



**Teste 1** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A**  $T$  é injetora.
- B** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C**  $T$  é sobrejetora.
- D** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.

**Teste 2** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B** todas as afirmações são falsas.
- C** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E** todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 3** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A) 0.
- B)  $16A$ .
- C)  $-16A$ .
- D)  $64I$ .
- E)  $-64I$ .

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A)  $-5$ .
- B)  $\frac{1}{10}$ .
- C)  $\frac{1}{5}$ .
- D)  $\frac{22}{5}$ .
- E)  $22$ .



**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

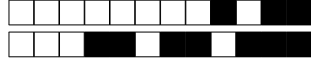
- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 6** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) -2.
- B) 16.
- C) 0.
- D) 8.
- E) 4.



**Teste 7** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A -1.
- B  $\frac{1}{2}$ .
- C 0.
- D 1.
- E -2.

**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t + 2\}$ .
- B  $\{1 - t\}$ .
- C  $\{t - 5\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .



**Teste 9** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.

**Teste 10** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- $(-1, 3, 1)$ .
- $(-1, 9, -9)$ .
- $(-1, 8, -10)$ .
- $(-7, 2, 2)$ .
- $(2, 8, -4)$ .



**Teste 11** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 40.
- B) 21.
- C) 23.
- D) 34.
- E) 12.

**Teste 12** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1,1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A) 1 é um autovalor de  $T$ .
- B) 0 é um autovalor de  $T$ .
- C)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- D) o operador  $T$  é simétrico.
- E)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .





**Teste 13** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

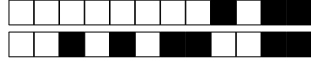
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 14** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- $x(t) = e^t (2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- $x(t) = e^{3t} (\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- $x(t) = e^{3t} (2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- $x(t) = e^{3t} (2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .



**Teste 15** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E  $A$  é inversível.

**Teste 16** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 0$ .
- B  $a = -1$ .
- C  $a = \frac{1}{2}$ .
- D  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- E  $a = 1$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+11/12/49+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+12/2/47+



**Teste 1** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- (A) todas as afirmações são falsas.
- (B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (E) todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 2** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- (A)  $a = 0$ .
- (B)  $a = -1$ .
- (C)  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- (D)  $a = 1$ .
- (E)  $a = \frac{1}{2}$ .



**Teste 3** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- 34.
- 21.
- 40.
- 23.
- 12.

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1,1,1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1,4,-2)$  é igual a:

- $(-1, 8, -10)$ .
- $(-1, 9, -9)$ .
- $(2, 8, -4)$ .
- $(-7, 2, 2)$ .
- $(-1, 3, 1)$ .





**Teste 5** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

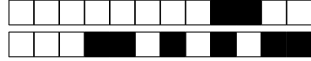
- A  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- B  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- C o operador  $T$  é simétrico.
- D  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- E  $0$  é um autovalor de  $T$ .

**Teste 6** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A  $-2$ .
- B  $16$ .
- C  $8$ .
- D  $4$ .
- E  $0$ .



**Teste 7** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (B) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (E) todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 8** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- (A)  $-64I$ .
- (B)  $-16A$ .
- (C)  $16A$ .
- (D)  $64I$ .
- (E)  $0$ .



**Teste 9** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- C**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- D**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- E**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .

**Teste 10** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A** se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B** se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C**  $A$  é inversível.
- D** se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E** se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .



**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B  $\frac{22}{5}$ .
- C  $-5$ .
- D  $22$ .
- E  $\frac{1}{10}$ .

**Teste 12** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $\frac{1}{2}$ .
- B  $0$ .
- C  $1$ .
- D  $-2$ .
- E  $-1$ .



**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{3 + 4t\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{t + 2\}$ .

**Teste 14** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

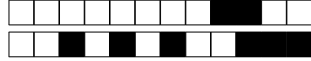
for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



**Teste 15** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.

**Teste 16** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- $T$  é injetora.
- a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- $T$  é sobrejetora.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

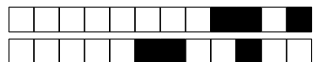
Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+12/12/37+





MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+13/2/35+



**Teste 1** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A)  $-5$ .
- B)  $22$ .
- C)  $\frac{22}{5}$ .
- D)  $\frac{1}{10}$ .
- E)  $\frac{1}{5}$ .

**Teste 2** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A)  $4$ .
- B)  $8$ .
- C)  $16$ .
- D)  $-2$ .
- E)  $0$ .



**Teste 3** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 4** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.



**Teste 5** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- C  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- E  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .

**Teste 6** Considere a base

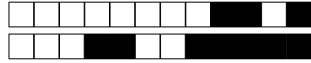
$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A 12.
- B 21.
- C 23.
- D 34.
- E 40.



**Teste 7** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = \frac{1}{2}$ .
- B  $a = 0$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a = -1$ .
- E  $a \neq \frac{1}{2}$ .

**Teste 8** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $64I$ .
- B  $-64I$ .
- C  $16A$ .
- D  $0$ .
- E  $-16A$ .



**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-7, 2, 2)$ .
- B  $(-1, 8, -10)$ .
- C  $(-1, 3, 1)$ .
- D  $(-1, 9, -9)$ .
- E  $(2, 8, -4)$ .

**Teste 10** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A  $A$  é inversível.
- B se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 11** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $-1$ .
- B  $0$ .
- C  $-2$ .
- D  $1$ .
- E  $\frac{1}{2}$ .



**Teste 12** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B  $T$  é sobrejetora.
- C a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D  $T$  é injetora.
- E a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.

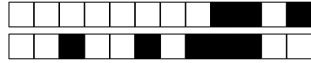
**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{t + 2\}$ .
- C  $\{-5 + 9t\}$ .
- D  $\{1 - t\}$ .
- E  $\{t - 5\}$ .





**Teste 14** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 C apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 D todas as afirmações são verdadeiras.  
 E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 15** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

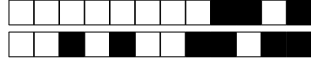
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .  
 B 1 é um autovalor de  $T$ .  
 C o operador  $T$  é simétrico.  
 D 0 é um autovalor de  $T$ .  
 E  $-1$  é um autovalor de  $T$ .

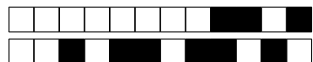


**Teste 16** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são falsas.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+13/12/25+



MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

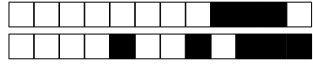
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+14/2/23+



**Teste 1** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Teste 2** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



**Teste 3** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E  $A$  é inversível.

**Teste 4** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = \frac{1}{2}$ .
- B  $a = -1$ .
- C  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- D  $a = 0$ .
- E  $a = 1$ .





**Teste 5** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

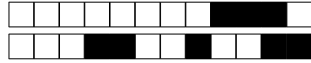
- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- E o conjunto solução dessa equação é uma elipse.

**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B  $-5$ .
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $22$ .



**Teste 7** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 23.
- B) 40.
- C) 21.
- D) 12.
- E) 34.

**Teste 8** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A) -2.
- B) 0.
- C) 1.
- D)  $\frac{1}{2}$ .
- E) -1.



**Teste 9** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- (A) todas as afirmações são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (E) todas as afirmações são falsas.

**Teste 10** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- (A)  $-64I$ .
- (B)  $16A$ .
- (C)  $64I$ .
- (D)  $0$ .
- (E)  $-16A$ .



**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 9, -9)$ .
- B  $(2, 8, -4)$ .
- C  $(-7, 2, 2)$ .
- D  $(-1, 8, -10)$ .
- E  $(-1, 3, 1)$ .

**Teste 12** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- C  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- E  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .



**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

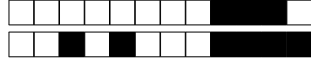
- $\{-5 + 9t\}$ .
- $\{3 + 4t\}$ .
- $\{t + 2\}$ .
- $\{t - 5\}$ .
- $\{1 - t\}$ .

**Teste 14** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- $A$  a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- $B$  a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- $C$  a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- $D$   $T$  é injetora.
- $E$   $T$  é sobrejetora.



**Teste 15** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- B 1 é um autovalor de  $T$ .
- C o operador  $T$  é simétrico.
- D  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- E 0 é um autovalor de  $T$ .

**Teste 16** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 8.
- B 16.
- C 4.
- D 0.
- E  $-2$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+14/12/13+





MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+15/2/11+



**Teste 1** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

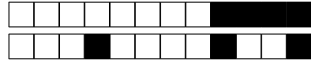
- A) 12.
- B) 34.
- C) 23.
- D) 21.
- E) 40.

**Teste 2** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) todas as afirmações são falsas.
- E) todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 3** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- (A) todas as afirmações são verdadeiras.
- (B) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- (C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 4** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- (A)  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .
- (B)  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .
- (C)  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .
- (D)  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .
- (E)  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .



**Teste 5** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

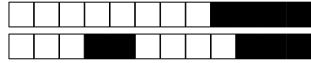
- A o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- E o conjunto solução dessa equação é uma elipse.

**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{t + 2\}$ .
- E  $\{-5 + 9t\}$ .



**Teste 7** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E  $A$  é inversível.

**Teste 8** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 0$ .
- B  $a = -1$ .
- C  $a = \frac{1}{2}$ .
- D  $a = 1$ .
- E  $a \neq \frac{1}{2}$ .

**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(2, 8, -4)$ .
- B  $(-1, 3, 1)$ .
- C  $(-1, 8, -10)$ .
- D  $(-7, 2, 2)$ .
- E  $(-1, 9, -9)$ .



**Teste 10** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

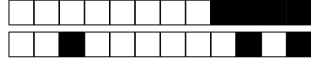
- $\frac{1}{2}$ .
- $-1$ .
- $-2$ .
- $0$ .
- $1$ .

**Teste 11** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- $-2$ .
- $8$ .
- $16$ .
- $4$ .
- $0$ .



**Teste 12** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D) todas as afirmações são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 13** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $-64I$ .
- B)  $0$ .
- C)  $64I$ .
- D)  $-16A$ .
- E)  $16A$ .





**Teste 14** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

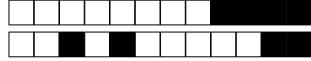
- A  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- B 1 é um autovalor de  $T$ .
- C o operador  $T$  é simétrico.
- D  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- 0 é um autovalor de  $T$ .

**Teste 15** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B  $-5$ .
- C 22.
- D  $\frac{1}{10}$ .
- $\frac{22}{5}$ .



**Teste 16** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A  $T$  é sobrejetora.
- B a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C  $T$  é injetora.
- D a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

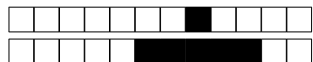
Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+15/12/1+



+16/1/60+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

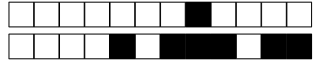
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+16/2/59+



**Teste 1** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- D  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- E  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .

**Teste 2** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{t - 5\}$ .
- D  $\{t + 2\}$ .
- E  $\{1 - t\}$ .



**Teste 3** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- B  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- C  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- D o operador  $T$  é simétrico.
- E  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .

**Teste 4** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.





**Teste 5** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.

**Teste 6** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são falsas.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



**Teste 7** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 8.
- B) 16.
- C) 4.
- D) -2.
- E) 0.

**Teste 8** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B)  $A$  é inversível.
- C) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .



**Teste 9** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 0$ .
- B  $a = \frac{1}{2}$ .
- C  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- D  $a = 1$ .
- E  $a = -1$ .

**Teste 10** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B  $-5$ .
- C  $\frac{22}{5}$ .
- D  $22$ .
- E  $\frac{1}{10}$ .



**Teste 11** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $-16A$ .
- B)  $16A$ .
- C)  $64I$ .
- D)  $0$ .
- E)  $-64I$ .

**Teste 12** Considere a base

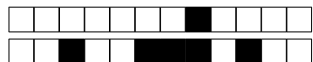
$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A) 12.
- B) 40.
- C) 34.
- D) 21.
- E) 23.



**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

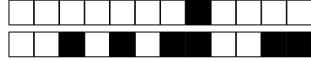
- (A)  $(-1, 3, 1)$ .
- (B)  $(-7, 2, 2)$ .
- (C)  $(-1, 8, -10)$ .
- (D)  $(-1, 9, -9)$ .
- (E)  $(2, 8, -4)$ .

**Teste 14** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (B) todas as afirmações são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.



**Teste 15** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- B  $T$  é sobrejetora.
- C  $T$  é injetora.
- D a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.

**Teste 16** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $-1$ .
- B  $0$ .
- C  $1$ .
- D  $\frac{1}{2}$ .
- E  $-2$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

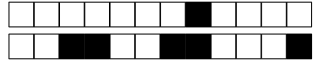
Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

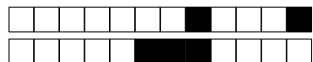
Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+16/12/49+





MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

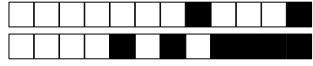
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+17/2/47+



**Teste 1** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 2** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B) a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C)  $T$  é sobrejetora.
- D) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- E)  $T$  é injetora.



**Teste 3** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 0$ .
- B  $a = \frac{1}{2}$ .
- C  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- D  $a = -1$ .
- E  $a = 1$ .

**Teste 4** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $-1$ .
- B  $1$ .
- C  $\frac{1}{2}$ .
- D  $-2$ .
- E  $0$ .



**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

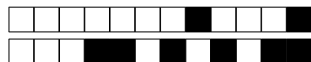
para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Teste 6** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A) 0.
- B)  $-64I$ .
- C)  $64I$ .
- D)  $-16A$ .
- E)  $16A$ .



**Teste 7** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B  $A$  é inversível.
- C se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{-5 + 9t\}$ .
- D  $\{t + 2\}$ .
- E  $\{1 - t\}$ .

**Teste 9** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A o operador  $T$  é simétrico.
- B  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- C  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- D  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- E  $-1$  é um autovalor de  $T$ .



**Teste 10** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação é uma elipse.

**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-7, 2, 2)$ .
- B  $(2, 8, -4)$ .
- C  $(-1, 9, -9)$ .
- D  $(-1, 3, 1)$ .
- E  $(-1, 8, -10)$ .



**Teste 12** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) -2.
- B) 4.
- C) 16.
- D) 8.
- E) 0.

**Teste 13** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 23.
- C) 40.
- D) 12.
- E) 34.





**Teste 14** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

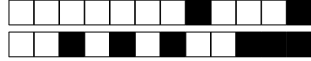
- (A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (B) todas as afirmações são falsas.
- (C) todas as afirmações são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 15** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- (A)  $-5$ .
- (B)  $\frac{1}{10}$ .
- $\frac{22}{5}$ .
- (D)  $\frac{1}{5}$ .
- (E)  $22$ .



**Teste 16** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

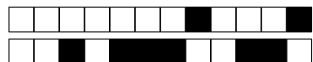
**A**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .

$x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .

**C**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .

**D**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .

**E**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

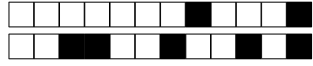
Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

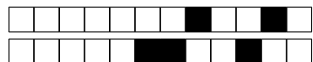
Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+17/12/37+



+18/1/36+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

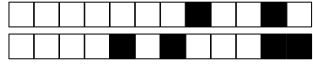
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+18/2/35+



**Teste 1** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

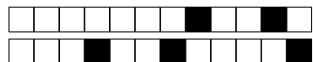
- A o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- E o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.

**Teste 2** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $-5$ .
- B  $\frac{22}{5}$ .
- C  $22$ .
- D  $\frac{1}{5}$ .
- E  $\frac{1}{10}$ .



**Teste 3** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 23.
- B) 34.
- C) 40.
- D) 12.
- E) 21.

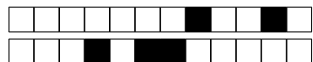
**Teste 4** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E) todas as afirmações são verdadeiras.





**Teste 5** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

**A**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .

**B**  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .

**C**  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .

**D**  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .

**E**  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .

**Teste 6** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

**A**  $A$  é inversível.

**B** se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**C** se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**D** se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**E** se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 7** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

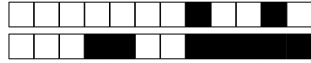
**A** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.

**B** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.

**C**  $T$  é sobrejetora.

**D** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.

**E**  $T$  é injetora.

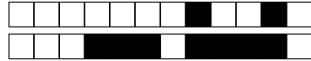


**Teste 8** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A) 0.
- B)  $-64I$ .
- C)  $-16A$ .
- D)  $16A$ .
- E)  $64I$ .

**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A)  $(-1, 3, 1)$ .
- B)  $(-7, 2, 2)$ .
- C)  $(-1, 8, -10)$ .
- D)  $(2, 8, -4)$ .
- E)  $(-1, 9, -9)$ .



**Teste 10** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 0$ .
- B  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- C  $a = -1$ .
- D  $a = 1$ .
- E  $a = \frac{1}{2}$ .

**Teste 11** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.



**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{t + 2\}$ .
- E  $\{t - 5\}$ .

**Teste 13** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

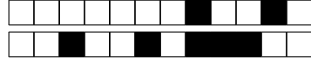
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 1 é um autovalor de  $T$ .
- B 0 é um autovalor de  $T$ .
- C  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- D  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- E o operador  $T$  é simétrico.



**Teste 14** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

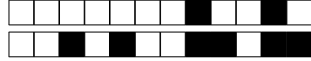
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Teste 15** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- $\frac{1}{2}$ .
- $-1$ .
- $1$ .
- $0$ .
- $-2$ .

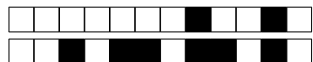


**Teste 16** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 8.
- B) 4.
- C) 16.
- D) 0.
- E) -2.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

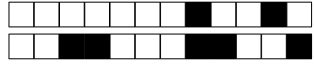
Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

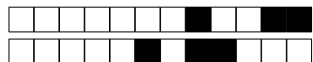
Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+18/12/25+





+19/1/24+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

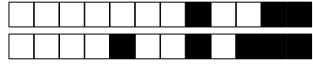
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+19/2/23+



**Teste 1** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- D  $T$  é injetora.
- E  $T$  é sobrejetora.

**Teste 2** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.



**Teste 3** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

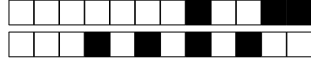
- A) 0.
- B)  $-16A$ .
- C)  $16A$ .
- D)  $64I$ .
- E)  $-64I$ .

**Teste 4** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 5** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

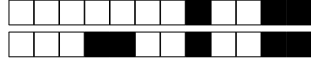
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 6** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 8.
- 2.
- 0.
- 4.
- 16.



**Teste 7** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A 1.
- B -1.
- C  $\frac{1}{2}$ .
- D -2.
- E 0.

**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 3, 1)$ .
- B  $(2, 8, -4)$ .
- C  $(-1, 9, -9)$ .
- D  $(-1, 8, -10)$ .
- E  $(-7, 2, 2)$ .



**Teste 9** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

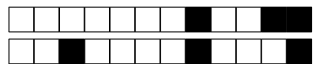
- A  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .  
 B  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .  
 C  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .  
 D  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .  
 E  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .

**Teste 10** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .  
 B  $\{1 - t\}$ .  
 C  $\{-5 + 9t\}$ .  
 D  $\{t - 5\}$ .  
 E  $\{t + 2\}$ .



**Teste 11** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = 1$ .
- $a = 0$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .
- $a = -1$ .

**Teste 12** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

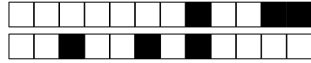
para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- o operador  $T$  é simétrico.
- $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- $1$  é um autovalor de  $T$ .
- $0$  é um autovalor de  $T$ .





**Teste 13** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

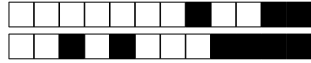
- A) 21.
- B) 40.
- C) 23.
- D) 34.
- E) 12.

**Teste 14** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- D) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.



**Teste 15** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

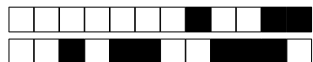
$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A 22.
- B  $\frac{22}{5}$ .
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D  $\frac{1}{5}$ .
- E  $-5$ .

**Teste 16** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E  $A$  é inversível.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

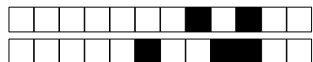
Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+19/12/13+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+20/2/11+



**Teste 1** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Teste 2** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

(I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;

(II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;

(III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são falsas.
- todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 3** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B  $A$  é inversível.
- C se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 4** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- B  $a = -1$ .
- C  $a = 0$ .
- D  $a = \frac{1}{2}$ .
- E  $a = 1$ .

**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-7, 2, 2)$ .
- B  $(-1, 9, -9)$ .
- C  $(-1, 8, -10)$ .
- D  $(2, 8, -4)$ .
- E  $(-1, 3, 1)$ .





**Teste 6** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

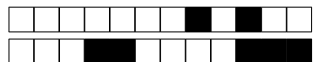
- A) 8.
- B) -2.
- C) 16.
- D) 0.
- E) 4.

**Teste 7** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A) 0.
- B)  $\frac{1}{2}$ .
- C) 1.
- D) -2.
- E) -1.



**Teste 8** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A**  $T$  é injetora.
- B** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C**  $T$  é sobrejetora.
- D** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- E** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.

**Teste 9** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D** apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E** todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 10** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .  
 B  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .  
 C  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .  
 D  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .  
 E  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .

**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .  
 B  $-5$ .  
 C  $22$ .  
 D  $\frac{1}{10}$ .  
 E  $\frac{22}{5}$ .



**Teste 12** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 0 é um autovalor de  $T$ .
- B o operador  $T$  é simétrico.
- C  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- D 1 é um autovalor de  $T$ .
- E  $-1$  é um autovalor de  $T$ .

**Teste 13** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $64I$ .
- B  $-16A$ .
- C  $-64I$ .
- D  $16A$ .
- E  $0$ .



**Teste 14** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- C) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- E) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.

**Teste 15** Considere a base

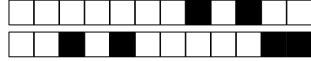
$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 34.
- B) 12.
- C) 23.
- D) 40.
- E) 21.

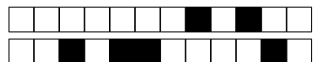


**Teste 16** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t + 2\}$ .
- B  $\{3 + 4t\}$ .
- C  $\{t - 5\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{1 - t\}$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

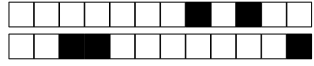
Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

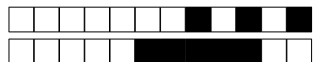
Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+20/12/1+





IDENTIFICAÇÃO

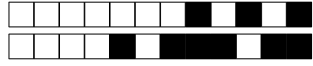
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+21/2/59+



**Teste 1** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 1 é um autovalor de  $T$ .
- B o operador  $T$  é simétrico.
- C 0 é um autovalor de  $T$ .
- D  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- E  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .

**Teste 2** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 3** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 0.
- B) 8.
- C) -2.
- D) 4.
- E) 16.

**Teste 4** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são falsas.
- C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

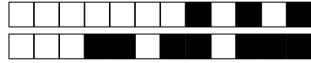
$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{1 - t\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{3 + 4t\}$ .
- D  $\{t - 5\}$ .
- E  $\{t + 2\}$ .

**Teste 6** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $64I$ .
- B  $-16A$ .
- C  $0$ .
- D  $-64I$ .
- E  $16A$ .



**Teste 7** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = 1$ .
- $a = -1$ .
- $a = 0$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .

**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- $(-1, 8, -10)$ .
- $(2, 8, -4)$ .
- $(-1, 9, -9)$ .
- $(-7, 2, 2)$ .
- $(-1, 3, 1)$ .



**Teste 9** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 (B) apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 (C) todas as afirmações são verdadeiras.  
 (D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 (E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 10** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- (A)  $T$  é sobrejetora.  
 (B)  $T$  é injetora.  
 (C) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.  
 (D) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.  
 (E) a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.



**Teste 11** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.

**Teste 12** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- 23.
- 34.
- 21.
- 12.
- 40.





**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{10}$ .
- B 22.
- C  $\frac{1}{5}$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $-5$ .

**Teste 14** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $-2$ .
- B 0.
- C  $-1$ .
- D  $\frac{1}{2}$ .
- E 1.



**Teste 15** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- C**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- D**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- E**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .

**Teste 16** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A** se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B** se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C** se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D**  $A$  é inversível.
- E** se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+21/12/49+



IDENTIFICAÇÃO

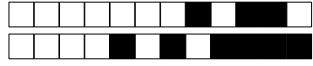
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+22/2/47+



**Teste 1** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

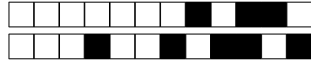
- A 1.
- B -1.
- C -2.
- D 0.
- E  $\frac{1}{2}$ .

**Teste 2** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 3** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) todas as afirmações são falsas.
- D) todas as afirmações são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A)  $(-7, 2, 2)$ .
- B)  $(-1, 9, -9)$ .
- C)  $(2, 8, -4)$ .
- D)  $(-1, 3, 1)$ .
- E)  $(-1, 8, -10)$ .





**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

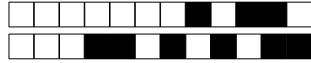
- $\frac{22}{5}$ .
- $\frac{1}{5}$ .
- 22.
- $\frac{1}{10}$ .
- 5.

**Teste 6** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 16.
- 8.
- 0.
- 2.
- 4.



**Teste 7** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A**  $T$  é injetora.
- B** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D**  $T$  é sobrejetora.
- E** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.

**Teste 8** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A** 0.
- B**  $64I$ .
- C**  $16A$ .
- D**  $-16A$ .
- E**  $-64I$ .



**Teste 9** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- B  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- C  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- D  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- E o operador  $T$  é simétrico.

**Teste 10** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A 40.
- B 12.
- C 23.
- D 21.
- E 34.



**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{1 - t\}$ .
- C  $\{t + 2\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .

**Teste 12** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C  $A$  é inversível.
- D se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .



**Teste 13** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

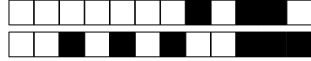
- A** o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B** o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C** o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- D** o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- E** o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

**Teste 14** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B**  $x(t) = e^{3t} (2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- C**  $x(t) = e^{3t} (\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- D**  $x(t) = e^{3t} (2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- E**  $x(t) = e^t (2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .



**Teste 15** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- B  $a = 1$ .
- C  $a = 0$ .
- D  $a = -1$ .
- E  $a = \frac{1}{2}$ .

**Teste 16** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

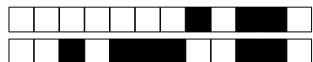
for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

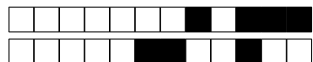
Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+22/12/37+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+23/2/35+



**Teste 1** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- $A$  é inversível.
- se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 2** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

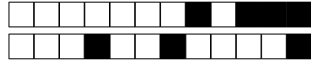
- o operador  $T$  é simétrico.
- 0 é um autovalor de  $T$ .
- 1 é um autovalor de  $T$ .
- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- $-1$  é um autovalor de  $T$ .

**Teste 3** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 4** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- 34.
- 12.
- 40.
- 21.
- 23.

**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

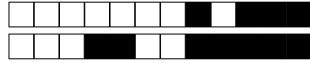
- $\{-5 + 9t\}$ .
- $\{1 - t\}$ .
- $\{t + 2\}$ .
- $\{t - 5\}$ .
- $\{3 + 4t\}$ .

**Teste 7** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = \frac{1}{2}$ .
- $a = 1$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .
- $a = -1$ .
- $a = 0$ .



**Teste 8** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

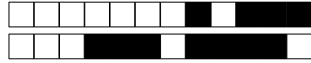
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 16.
- 4.
- 0.
- 2.
- 8.

**Teste 9** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- 16A.
- 0.
- 16A.
- 64I.
- 64I.



**Teste 10** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.

**Teste 11** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.



**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-7, 2, 2)$ .
- B  $(-1, 8, -10)$ .
- C  $(-1, 9, -9)$ .
- D  $(2, 8, -4)$ .
- E  $(-1, 3, 1)$ .

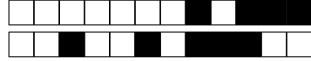
**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $-5$ .
- B  $22$ .
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $\frac{1}{5}$ .





**Teste 14** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

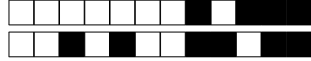
- A 1.
- B -1.
- C 0.
- D -2.
- $\frac{1}{2}$ .

**Teste 15** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- B  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- C  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .

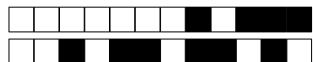


**Teste 16** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C**  $T$  é sobrejetora.
- D** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- E**  $T$  é injetora.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

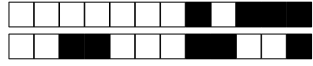
Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

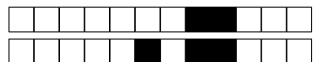
Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+23/12/25+



IDENTIFICAÇÃO

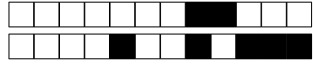
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

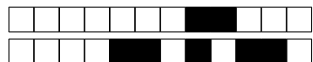
1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+24/2/23+



**Teste 1** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 23.
- B) 21.
- C) 34.
- D) 12.
- E) 40.

**Teste 2** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D)  $A$  é inversível.
- E) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A)  $(2, 8, -4)$ .
- B)  $(-7, 2, 2)$ .
- C)  $(-1, 3, 1)$ .
- D)  $(-1, 9, -9)$ .
- E)  $(-1, 8, -10)$ .



**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{10}$ .
- B  $\frac{22}{5}$ .
- C  $\frac{1}{5}$ .
- D  $-5$ .
- E  $22$ .

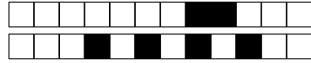
**Teste 5** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são falsas.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.





**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

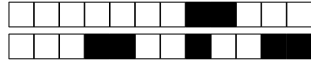
- A  $\{1 - t\}$ .
- B  $\{3 + 4t\}$ .
- C  $\{-5 + 9t\}$ .
- D  $\{t - 5\}$ .
- E  $\{t + 2\}$ .

**Teste 7** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- D  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- E  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .



**Teste 8** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 9** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B  $T$  é sobrejetora.
- C a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- D  $T$  é injetora.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.



**Teste 10** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A o operador  $T$  é simétrico.
- B  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- C  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- D  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- E  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .

**Teste 11** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- E o conjunto solução dessa equação é uma elipse.



**Teste 12** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A**  $a = -1$ .
- B**  $a = 0$ .
- C**  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- D**  $a = 1$ .
- E**  $a = \frac{1}{2}$ .

**Teste 13** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

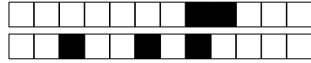
for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C** todas as afirmações são verdadeiras.
- D** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E** apenas a afirmação (I) é verdadeira.



**Teste 14** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

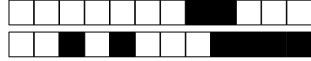
- A) 0.
- B)  $16A$ .
- C)  $-64I$ .
- D)  $64I$ .
- E)  $-16A$ .

**Teste 15** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $B$  é uma base de  $V$  e  $C$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A)  $-2$ .
- B) 4.
- C) 8.
- D) 0.
- E) 16.

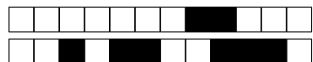


**Teste 16** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A 1.
- B -1.
- C -2.
- D 0.
- $\frac{1}{2}$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

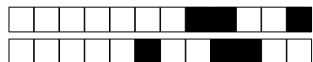
Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+24/12/13+





IDENTIFICAÇÃO

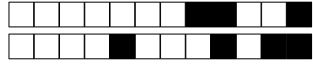
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+25/2/11+



**Teste 1** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C  $T$  é injetora.
- D a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- E  $T$  é sobrejetora.

**Teste 2** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = -1$ .
- B  $a = \frac{1}{2}$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- E  $a = 0$ .

**Teste 3** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A  $A$  é inversível.
- B se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .



**Teste 4** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são falsas.
- C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D) todas as afirmações são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 5** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

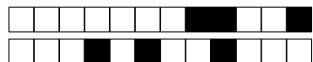
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A) o operador  $T$  é simétrico.
- B) 1 é um autovalor de  $T$ .
- C) 0 é um autovalor de  $T$ .
- D)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- E)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .



**Teste 6** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.  
 B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 D) apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 7** Considere as seguintes afirmações:

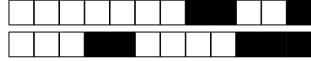
(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;

(III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas a afirmação (III) é verdadeira.  
 B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 D) todas as afirmações são verdadeiras.  
 E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- $\{-5 + 9t\}$ .
- $\{3 + 4t\}$ .
- $\{t + 2\}$ .
- $\{1 - t\}$ .
- $\{t - 5\}$ .

**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- $(-1, 3, 1)$ .
- $(2, 8, -4)$ .
- $(-7, 2, 2)$ .
- $(-1, 9, -9)$ .
- $(-1, 8, -10)$ .



**Teste 10** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A -1.
- B  $\frac{1}{2}$ .
- C -2.
- D 0.
- E 1.

**Teste 11** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .
- D  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .
- E  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .



**Teste 12** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- C) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- D) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.

**Teste 13** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T: V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) -2.
- B) 0.
- C) 16.
- D) 8.
- E) 4.





**Teste 14** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

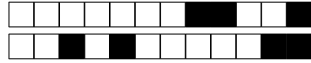
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 40.
- C) 23.
- D) 34.
- E) 12.

**Teste 15** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $16A$ .
- B)  $64I$ .
- C)  $-16A$ .
- D)  $-64I$ .
- E)  $0$ .

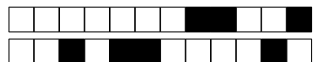


**Teste 16** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B  $-5$ .
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $22$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

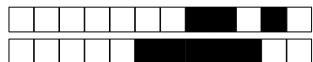
Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+25/12/1+



IDENTIFICAÇÃO

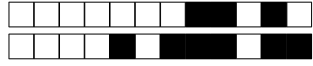
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+26/2/59+



**Teste 1** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C) todas as afirmações são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) todas as afirmações são falsas.

**Teste 2** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C)  $A$  é inversível.
- D) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 3** Considere a base

$$B = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $C$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{BC} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{BC}$  é igual a:

- A) 23.
- B) 12.
- C) 40.
- D) 21.
- E) 34.



**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{t + 2\}$ .
- D  $\{1 - t\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .

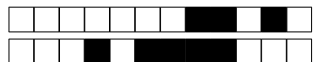
**Teste 5** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A 0.
- B -2.
- C -1.
- D  $\frac{1}{2}$ .
- E 1.





**Teste 6** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

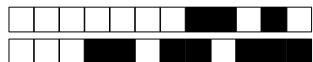
- A** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- B**  $T$  é injetora.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E**  $T$  é sobrejetora.

**Teste 7** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C** apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D** todas as afirmações são verdadeiras.
- E** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 8** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 0$ .
- B  $a = \frac{1}{2}$ .
- C  $a = -1$ .
- D  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- E  $a = 1$ .

**Teste 9** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 10** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- B o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- C o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- D o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- E o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

**Teste 11** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $64I$ .
- B  $16A$ .
- C  $-16A$ .
- D  $-64I$ .
- E  $0$ .



**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A 22.
- B  $\frac{1}{5}$ .
- C  $-5$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $\frac{1}{10}$ .

**Teste 13** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 16.
- B 0.
- C 4.
- D  $-2$ .
- E 8.



**Teste 14** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

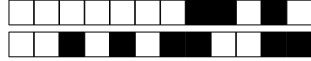
- (A)  $(-1, 3, 1)$ .
- (B)  $(-7, 2, 2)$ .
- (C)  $(2, 8, -4)$ .
- (D)  $(-1, 9, -9)$ .
- (E)  $(-1, 8, -10)$ .

**Teste 15** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- (A)  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .
- (B)  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .
- (C)  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .
- (D)  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .
- (E)  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .



**Teste 16** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 1 é um autovalor de  $T$ .
- B o operador  $T$  é simétrico.
- C  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- D 0 é um autovalor de  $T$ .
- E  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C   E

Teste 2:  A   C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D

Teste 4:  A   C  D  E

Teste 5:  A  B  C   E

Teste 6:  A   C  D  E

Teste 7:   B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D

Teste 9:   B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D

Teste 11:  A  B  C   E

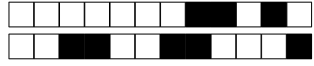
Teste 12:  A  B  C   E

Teste 13:   B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D

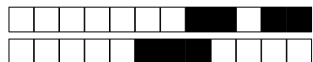
Teste 15:  A  B   D  E

Teste 16:  A  B  C   E



+26/12/49+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+27/2/47+



**Teste 1** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

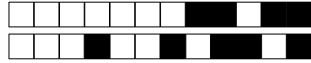
- A  $a = -1$ .
- B  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a = 0$ .
- E  $a = \frac{1}{2}$ .

**Teste 2** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- C a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- D  $T$  é sobrejetora.
- E  $T$  é injetora.



**Teste 3** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .
- B  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .
- C  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .
- E  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{10}$ .
- B  $\frac{1}{5}$ .
- C 22.
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $-5$ .



**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{1 - t\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{3 + 4t\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{t + 2\}$ .

**Teste 6** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

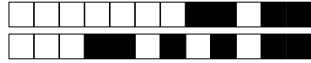
for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 7** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A)  $(-1, 3, 1)$ .
- B)  $(2, 8, -4)$ .
- C)  $(-7, 2, 2)$ .
- D)  $(-1, 8, -10)$ .
- E)  $(-1, 9, -9)$ .



**Teste 9** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 40.
- B) 34.
- C) 23.
- D) 21.
- E) 12.

**Teste 10** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C)  $A$  é inversível.
- D) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .



**Teste 11** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- $\frac{1}{2}$ .
- 1.
- 2.
- 0.
- 1.

**Teste 12** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 8.
- 0.
- 4.
- 2.
- 16.





**Teste 13** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

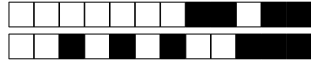
- A o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- B o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

**Teste 14** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- E todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 15** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $16A$ .
- B)  $0$ .
- C)  $-16A$ .
- D)  $-64I$ .
- E)  $64I$ .

**Teste 16** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- B)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- C)  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- D) o operador  $T$  é simétrico.
- E)  $1$  é um autovalor de  $T$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

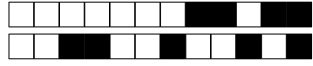
Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

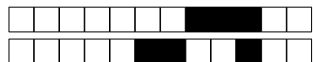
Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+27/12/37+



IDENTIFICAÇÃO

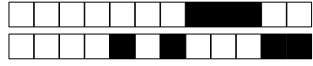
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+28/2/35+



**Teste 1** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

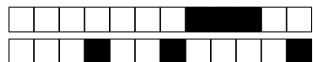
- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) todas as afirmações são falsas.

**Teste 2** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A)  $(-7, 2, 2)$ .
- B)  $(-1, 3, 1)$ .
- C)  $(2, 8, -4)$ .
- D)  $(-1, 8, -10)$ .
- E)  $(-1, 9, -9)$ .



**Teste 3** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 4.
- B) 8.
- C) 16.
- D) -2.
- E) 0.

**Teste 4** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A) 0.
- B)  $-64I$ .
- C)  $-16A$ .
- D)  $64I$ .
- E)  $16A$ .





**Teste 5** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- C**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- D**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- E**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .

**Teste 6** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A** se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B** se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C** se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D**  $A$  é inversível.
- E** se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 7** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

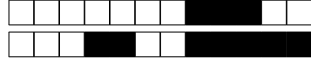
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A**  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- B**  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- C**  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- D**  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- E** o operador  $T$  é simétrico.



**Teste 8** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

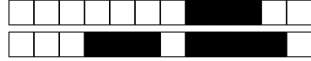
- A  $a = \frac{1}{2}$ .
- B  $a = 1$ .
- C  $a = 0$ .
- D  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- E  $a = -1$ .

**Teste 9** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- C o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- D o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- E o conjunto solução dessa equação é uma parábola.



**Teste 10** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 12.
- C) 34.
- D) 23.
- E) 40.

**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A)  $\{-5 + 9t\}$ .
- B)  $\{t - 5\}$ .
- C)  $\{3 + 4t\}$ .
- D)  $\{t + 2\}$ .
- E)  $\{1 - t\}$ .



**Teste 12** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

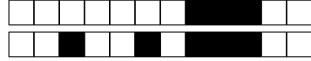
- (A) todas as afirmações são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- (A)  $\frac{1}{5}$ .
- (B)  $\frac{22}{5}$ .
- (C)  $\frac{1}{10}$ .
- (D)  $-5$ .
- (E)  $22$ .



**Teste 14** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

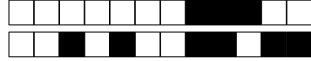
- A**  $T$  é injetora.
- B**  $T$  é sobrejetora.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- D** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- E** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.

**Teste 15** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A** 0.
- B** 1.
- C** -2.
- D**  $\frac{1}{2}$ .
- E** -1.



**Teste 16** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

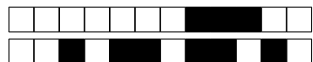
for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C   E

Teste 2:  A  B  C   E

Teste 3:  A  B   D  E

Teste 4:  A   C  D  E

Teste 5:   B  C  D  E

Teste 6:  A   C  D  E

Teste 7:  A  B   D  E

Teste 8:  A   C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D

Teste 10:  A  B   D  E

Teste 11:   B  C  D  E

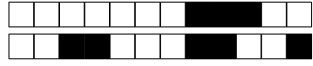
Teste 12:  A  B  C  D

Teste 13:  A   C  D  E

Teste 14:   B  C  D  E

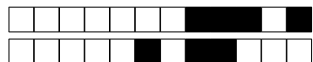
Teste 15:  A  B  C   E

Teste 16:  A  B  C  D



+28/12/25+





IDENTIFICAÇÃO

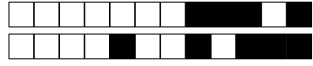
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+29/2/23+



**Teste 1** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{-5 + 9t\}$ .
- D  $\{t + 2\}$ .
- E  $\{1 - t\}$ .

**Teste 2** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 4.
- B 16.
- C -2.
- D 0.
- E 8.



**Teste 3** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .
- B  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .
- E  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .

**Teste 4** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

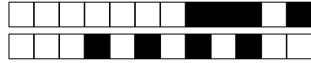
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 1 é um autovalor de  $T$ .
- B  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- C  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- D 0 é um autovalor de  $T$ .
- E o operador  $T$  é simétrico.



**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

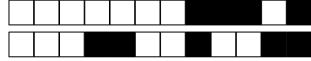
- (A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (B) todas as afirmações são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Teste 6** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- (A) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- (B) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- (C) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- (D) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- (E) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.



**Teste 7** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

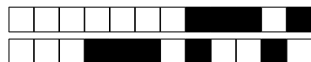
- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 B) apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 C) todas as afirmações são verdadeiras.  
 D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 8** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A) 1.  
 B) -2.  
 C) -1.  
 D)  $\frac{1}{2}$ .  
 E) 0.



**Teste 9** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A**  $-64I$ .
- B**  $-16A$ .
- C**  $0$ .
- D**  $64I$ .
- E**  $16A$ .

**Teste 10** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A** se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B** se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C**  $A$  é inversível.
- D** se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E** se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 11** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A** 23.
- B** 34.
- C** 21.
- D** 12.
- E** 40.



**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- (A)  $(-1, 8, -10)$ .
- (B)  $(-1, 3, 1)$ .
- (C)  $(-1, 9, -9)$ .
- (D)  $(2, 8, -4)$ .
- (E)  $(-7, 2, 2)$ .

**Teste 13** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- (A) todas as afirmações são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (E) todas as afirmações são falsas.





**Teste 14** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

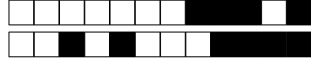
- A a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- D  $T$  é injetora.
- E  $T$  é sobrejetora.

**Teste 15** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 1$ .
- B  $a = \frac{1}{2}$ .
- C  $a = -1$ .
- D  $a = 0$ .
- E  $a \neq \frac{1}{2}$ .

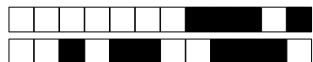


**Teste 16** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B  $\frac{22}{5}$ .
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D 22.
- E -5.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

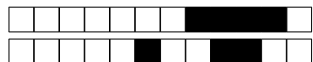
Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+29/12/13+



IDENTIFICAÇÃO

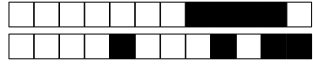
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

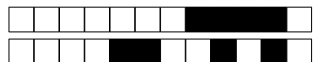
1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+30/2/11+



**Teste 1** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-7, 2, 2)$ .
- B  $(-1, 9, -9)$ .
- C  $(2, 8, -4)$ .
- D  $(-1, 8, -10)$ .
- E  $(-1, 3, 1)$ .

**Teste 2** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 16.
- B 0.
- C 4.
- D 8.
- E  $-2$ .



**Teste 3** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A) 0.
- B)  $\frac{1}{2}$ .
- C) -2.
- D) -1.
- E) 1.

**Teste 4** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

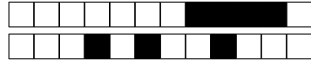
de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 12.
- B) 40.
- C) 34.
- D) 23.
- E) 21.





**Teste 5** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

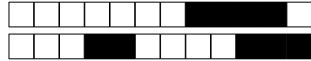
- A  $-16A$ .
- B  $-64I$ .
- C  $16A$ .
- D  $64I$ .
- E  $0$ .

**Teste 6** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- B o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- D o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.



**Teste 7** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

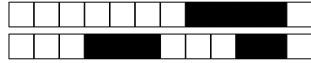
- A)  $-5$ .
- B)  $\frac{1}{5}$ .
- C)  $\frac{22}{5}$ .
- D)  $\frac{1}{10}$ .
- E)  $22$ .

**Teste 8** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A)  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B)  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- C)  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- D)  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- E)  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .



**Teste 9** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.  
 B) apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 10** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

(I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;

(II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;

(III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 B) todas as afirmações são verdadeiras.  
 C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 E) todas as afirmações são falsas.



**Teste 11** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A**  $a = \frac{1}{2}$ .
- B**  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- C**  $a = 1$ .
- D**  $a = 0$ .
- E**  $a = -1$ .

**Teste 12** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

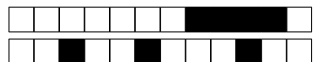
- A** se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B** se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C** se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D**  $A$  é inversível.
- E** se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 13** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A** todas as afirmações são verdadeiras.
- B** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E** apenas a afirmação (III) é verdadeira.



**Teste 14** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{t + 2\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{t - 5\}$ .
- E  $\{-5 + 9t\}$ .

**Teste 15** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

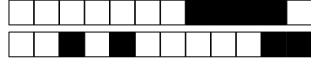
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 1 é um autovalor de  $T$ .
- B  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- C 0 é um autovalor de  $T$ .
- D o operador  $T$  é simétrico.
- E  $-1$  é um autovalor de  $T$ .

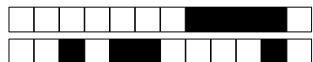


**Teste 16** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B**  $T$  é injetora.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- D**  $T$  é sobrejetora.
- E** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+30/12/1+





+31/1/60+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

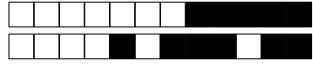
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+31/2/59+



**Teste 1** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são falsas.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 2** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 3** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 12.
- B) 40.
- C) 21.
- D) 34.
- E) 23.

**Teste 4** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $16A$ .
- B)  $-64I$ .
- C)  $0$ .
- D)  $64I$ .
- E)  $-16A$ .



**Teste 5** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A -1.
- B -2.
- C  $\frac{1}{2}$ .
- D 1.
- E 0.

**Teste 6** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

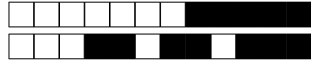
for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 7** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- B**  $T$  é injetora.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D**  $T$  é sobrejetora.
- E** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.

**Teste 8** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A** se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B** se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C** se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D**  $A$  é inversível.
- E** se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A**  $(-7, 2, 2)$ .
- B**  $(-1, 3, 1)$ .
- C**  $(-1, 9, -9)$ .
- D**  $(2, 8, -4)$ .
- E**  $(-1, 8, -10)$ .



**Teste 10** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- $\frac{22}{5}$ .
- $\frac{1}{10}$ .
- 22.
- $\frac{1}{5}$ .
- 5.

**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- $\{1 - t\}$ .
- $\{t - 5\}$ .
- $\{-5 + 9t\}$ .
- $\{t + 2\}$ .
- $\{3 + 4t\}$ .



**Teste 12** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- B  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- E  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .

**Teste 13** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- B  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- C o operador  $T$  é simétrico.
- D  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- E  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .





**Teste 14** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

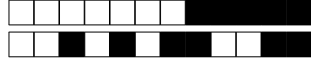
- $a = 1$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .
- $a = -1$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .
- $a = 0$ .

**Teste 15** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 16.
- 0.
- 2.
- 4.
- 8.



**Teste 16** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- E o conjunto solução dessa equação é uma elipse.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+31/12/49+



MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

## IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

## INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+32/2/47+



**Teste 1** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $-16A$ .
- B)  $0$ .
- C)  $64I$ .
- D)  $-64I$ .
- E)  $16A$ .

**Teste 2** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 40.
- B) 12.
- C) 34.
- D) 23.
- E) 21.

**Teste 3** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B)  $A$  é inversível.
- C) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .



**Teste 4** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- B o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- C o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- D o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.

**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B  $-5$ .
- C  $\frac{22}{5}$ .
- D  $\frac{1}{10}$ .
- E  $22$ .





**Teste 6** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 7** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

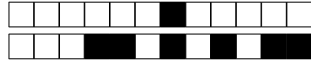
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- $0$  é um autovalor de  $T$ .
- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- $1$  é um autovalor de  $T$ .
- o operador  $T$  é simétrico.



**Teste 8** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 9** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são falsas.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 10** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = \frac{1}{2}$ .
- B  $a = 1$ .
- C  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- D  $a = -1$ .
- E  $a = 0$ .

**Teste 11** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- C  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- D  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- E  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .



**Teste 12** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A 1.
- B  $\frac{1}{2}$ .
- C  $-1$ .
- D  $-2$ .
- E 0.

**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-7, 2, 2)$ .
- B  $(-1, 8, -10)$ .
- C  $(-1, 9, -9)$ .
- D  $(2, 8, -4)$ .
- E  $(-1, 3, 1)$ .



**Teste 14** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

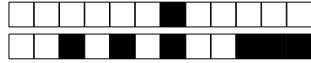
- A 8.
- B  $-2$ .
- C 4.
- D 16.
- E 0.

**Teste 15** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t + 2\}$ .
- B  $\{1 - t\}$ .
- C  $\{t - 5\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .



**Teste 16** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C**  $T$  é sobrejetora.
- D** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- E**  $T$  é injetora.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+32/12/37+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+33/2/35+



**Teste 1** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- 34.
- 23.
- 21.
- 40.
- 12.

**Teste 2** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- B) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- D) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.



**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{t - 5\}$ .
- D  $\{1 - t\}$ .
- E  $\{t + 2\}$ .

**Teste 4** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

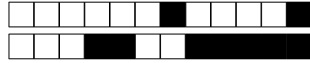
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Teste 6** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 4.
- 2.
- 8.
- 0.
- 16.



**Teste 7** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- C  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- D  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- E  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .

**Teste 8** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 0 é um autovalor de  $T$ .
- B 1 é um autovalor de  $T$ .
- C  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- D o operador  $T$  é simétrico.
- E  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .

**Teste 9** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B  $A$  é inversível.
- C se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .



**Teste 10** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- $-64I$ .
- $-16A$ .
- $0$ .
- $16A$ .
- $64I$ .

**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- $\frac{1}{5}$ .
- $22$ .
- $\frac{22}{5}$ .
- $\frac{1}{10}$ .
- $-5$ .



**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 3, 1)$ .
- B  $(-7, 2, 2)$ .
- C  $(-1, 8, -10)$ .
- D  $(2, 8, -4)$ .
- E  $(-1, 9, -9)$ .

**Teste 13** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = \frac{1}{2}$ .
- B  $a = 0$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- E  $a = -1$ .





**Teste 14** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

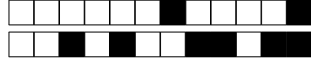
- A  $\frac{1}{2}$ .
- B  $-2$ .
- C  $1$ .
- D  $-1$ .
- E  $0$ .

**Teste 15** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A  $T$  é sobrejetora.
- B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- D  $T$  é injetora.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.



**Teste 16** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

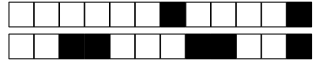
Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+33/12/25+



+34/1/24+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

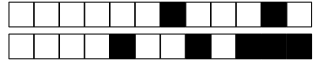
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+34/2/23+



**Teste 1** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- B  $a = 0$ .
- C  $a = -1$ .
- D  $a = 1$ .
- E  $a = \frac{1}{2}$ .

**Teste 2** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

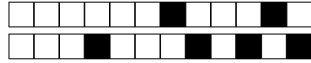
- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.

**Teste 3** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D  $A$  é inversível.
- E se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .



**Teste 4** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 5** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A) o operador  $T$  é simétrico.
- B) 0 é um autovalor de  $T$ .
- C)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- D)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- E)  $1$  é um autovalor de  $T$ .





**Teste 6** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A**  $T$  é injetora.
- B** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- C**  $T$  é sobrejetora.
- D** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- E** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.

**Teste 7** Considere a base

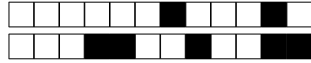
$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A** 21.
- B** 23.
- C** 34.
- D** 40.
- E** 12.



**Teste 8** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $-16A$ .
- B  $16A$ .
- C  $-64I$ .
- D  $0$ .
- E  $64I$ .

**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{22}{5}$ .
- B  $\frac{1}{5}$ .
- C  $-5$ .
- D  $\frac{1}{10}$ .
- E  $22$ .



**Teste 10** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- B o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E o conjunto solução dessa equação é uma elipse.

**Teste 11** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- E  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .



**Teste 12** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- $\frac{1}{2}$ .
- $-1$ .
- $-2$ .
- $0$ .
- $1$ .

**Teste 13** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



**Teste 14** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

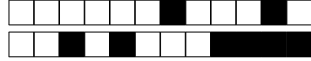
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 8.
- B) 0.
- C) 16.
- D) 4.
- E) -2.

**Teste 15** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A)  $(-1, 3, 1)$ .
- B)  $(-1, 8, -10)$ .
- C)  $(2, 8, -4)$ .
- D)  $(-1, 9, -9)$ .
- E)  $(-7, 2, 2)$ .



**Teste 16** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{t + 2\}$ .
- D  $\{1 - t\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+34/12/13+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+35/2/11+



**Teste 1** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- B  $a = \frac{1}{2}$ .
- C  $a = -1$ .
- D  $a = 0$ .
- E  $a = 1$ .

**Teste 2** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- B o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.



**Teste 3** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A**  $T$  é injetora.
- B** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- D** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- E**  $T$  é sobrejetora.

**Teste 4** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A** 0.
- B**  $64I$ .
- C**  $16A$ .
- D**  $-16A$ .
- E**  $-64I$ .



**Teste 5** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

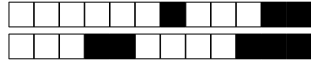
- A  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .
- B  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .
- E  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .

**Teste 6** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A  $A$  é inversível.
- B se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 7** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(2, 8, -4)$ .
- B  $(-7, 2, 2)$ .
- C  $(-1, 9, -9)$ .
- D  $(-1, 3, 1)$ .
- E  $(-1, 8, -10)$ .



**Teste 8** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- 0 é um autovalor de  $T$ .
- o operador  $T$  é simétrico.
- 1 é um autovalor de  $T$ .
- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- $-1$  é um autovalor de  $T$ .

**Teste 9** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- 12.
- 23.
- 34.
- 40.
- 21.



**Teste 10** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B 22.
- C  $-5$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $\frac{1}{10}$ .

**Teste 11** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são falsas.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 12** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{1 - t\}$ .
- B  $\{3 + 4t\}$ .
- C  $\{-5 + 9t\}$ .
- D  $\{t + 2\}$ .
- E  $\{t - 5\}$ .





**Teste 14** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

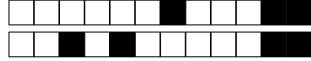
- A 1.
- B -1.
- C  $\frac{1}{2}$ .
- D 0.
- E -2.

**Teste 15** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.



**Teste 16** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 8.
- B) -2.
- C) 4.
- D) 0.
- E) 16.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+35/12/1+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+36/2/59+



**Teste 1** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 2** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t + 2\}$ .
- B  $\{3 + 4t\}$ .
- C  $\{-5 + 9t\}$ .
- D  $\{t - 5\}$ .
- E  $\{1 - t\}$ .



**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- (A)  $(2, 8, -4)$ .
- (B)  $(-1, 9, -9)$ .
- (C)  $(-1, 8, -10)$ .
- (D)  $(-1, 3, 1)$ .
- (E)  $(-7, 2, 2)$ .

**Teste 4** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- (B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (C) todas as afirmações são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.





**Teste 5** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $64I$ .
- B)  $16A$ .
- C)  $-64I$ .
- D)  $-16A$ .
- E)  $0$ .

**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A)  $\frac{1}{5}$ .
- B)  $-5$ .
- C)  $\frac{1}{10}$ .
- D)  $\frac{22}{5}$ .
- E)  $22$ .



**Teste 7** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- B  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- C o operador  $T$  é simétrico.
- D  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- E  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .

**Teste 8** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C  $T$  é injetora.
- D  $T$  é sobrejetora.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.



**Teste 9** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 10** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = 0$ .
- $a = 1$ .
- $a = -1$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .



**Teste 11** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A 1.
- B 0.
- C  $\frac{1}{2}$ .
- D -2.
- E -1.

**Teste 12** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D  $A$  é inversível.
- E se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .



**Teste 13** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- 34.
- 23.
- 12.
- 21.
- 40.

**Teste 14** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 0.
- 2.
- 4.
- 16.
- 8.



**Teste 15** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- C  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- D  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- E  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .

**Teste 16** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- D o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+36/12/49+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+37/2/47+



**Teste 1** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A) o operador  $T$  é simétrico.
- B) 1 é um autovalor de  $T$ .
- C)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- D)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- 0 é um autovalor de  $T$ .

**Teste 2** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A) 0.
- B)  $-2$ .
- C) 1.
- D)  $-1$ .
- $\frac{1}{2}$ .



**Teste 3** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas a afirmação (I) é verdadeira.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

A  $(-1, 8, -10)$ .

B  $(-1, 3, 1)$ .

C  $(-1, 9, -9)$ .

D  $(2, 8, -4)$ .

E  $(-7, 2, 2)$ .



**Teste 5** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são falsas.
- B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C) todas as afirmações são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 6** Considere a base

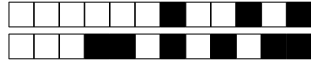
$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 34.
- B) 23.
- C) 40.
- D) 21.
- E) 12.



**Teste 7** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

**A**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\text{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .

$x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \text{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \text{sen}(2t)$ .

**C**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \text{sen}(2t)$ .

**D**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \text{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \text{sen}(2t)$ .

**E**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \text{sen } t)$  e  $y(t) = e^{3t} \text{sen } t$ .

**Teste 8** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

**A**  $-2$ .

**B**  $8$ .

$16$ .

**D**  $0$ .

**E**  $4$ .



**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

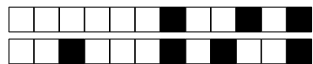
- A 22.
- B  $-5$ .
- C  $\frac{1}{5}$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $\frac{1}{10}$ .

**Teste 10** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- B o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- D o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.



**Teste 11** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A  $T$  é sobrejetora.
- B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C  $T$  é injetora.
- D a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.

**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{-5 + 9t\}$ .
- B  $\{t + 2\}$ .
- C  $\{t - 5\}$ .
- D  $\{3 + 4t\}$ .
- E  $\{1 - t\}$ .

**Teste 13** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B  $A$  é inversível.
- C se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .





**Teste 14** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A**  $a = -1$ .
- B**  $a = 1$ .
- C**  $a = 0$ .
- D**  $a = \frac{1}{2}$ .
- E**  $a \neq \frac{1}{2}$ .

**Teste 15** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A** apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E** todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 16** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A**  $-64I$ .
- B**  $16A$ .
- C**  $0$ .
- D**  $64I$ .
- E**  $-16A$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D

Teste 2:  A  B  C  D

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+37/12/37+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+38/2/35+



**Teste 1** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D  $A$  é inversível.
- E se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 2** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 9, -9)$ .
- B  $(-1, 8, -10)$ .
- C  $(-7, 2, 2)$ .
- D  $(2, 8, -4)$ .
- E  $(-1, 3, 1)$ .

**Teste 3** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = \frac{1}{2}$ .
- B  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a = 0$ .
- E  $a = -1$ .



**Teste 4** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- C**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- D**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- E**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .

**Teste 5** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A** 12.
- B** 23.
- C** 34.
- D** 21.
- E** 40.





**Teste 6** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A) 0.
- B)  $64I$ .
- C)  $16A$ .
- D)  $-16A$ .
- E)  $-64I$ .

**Teste 7** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

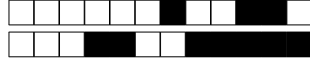
for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas a afirmação (I) é verdadeira.



**Teste 8** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- D) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- E) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

**Teste 9** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A) 1.
- B) -1.
- C)  $\frac{1}{2}$ .
- D) -2.
- E) 0.



**Teste 10** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 4.
- B 8.
- C 16.
- D 0.
- E -2.

**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{22}{5}$ .
- B  $\frac{1}{5}$ .
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D -5.
- E 22.



**Teste 12** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (B) todas as afirmações são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 13** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (A)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- (B) 0 é um autovalor de  $T$ .
- (C)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- (D) 1 é um autovalor de  $T$ .
- (E) o operador  $T$  é simétrico.



**Teste 14** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

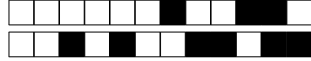
- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{3 + 4t\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{t + 2\}$ .

**Teste 15** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- E todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 16** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A**  $T$  é injetora.
- B** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- D** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- E**  $T$  é sobrejetora.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

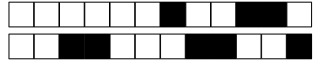
Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+38/12/25+





IDENTIFICAÇÃO

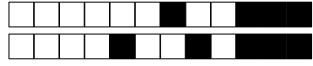
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+39/2/23+



**Teste 1** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

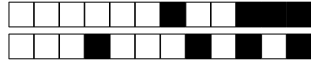
- 34.
- 23.
- 40.
- 21.
- 12.

**Teste 2** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- 0.
- 1.
- 1.
- $\frac{1}{2}$ .
- 2.



**Teste 3** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 1 é um autovalor de  $T$ .
- B o operador  $T$  é simétrico.
- C  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- D 0 é um autovalor de  $T$ .
- E  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-7, 2, 2)$ .
- B  $(-1, 3, 1)$ .
- C  $(2, 8, -4)$ .
- D  $(-1, 8, -10)$ .
- E  $(-1, 9, -9)$ .

**Teste 5** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A  $A$  é inversível.
- B se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .



**Teste 6** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

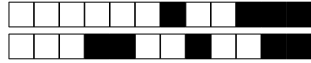
- A  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .  
 B  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .  
 C  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .  
 D  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .  
 E  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .

**Teste 7** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .  
 B  $\{t + 2\}$ .  
 C  $\{1 - t\}$ .  
 D  $\{3 + 4t\}$ .  
 E  $\{-5 + 9t\}$ .



**Teste 8** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $16A$ .
- B)  $-16A$ .
- C)  $-64I$ .
- D)  $0$ .
- E)  $64I$ .

**Teste 9** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- B) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- D) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- E) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.



**Teste 10** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

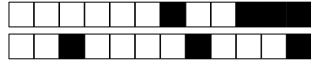
- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 C todas as afirmações são verdadeiras.  
 D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{22}{5}$ .  
 B 22.  
 C  $-5$ .  
 D  $\frac{1}{5}$ .  
 E  $\frac{1}{10}$ .



**Teste 12** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são falsas.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 13** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E) todas as afirmações são verdadeiras.





**Teste 14** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

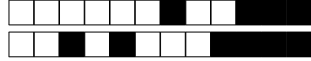
- A  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- B  $a = -1$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a = \frac{1}{2}$ .
- E  $a = 0$ .

**Teste 15** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A  $-2$ .
- B  $8$ .
- C  $0$ .
- D  $16$ .
- E  $4$ .



**Teste 16** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A  $T$  é sobrejetora.
- B a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- $T$  é injetora.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+39/12/13+



MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+40/2/11+



**Teste 1** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- B 0 é um autovalor de  $T$ .
- C 1 é um autovalor de  $T$ .
- D o operador  $T$  é simétrico.
- E  $-1$  é um autovalor de  $T$ .

**Teste 2** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $-2$ .
- B  $0$ .
- C  $-1$ .
- D  $\frac{1}{2}$ .
- E  $1$ .



**Teste 3** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 4** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- $A$  é inversível.





**Teste 5** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são falsas.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 6** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 0.
- B) -2.
- C) 16.
- D) 8.
- E) 4.



**Teste 7** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

$\frac{22}{5}$ .

$22$ .

$-5$ .

$\frac{1}{5}$ .

$\frac{1}{10}$ .

**Teste 8** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

apenas a afirmação (III) é verdadeira.

todas as afirmações são verdadeiras.

apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 9** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C  $T$  é injetora.
- D  $T$  é sobrejetora.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.

**Teste 10** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $-16A$ .
- B  $-64I$ .
- C  $16A$ .
- D  $0$ .
- E  $64I$ .



**Teste 11** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- B**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- C**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- D**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- E**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .

**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A**  $\{t - 5\}$ .
- B**  $\{3 + 4t\}$ .
- C**  $\{-5 + 9t\}$ .
- D**  $\{1 - t\}$ .
- E**  $\{t + 2\}$ .



**Teste 13** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = 1$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .
- $a = 0$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .
- $a = -1$ .

**Teste 14** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- $(-1, 9, -9)$ .
- $(-1, 3, 1)$ .
- $(-7, 2, 2)$ .
- $(2, 8, -4)$ .
- $(-1, 8, -10)$ .



**Teste 15** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 40.
- C) 23.
- D) 34.
- E) 12.

**Teste 16** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- B) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- E) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+40/12/1+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+41/2/59+



**Teste 1** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são falsas.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) todas as afirmações são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 2** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A) 22.
- B)  $\frac{1}{10}$ .
- C) -5.
- D)  $\frac{22}{5}$ .
- E)  $\frac{1}{5}$ .



**Teste 3** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) -2.
- B) 8.
- C) 0.
- D) 4.
- E) 16.

**Teste 4** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A) -2.
- B)  $\frac{1}{2}$ .
- C) 0.
- D) -1.
- E) 1.



**Teste 5** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

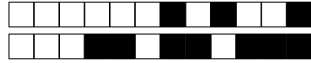
- A  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .
- B  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .
- C  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .
- E  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .

**Teste 6** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 7** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- (A)  $(-1, 8, -10)$ .
- (B)  $(-1, 3, 1)$ .
- (C)  $(2, 8, -4)$ .
- (D)  $(-1, 9, -9)$ .
- (E)  $(-7, 2, 2)$ .

**Teste 8** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- (A)  $64I$ .
- (B)  $0$ .
- (C)  $-16A$ .
- (D)  $16A$ .
- (E)  $-64I$ .



**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- $\{-5 + 9t\}$ .
- $\{3 + 4t\}$ .
- $\{t + 2\}$ .
- $\{1 - t\}$ .
- $\{t - 5\}$ .

**Teste 10** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- $A$  é inversível.

**Teste 11** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- $A$  a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- $B$  a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- $C$  a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- $D$   $T$  é sobrejetora.
- $E$   $T$  é injetora.



**Teste 12** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.

**Teste 13** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- o operador  $T$  é simétrico.
- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- $1$  é um autovalor de  $T$ .
- $0$  é um autovalor de  $T$ .





**Teste 14** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 0$ .
- B  $a = \frac{1}{2}$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a = -1$ .
- E  $a \neq \frac{1}{2}$ .

**Teste 15** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.



**Teste 16** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 40.
- C) 23.
- D) 34.
- E) 12.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+41/12/49+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+42/2/47+



**Teste 1** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $64I$ .
- B)  $0$ .
- C)  $-16A$ .
- D)  $-64I$ .
- E)  $16A$ .

**Teste 2** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A)  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- B)  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- C)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- D) o operador  $T$  é simétrico.
- E)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .



**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t + 2\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{3 + 4t\}$ .
- E  $\{t - 5\}$ .

**Teste 4** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $-2$ .
- B  $\frac{1}{2}$ .
- C  $-1$ .
- D  $0$ .
- E  $1$ .





**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Teste 6** Considere as seguintes afirmações:

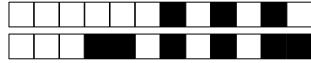
(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;

(III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.



**Teste 7** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B  $T$  é injetora.
- C  $T$  é sobrejetora.
- D a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.

**Teste 8** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A -2.
- B 4.
- C 0.
- D 16.
- E 8.



**Teste 9** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = 1$ .
- $a = -1$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .
- $a = 0$ .

**Teste 10** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- $A$  todas as afirmações são falsas.
- $B$  apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $C$  apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $D$  apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $E$  todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

A  $(-1, 9, -9)$ .

B  $(-1, 3, 1)$ .

C  $(-7, 2, 2)$ .

D  $(-1, 8, -10)$ .

E  $(2, 8, -4)$ .

**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

A 22.

B  $\frac{22}{5}$ .

C  $\frac{1}{10}$ .

D  $-5$ .

E  $\frac{1}{5}$ .



**Teste 13** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

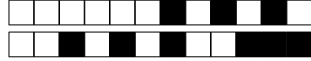
- 34.
- 40.
- 23.
- 12.
- 21.

**Teste 14** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .
- B  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .
- E  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .



**Teste 15** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A** o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- B** o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- C** o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D** o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

**Teste 16** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A** se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B**  $A$  é inversível.
- C** se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D** se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+42/12/37+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+43/2/35+



**Teste 1** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- $\{-5 + 9t\}$ .
- $\{t + 2\}$ .
- $\{3 + 4t\}$ .
- $\{1 - t\}$ .
- $\{t - 5\}$ .

**Teste 2** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = -1$ .
- $a = 0$ .
- $a = 1$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .



**Teste 3** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 23.
- B) 21.
- C) 34.
- D) 12.
- E) 40.

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A)  $\frac{22}{5}$ .
- B)  $-5$ .
- C)  $\frac{1}{5}$ .
- D)  $\frac{1}{10}$ .
- E) 22.



**Teste 5** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A 1.
- B -2.
- C -1.
- D 0.
- $\frac{1}{2}$ .

**Teste 6** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

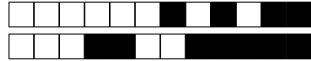
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 0 é um autovalor de  $T$ .
- B  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- C -1 é um autovalor de  $T$ .
- D 1 é um autovalor de  $T$ .
- E o operador  $T$  é simétrico.



**Teste 7** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-7, 2, 2)$ .
- B  $(-1, 8, -10)$ .
- C  $(-1, 9, -9)$ .
- D  $(-1, 3, 1)$ .
- E  $(2, 8, -4)$ .

**Teste 8** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- C  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- E  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .



**Teste 9** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 10** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A)  $A$  é inversível.
- B) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 11** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B) a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D)  $T$  é injetora.
- E)  $T$  é sobrejetora.



**Teste 12** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) todas as afirmações são falsas.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 13** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- D) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.





**Teste 14** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

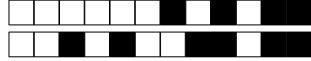
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 4.
- B) 0.
- C) 8.
- D) -2.
- E) 16.

**Teste 15** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $-16A$ .
- B)  $-64I$ .
- C) 0.
- D)  $64I$ .
- E)  $16A$ .



**Teste 16** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

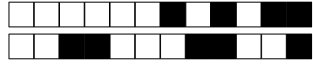
Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+43/12/25+



+44/1/24+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

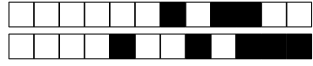
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+44/2/23+



**Teste 1** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- (A)  $(2, 8, -4)$ .
- (B)  $(-1, 9, -9)$ .
- (C)  $(-1, 3, 1)$ .
- (D)  $(-1, 8, -10)$ .
- (E)  $(-7, 2, 2)$ .

**Teste 2** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (D) todas as afirmações são verdadeiras.
- (E) apenas a afirmação (I) é verdadeira.



**Teste 3** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B  $x(t) = e^{3t} (2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t} (2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- D  $x(t) = e^t (2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- E  $x(t) = e^{3t} (\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{10}$ .
- B  $\frac{22}{5}$ .
- C 22.
- D  $\frac{1}{5}$ .
- E -5.





**Teste 5** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

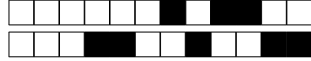
- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são falsas.
- B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 6** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A) 0.
- B)  $16A$ .
- C)  $64I$ .
- D)  $-64I$ .
- E)  $-16A$ .



**Teste 7** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- B  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- C o operador  $T$  é simétrico.
- D  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- E  $0$  é um autovalor de  $T$ .

**Teste 8** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A  $A$  é inversível.
- B se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t + 2\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{3 + 4t\}$ .
- E  $\{-5 + 9t\}$ .



**Teste 10** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) todas as afirmações são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Teste 11** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- (A)  $\frac{1}{2}$ .
- (B)  $-2$ .
- (C)  $-1$ .
- (D)  $1$ .
- (E)  $0$ .



**Teste 12** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A** o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- B** o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- C** o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- D** o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E** o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.

**Teste 13** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T: V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A** -2.
- B** 0.
- C** 4.
- D** 16.
- E** 8.



**Teste 14** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 40.
- C) 12.
- D) 23.
- E) 34.

**Teste 15** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A)  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- B)  $a = 1$ .
- C)  $a = \frac{1}{2}$ .
- D)  $a = 0$ .
- E)  $a = -1$ .



**Teste 16** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B**  $T$  é injetora.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- D**  $T$  é sobrejetora.
- E** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C   E

Teste 2:   B  C  D  E

Teste 3:  A   C  D  E

Teste 4:  A   C  D  E

Teste 5:  A  B  C   E

Teste 6:  A  B  C   E

Teste 7:  A  B  C  D

Teste 8:  A   C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D

Teste 10:  A  B  C   E

Teste 11:   B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C   E

Teste 13:  A  B  C   E

Teste 14:  A  B  C  D

Teste 15:  A   C  D  E

Teste 16:  A   C  D  E



+44/12/13+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+45/2/11+



**Teste 1** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A  $T$  é sobrejetora.
- B  $T$  é injetora.
- C a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.

**Teste 2** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A 0.
- B  $\frac{1}{2}$ .
- C  $-1$ .
- D  $-2$ .
- E 1.



**Teste 3** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- 0 é um autovalor de  $T$ .
- 1 é um autovalor de  $T$ .
- o operador  $T$  é simétrico.
- $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .

**Teste 4** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t + 2\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{3 + 4t\}$ .
- D  $\{1 - t\}$ .
- E  $\{-5 + 9t\}$ .

**Teste 6** Considere a base

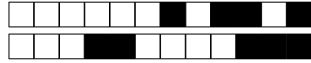
$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A 23.
- B 40.
- C 12.
- D 34.
- E 21.



**Teste 7** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.

**Teste 8** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- $A$  é inversível.
- se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 9** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 10** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

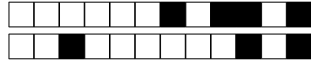
- A  $-16A$ .
- B  $-64I$ .
- C  $64I$ .
- D  $16A$ .
- E  $0$ .

**Teste 11** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $B$  é uma base de  $V$  e  $C$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A  $4$ .
- B  $16$ .
- C  $0$ .
- D  $8$ .
- E  $-2$ .



**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 3, 1)$ .
- B  $(2, 8, -4)$ .
- C  $(-1, 8, -10)$ .
- D  $(-7, 2, 2)$ .
- E  $(-1, 9, -9)$ .

**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{10}$ .
- B  $-5$ .
- C  $\frac{22}{5}$ .
- D  $22$ .
- E  $\frac{1}{5}$ .





**Teste 14** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

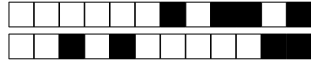
- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 D apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 E todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 15** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .  
 B  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .  
 C  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .  
 D  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .  
 E  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .



**Teste 16** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A**  $a = 0$ .
- B**  $a = 1$ .
- C**  $a = \frac{1}{2}$ .
- D**  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- E**  $a = -1$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+45/12/1+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+46/2/59+



**Teste 1** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (C) todas as afirmações são verdadeiras.
- (D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 2** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- (A) 8.
- (B) 0.
- (C) 4.
- (D) -2.
- (E) 16.



**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A) 22.
- B)  $\frac{1}{5}$ .
- C)  $\frac{22}{5}$ .
- D) -5.
- E)  $\frac{1}{10}$ .

**Teste 4** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que
$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$
então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;
- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) todas as afirmações são verdadeiras.





**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- $\{-5 + 9t\}$ .
- $\{t - 5\}$ .
- $\{3 + 4t\}$ .
- $\{t + 2\}$ .
- $\{1 - t\}$ .

**Teste 6** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- $A$  se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- $A$  é inversível.
- se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 7** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- $A$  o operador  $T$  é simétrico.
- $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- $0$  é um autovalor de  $T$ .
- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- $1$  é um autovalor de  $T$ .



**Teste 8** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- $-64I$ .
- $16A$ .
- $64I$ .
- $0$ .
- $-16A$ .

**Teste 9** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- $\frac{1}{2}$ .
- $-2$ .
- $-1$ .
- $0$ .
- $1$ .



**Teste 10** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A**  $T$  é injetora.
- B** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- D**  $T$  é sobrejetora.
- E** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.

**Teste 11** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- C**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- D**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- E**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .



**Teste 12** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = -1$ .
- B  $a = \frac{1}{2}$ .
- C  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- D  $a = 1$ .
- E  $a = 0$ .

**Teste 13** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- B o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.



**Teste 14** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- (A)  $(-1, 8, -10)$ .
- (B)  $(-7, 2, 2)$ .
- (C)  $(-1, 3, 1)$ .
- (D)  $(-1, 9, -9)$ .
- (E)  $(2, 8, -4)$ .

**Teste 15** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (D) todas as afirmações são verdadeiras.
- (E) todas as afirmações são falsas.



**Teste 16** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 40.
- B) 34.
- C) 23.
- D) 21.
- E) 12.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+46/12/49+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+47/2/47+



**Teste 1** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- $\frac{1}{2}$ .
- 1.
- 0.
- 2.
- 1.

**Teste 2** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- (A)  $(2, 8, -4)$ .
- (B)  $(-1, 3, 1)$ .
- (C)  $(-7, 2, 2)$ .
- (D)  $(-1, 9, -9)$ .
- $(-1, 8, -10)$ .

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- (A)  $\{1 - t\}$ .
- (B)  $\{t + 2\}$ .
- (C)  $\{3 + 4t\}$ .
- (D)  $\{t - 5\}$ .
- $\{-5 + 9t\}$ .



**Teste 5** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 16.
- 4.
- 2.
- 8.
- 0.

**Teste 6** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

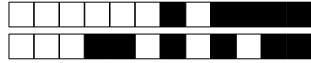
for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



**Teste 7** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A**  $a = \frac{1}{2}$ .
- B**  $a = -1$ .
- C**  $a = 0$ .
- D**  $a = 1$ .
- E**  $a \neq \frac{1}{2}$ .

**Teste 8** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A** todas as afirmações são falsas.
- B** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C** todas as afirmações são verdadeiras.
- D** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 9** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- C  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- D  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- E  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .

**Teste 10** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B  $A$  é inversível.
- C se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 11** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $-16A$ .
- B  $64I$ .
- C  $16A$ .
- D  $0$ .
- E  $-64I$ .



**Teste 12** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A  $T$  é sobrejetora.
- B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- C a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D  $T$  é injetora.
- E a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.

**Teste 13** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A 21.
- B 34.
- C 12.
- D 23.
- E 40.





**Teste 14** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

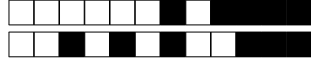
- 0 é um autovalor de  $T$ .
- 1 é um autovalor de  $T$ .
- $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- o operador  $T$  é simétrico.

**Teste 15** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.



**Teste 16** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B 22.
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $-5$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+47/12/37+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+48/2/35+



**Teste 1** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D  $A$  é inversível.
- E se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 2** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t + 2\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{-5 + 9t\}$ .
- D  $\{1 - t\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .

**Teste 3** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- E todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 4** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A**  $a = 0$ .
- B**  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- C**  $a = -1$ .
- D**  $a = \frac{1}{2}$ .
- $a = 1$ .

**Teste 5** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A** o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B** o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- C** o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- D** o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.





**Teste 6** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

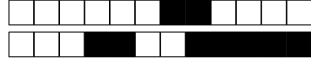
- A 4.
- B 0.
- C 16.
- D 8.
- E -2.

**Teste 7** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B  $T$  é injetora.
- C a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- D a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E  $T$  é sobrejetora.



**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- $(-1, 8, -10)$ .
- $(-7, 2, 2)$ .
- $(-1, 9, -9)$ .
- $(2, 8, -4)$ .
- $(-1, 3, 1)$ .

**Teste 9** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- $-64I$ .
- $16A$ .
- $0$ .
- $64I$ .
- $-16A$ .



**Teste 10** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B  $-5$ .
- C  $22$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $\frac{1}{10}$ .

**Teste 11** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- B  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- C  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- D o operador  $T$  é simétrico.
- E  $-1$  é um autovalor de  $T$ .



**Teste 12** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 B) todas as afirmações são verdadeiras.  
 C) apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 13** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A)  $-2$ .  
 B)  $\frac{1}{2}$ .  
 C)  $0$ .  
 D)  $-1$ .  
 E)  $1$ .



**Teste 14** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

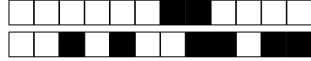
- A  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .  
 B  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .  
 C  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .  
 D  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .  
 E  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .

**Teste 15** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;  
(II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;  
(III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.  
 B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 E todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 16** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 40.
- B) 23.
- C) 21.
- D) 12.
- E) 34.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+48/12/25+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+49/2/23+



**Teste 1** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- $-64I$ .
- $64I$ .
- $-16A$ .
- $16A$ .
- $0$ .

**Teste 2** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- $0$  é um autovalor de  $T$ .
- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- o operador  $T$  é simétrico.
- $1$  é um autovalor de  $T$ .
- $-1$  é um autovalor de  $T$ .



**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 3, 1)$ .
- B  $(2, 8, -4)$ .
- C  $(-1, 8, -10)$ .
- D  $(-7, 2, 2)$ .
- E  $(-1, 9, -9)$ .

**Teste 4** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 0$ .
- B  $a = -1$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a = \frac{1}{2}$ .
- E  $a \neq \frac{1}{2}$ .



**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{3 + 4t\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{t + 2\}$ .
- $\{-5 + 9t\}$ .

**Teste 6** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A 40.
- B 21.
- C 23.
- D 12.
- 34.



**Teste 7** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A -1.
- B  $\frac{1}{2}$ .
- C 1.
- D -2.
- E 0.

**Teste 8** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T: V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A -2.
- B 0.
- C 8.
- D 4.
- E 16.



**Teste 9** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 10** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B  $\frac{1}{10}$ .
- C  $\frac{22}{5}$ .
- D  $-5$ .
- E  $22$ .

**Teste 12** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são falsas.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.





**Teste 13** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .  
 B  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .  
 C  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .  
 D  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .  
 E  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .

**Teste 14** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .  
 B se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .  
 C  $A$  é inversível.  
 D se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .  
 E se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 15** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.  
 B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.  
 C  $T$  é sobrejetora.  
 D  $T$  é injetora.  
 E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.



**Teste 16** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- B o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+49/12/13+



+50/1/12+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+50/2/11+



**Teste 1** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 9, -9)$ .
- B  $(-1, 3, 1)$ .
- C  $(-7, 2, 2)$ .
- D  $(2, 8, -4)$ .
- E  $(-1, 8, -10)$ .

**Teste 2** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E  $A$  é inversível.

**Teste 3** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A 12.
- B 40.
- C 34.
- D 23.
- E 21.



**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- $\{-5 + 9t\}$ .
- $\{t - 5\}$ .
- $\{3 + 4t\}$ .
- $\{1 - t\}$ .
- $\{t + 2\}$ .

**Teste 5** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.





**Teste 6** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 C todas as afirmações são verdadeiras.  
 D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 7** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2\sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\cos(2t)$ .  
 B  $x(t) = e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .  
 C  $x(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t\sin(2t)$ .  
 D  $x(t) = 2e^{3t}\cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$ .  
 E  $x(t) = e^{3t}(2\cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t}\sin t$ .



**Teste 8** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A 1.
- B  $\frac{1}{2}$ .
- C -2.
- D -1.
- E 0.

**Teste 9** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = -1$ .
- B  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a = \frac{1}{2}$ .
- E  $a = 0$ .



**Teste 10** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- $\frac{22}{5}$ .
- $-5$ .
- $\frac{1}{5}$ .
- $\frac{1}{10}$ .
- $22$ .

**Teste 11** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- $16A$ .
- $-16A$ .
- $0$ .
- $-64I$ .
- $64I$ .



**Teste 12** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 13** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B  $T$  é injetora.
- C  $T$  é sobrejetora.
- D a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.



**Teste 14** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (B) todas as afirmações são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Teste 15** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (A)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- (B) 0 é um autovalor de  $T$ .
- (C)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- (D) o operador  $T$  é simétrico.
- (E) 1 é um autovalor de  $T$ .



**Teste 16** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 16.
- B 8.
- C -2.
- D 0.
- E 4.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+50/12/1+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+51/2/59+



**Teste 1** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) todas as afirmações são falsas.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 2** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A)  $a = -1$ .
- B)  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- C)  $a = \frac{1}{2}$ .
- D)  $a = 1$ .
- E)  $a = 0$ .



**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{t + 2\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .

**Teste 4** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A  $T$  é injetora.
- B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C  $T$  é sobrejetora.
- D a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.



**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (E) todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 6** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- (A) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- (B) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- (C) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- (D) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- (E) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.



**Teste 7** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A 1.
- B  $\frac{1}{2}$ .
- C -1.
- D -2.
- E 0.

**Teste 8** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T: V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 16.
- B 0.
- C 8.
- D -2.
- E 4.



**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A) 22.
- B)  $\frac{1}{5}$ .
- C) -5.
- D)  $\frac{22}{5}$ .
- E)  $\frac{1}{10}$ .

**Teste 10** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A)  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- B)  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- C)  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- D)  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- E)  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .



**Teste 11** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $-16A$ .
- B  $0$ .
- C  $64I$ .
- D  $-64I$ .
- E  $16A$ .

**Teste 12** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- B  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- C  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- D  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- E o operador  $T$  é simétrico.





**Teste 13** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 14** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 3, 1)$ .
- B  $(-7, 2, 2)$ .
- C  $(2, 8, -4)$ .
- D  $(-1, 8, -10)$ .
- E  $(-1, 9, -9)$ .



**Teste 15** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 12.
- C) 40.
- D) 23.
- E) 34.

**Teste 16** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D)  $A$  é inversível.
- E) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+51/12/49+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+52/2/47+



**Teste 1** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{t + 2\}$ .
- C  $\{-5 + 9t\}$ .
- D  $\{1 - t\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .

**Teste 2** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 3** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- C  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- E  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .

**Teste 4** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- B se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E  $A$  é inversível.

**Teste 5** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $-1$ .
- B  $0$ .
- C  $-2$ .
- D  $1$ .
- E  $\frac{1}{2}$ .





**Teste 6** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A o operador  $T$  é simétrico.
- B  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- C 1 é um autovalor de  $T$ .
- D 0 é um autovalor de  $T$ .
- E  $-1$  é um autovalor de  $T$ .

**Teste 7** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que 3 seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-7, 2, 2)$ .
- B  $(-1, 3, 1)$ .
- C  $(2, 8, -4)$ .
- D  $(-1, 8, -10)$ .
- E  $(-1, 9, -9)$ .



**Teste 8** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 0$ .
- B  $a = \frac{1}{2}$ .
- C  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- D  $a = 1$ .
- E  $a = -1$ .

**Teste 9** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- B o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- C o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- D o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.



**Teste 10** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) todas as afirmações são falsas.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 11** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 23.
- B) 12.
- C) 34.
- D) 21.
- E) 40.



**Teste 12** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C  $T$  é sobrejetora.
- D  $T$  é injetora.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.

**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B 22.
- C  $-5$ .
- D  $\frac{1}{10}$ .
- E  $\frac{22}{5}$ .



**Teste 14** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 4.
- B 0.
- C 16.
- D 8.
- E -2.

**Teste 15** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 16** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $16A$ .
- B)  $-16A$ .
- C)  $-64I$ .
- D)  $0$ .
- E)  $64I$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+52/12/37+





+53/1/36+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+53/2/35+



**Teste 1** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- $A$  é inversível.
- se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 2** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 3** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- B) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- D) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

**Teste 4** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $-16A$ .
- B)  $0$ .
- C)  $64I$ .
- D)  $-64I$ .
- E)  $16A$ .



**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

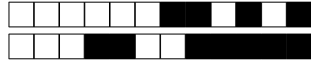
- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{t + 2\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{t - 5\}$ .

**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B 22.
- C  $-5$ .
- D  $\frac{1}{10}$ .
- E  $\frac{22}{5}$ .



**Teste 7** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) todas as afirmações são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 8** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- (A) 23.
- (B) 12.
- (C) 21.
- (D) 34.
- (E) 40.



**Teste 9** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B  $T$  é sobrejetora.
- C  $T$  é injetora.
- D a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- E a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.

**Teste 10** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- B  $a = 0$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a = \frac{1}{2}$ .
- E  $a = -1$ .



**Teste 11** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- B o operador  $T$  é simétrico.
- C 0 é um autovalor de  $T$ .
- D 1 é um autovalor de  $T$ .
- E  $-1$  é um autovalor de  $T$ .

**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(2, 8, -4)$ .
- B  $(-1, 9, -9)$ .
- C  $(-1, 3, 1)$ .
- D  $(-1, 8, -10)$ .
- E  $(-7, 2, 2)$ .





**Teste 13** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .  
 B  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .  
 C  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .  
 D  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .  
 E  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .

**Teste 14** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;  
(II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;  
(III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 C todas as afirmações são falsas.  
 D todas as afirmações são verdadeiras.  
 E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 15** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 0.
- B) 16.
- C) 8.
- D) 4.
- E) -2.

**Teste 16** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A) -1.
- B) 0.
- C) -2.
- D)  $\frac{1}{2}$ .
- E) 1.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+53/12/25+



+54/1/24+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+54/2/23+



**Teste 1** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A) 23.
- B) 40.
- C) 21.
- D) 12.
- E) 34.

**Teste 2** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $16A$ .
- B)  $64I$ .
- C)  $-64I$ .
- D)  $-16A$ .
- E)  $0$ .



**Teste 3** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 8.
- B -2.
- C 0.
- D 16.
- E 4.

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{t + 2\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{1 - t\}$ .





**Teste 5** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D  $A$  é inversível.
- E se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 6** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

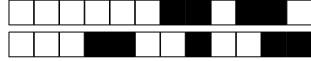
- A  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- B  $a = -1$ .
- C  $a = \frac{1}{2}$ .
- D  $a = 0$ .
- E  $a = 1$ .

**Teste 7** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- B  $T$  é sobrejetora.
- C  $T$  é injetora.
- D a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.



**Teste 8** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- C o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação é uma elipse.

**Teste 9** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $-1$ .
- B  $1$ .
- C  $0$ .
- D  $\frac{1}{2}$ .
- E  $-2$ .



**Teste 10** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A 22.
- B  $\frac{22}{5}$ .
- C  $-5$ .
- D  $\frac{1}{10}$ .
- E  $\frac{1}{5}$ .



**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 3, 1)$ .
- B  $(2, 8, -4)$ .
- C  $(-1, 9, -9)$ .
- D  $(-7, 2, 2)$ .
- E  $(-1, 8, -10)$ .

**Teste 13** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- B  $x(t) = e^{3t} (\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- C  $x(t) = e^t (2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t} (2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- E  $x(t) = e^{3t} (2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .



**Teste 14** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são falsas.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 15** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 16** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 1 é um autovalor de  $T$ .
- B  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- C o operador  $T$  é simétrico.
- D 0 é um autovalor de  $T$ .
- E  $-1$  é um autovalor de  $T$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+54/12/13+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+55/2/11+



**Teste 1** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- B) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- C) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.

**Teste 2** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A) 22.
- B)  $\frac{1}{5}$ .
- C)  $\frac{22}{5}$ .
- D) -5.
- E)  $\frac{1}{10}$ .



**Teste 3** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 4.
- B 16.
- C -2.
- D 0.
- E 8.

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{3 + 4t\}$ .
- C  $\{t + 2\}$ .
- D  $\{1 - t\}$ .
- E  $\{-5 + 9t\}$ .



**Teste 5** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A) 12.
- B) 21.
- C) 23.
- D) 34.
- E) 40.

**Teste 6** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D) todas as afirmações são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



**Teste 7** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A**  $a = \frac{1}{2}$ .
- B**  $a = 1$ .
- C**  $a = -1$ .
- D**  $a = 0$ .
- E**  $a \neq \frac{1}{2}$ .

**Teste 8** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D** todas as afirmações são verdadeiras.
- E** apenas a afirmação (III) é verdadeira.



**Teste 9** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .  
 B  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .  
 C  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .  
 D  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .  
 E  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .

**Teste 10** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;  
(II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;  
(III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 C todas as afirmações são falsas.  
 D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.  
 E todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 11** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .  
 B se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .  
 C  $A$  é inversível.  
 D se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .  
 E se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .



**Teste 12** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A -2.
- B 1.
- C -1.
- D  $\frac{1}{2}$ .
- E 0.

**Teste 13** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- C  $T$  é injetora.
- D a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- E  $T$  é sobrejetora.





**Teste 14** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- (A)  $(-1, 8, -10)$ .
- (B)  $(-1, 3, 1)$ .
- (C)  $(-7, 2, 2)$ .
- (D)  $(2, 8, -4)$ .
- (E)  $(-1, 9, -9)$ .

**Teste 15** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (A) o operador  $T$  é simétrico.
- (B)  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- (C)  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- (D)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- (E)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .



**Teste 16** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $-16A$ .
- B)  $16A$ .
- C)  $64I$ .
- D)  $-64I$ .
- E)  $0$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+55/12/1+



+56/1/60+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+56/2/59+



**Teste 1** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- B o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- E o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

**Teste 2** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 0 é um autovalor de  $T$ .
- B o operador  $T$  é simétrico.
- C  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- D  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- E 1 é um autovalor de  $T$ .



**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{t + 2\}$ .
- D  $\{3 + 4t\}$ .
- E  $\{1 - t\}$ .

**Teste 4** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $\frac{1}{2}$ .
- B 0.
- C -1.
- D -2.
- E 1.





**Teste 5** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C) todas as afirmações são falsas.
- D) todas as afirmações são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A) 22.
- B)  $\frac{1}{10}$ .
- C)  $\frac{22}{5}$ .
- D)  $-5$ .
- E)  $\frac{1}{5}$ .



**Teste 7** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $16A$ .
- B  $64I$ .
- C  $0$ .
- D  $-64I$ .
- E  $-16A$ .

**Teste 8** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = 0$ .
- B  $a = \frac{1}{2}$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- E  $a = -1$ .



**Teste 9** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 34.
- C) 40.
- D) 12.
- E) 23.

**Teste 10** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- D) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E)  $A$  é inversível.



**Teste 11** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 12** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .



**Teste 13** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Teste 14** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 0.
- 16.
- 8.
- 4.
- 2.



**Teste 15** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 9, -9)$ .
- B  $(2, 8, -4)$ .
- C  $(-7, 2, 2)$ .
- D  $(-1, 8, -10)$ .
- E  $(-1, 3, 1)$ .

**Teste 16** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D  $T$  é injetora.
- E  $T$  é sobrejetora.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+56/12/49+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+57/2/47+



**Teste 1** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 2** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.



**Teste 3** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- (A) todas as afirmações são falsas.
- (B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (C) todas as afirmações são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 4** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- (A)  $T$  é injetora.
- (B) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- (C) a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- (D)  $T$  é sobrejetora.
- (E) a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.



**Teste 5** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{1 - t\}$ .
- D  $\{3 + 4t\}$ .
- E  $\{t + 2\}$ .

**Teste 6** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $-1$ .
- B  $1$ .
- C  $-2$ .
- D  $\frac{1}{2}$ .
- E  $0$ .



**Teste 7** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- B o operador  $T$  é simétrico.
- C 0 é um autovalor de  $T$ .
- D 1 é um autovalor de  $T$ .
- E  $-1$  é um autovalor de  $T$ .

**Teste 8** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $64I$ .
- B  $-64I$ .
- C  $-16A$ .
- D  $16A$ .
- E 0.



**Teste 9** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = -1$ .
- B  $a = 1$ .
- C  $a = \frac{1}{2}$ .
- D  $a = 0$ .
- E  $a \neq \frac{1}{2}$ .

**Teste 10** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- E  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .



**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A 22.
- B  $\frac{1}{10}$ .
- C  $\frac{1}{5}$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $-5$ .

**Teste 12** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A 40.
- B 12.
- C 21.
- D 23.
- E 34.





**Teste 13** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- $A$  é inversível.
- se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 14** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



**Teste 15** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 9, -9)$ .
- B  $(2, 8, -4)$ .
- C  $(-1, 3, 1)$ .
- D  $(-1, 8, -10)$ .
- E  $(-7, 2, 2)$ .

**Teste 16** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A  $-2$ .
- B  $4$ .
- C  $8$ .
- D  $0$ .
- E  $16$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+57/12/37+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+58/2/35+



**Teste 1** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 23.
- B) 12.
- C) 21.
- D) 34.
- E) 40.

**Teste 2** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A) -1.
- B) -2.
- C)  $\frac{1}{2}$ .
- D) 1.
- E) 0.



**Teste 3** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 0.
- B) 8.
- C) 4.
- D) 16.
- E) -2.

**Teste 4** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A)  $(-1, 9, -9)$ .
- B)  $(2, 8, -4)$ .
- C)  $(-7, 2, 2)$ .
- D)  $(-1, 8, -10)$ .
- E)  $(-1, 3, 1)$ .





**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 6** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- $A$  é inversível.
- se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 7** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

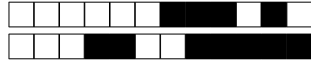
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- $0$  é um autovalor de  $T$ .
- o operador  $T$  é simétrico.
- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- $1$  é um autovalor de  $T$ .



**Teste 8** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A**  $T$  é injetora.
- B**  $T$  é sobrejetora.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.

**Teste 9** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D** todas as afirmações são falsas.
- E** todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 10** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $-16A$ .
- B  $64I$ .
- C  $16A$ .
- D  $0$ .
- E  $-64I$ .

**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{10}$ .
- B  $\frac{22}{5}$ .
- C  $-5$ .
- D  $\frac{1}{5}$ .
- E  $22$ .



**Teste 12** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = 1.$
- $a \neq \frac{1}{2}.$
- $a = -1.$
- $a = \frac{1}{2}.$
- $a = 0.$

**Teste 13** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t).$
- $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t).$
- $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t).$
- $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t).$
- $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t.$



**Teste 14** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.

**Teste 15** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.



**Teste 16** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{1 - t\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{t + 2\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+58/12/25+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+59/2/23+



**Teste 1** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 23.
- C) 12.
- D) 34.
- E) 40.

**Teste 2** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- B) o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- C) o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- D) o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E) o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.



**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{1 - t\}$ .
- B  $\{t + 2\}$ .
- C  $\{-5 + 9t\}$ .
- D  $\{3 + 4t\}$ .
- E  $\{t - 5\}$ .

**Teste 4** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 4.
- B 16.
- C 0.
- D 8.
- E -2.



**Teste 5** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A -2.
- B -1.
- C 1.
- D 0.
- $\frac{1}{2}$ .

**Teste 6** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $-16A$ .
- B  $16A$ .
- C  $64I$ .
- D 0.
- $-64I$ .



**Teste 7** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .

**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- $(-1, 3, 1)$ .
- $(-7, 2, 2)$ .
- $(-1, 9, -9)$ .
- $(2, 8, -4)$ .
- $(-1, 8, -10)$ .



**Teste 9** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) todas as afirmações são falsas.
- D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Teste 10** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) todas as afirmações são verdadeiras.



**Teste 11** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) todas as afirmações são verdadeiras.
- (B) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 12** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (A)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- (B) 1 é um autovalor de  $T$ .
- (C) 0 é um autovalor de  $T$ .
- (D)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- (E) o operador  $T$  é simétrico.





**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{5}$ .
- B 22.
- C  $\frac{22}{5}$ .
- D  $\frac{1}{10}$ .
- E  $-5$ .

**Teste 14** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- B a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C  $T$  é sobrejetora.
- D  $T$  é injetora.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.



**Teste 15** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- B  $a = \frac{1}{2}$ .
- C  $a = 1$ .
- D  $a = -1$ .
- E  $a = 0$ .

**Teste 16** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- C  $A$  é inversível.
- D se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- E se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C   E

Teste 2:  A  B  C   E

Teste 3:  A  B   D  E

Teste 4:  A   C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D

Teste 6:  A  B  C  D

Teste 7:   B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D

Teste 9:  A  B  C  D

Teste 10:   B  C  D  E

Teste 11:  A  B   D  E

Teste 12:  A  B   D  E

Teste 13:  A  B   D  E

Teste 14:  A  B  C   E

Teste 15:  A  B   D  E

Teste 16:  A  B  C  D



+59/12/13+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+60/2/11+



**Teste 1** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- B  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- C  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- D  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- E o operador  $T$  é simétrico.

**Teste 2** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $-5$ .
- B  $\frac{1}{5}$ .
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $22$ .



**Teste 3** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A) 0.
- B)  $-16A$ .
- C)  $-64I$ .
- D)  $16A$ .
- E)  $64I$ .

**Teste 4** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B)  $A$  é inversível.
- C) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .





**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.

**Teste 6** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

(I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;

(II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;

(III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 7** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A 4.
- B 8.
- C 16.
- D -2.
- E 0.

**Teste 8** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 9** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 23.
- B) 34.
- C) 21.
- D) 12.
- E) 40.

**Teste 10** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1,1,1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1,4,-2)$  é igual a:

- A)  $(-1,9,-9)$ .
- B)  $(-1,3,1)$ .
- C)  $(2,8,-4)$ .
- D)  $(-7,2,2)$ .
- E)  $(-1,8,-10)$ .



**Teste 11** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{1 - t\}$ .
- B  $\{-5 + 9t\}$ .
- C  $\{t - 5\}$ .
- D  $\{t + 2\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .

**Teste 12** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A  $-1$ .
- B  $1$ .
- C  $0$ .
- D  $-2$ .
- E  $\frac{1}{2}$ .



**Teste 13** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A**  $T$  é injetora.
- B** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- E**  $T$  é sobrejetora.

**Teste 14** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A**  $a = -1$ .
- B**  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- C**  $a = \frac{1}{2}$ .
- D**  $a = 0$ .
- E**  $a = 1$ .



**Teste 15** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .

**Teste 16** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A** o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- B** o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- C** o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D** o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- E** o conjunto solução dessa equação é uma elipse.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+60/12/1+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+61/2/59+



**Teste 1** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) todas as afirmações são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 2** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A)  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B)  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- C)  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- D)  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- E)  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .



**Teste 3** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B  $T$  é sobrejetora.
- C  $T$  é injetora.
- D a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.

**Teste 4** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- B o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.



**Teste 5** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $16A$ .
- B)  $-64I$ .
- C)  $0$ .
- D)  $64I$ .
- E)  $-16A$ .

**Teste 6** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A) se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B) se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C) se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D) se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E)  $A$  é inversível.

**Teste 7** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{BC}}$  é igual a:

- A) 34.
- B) 21.
- C) 40.
- D) 12.
- E) 23.



**Teste 8** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- (A)  $(-1, 8, -10)$ .
- (B)  $(-7, 2, 2)$ .
- (C)  $(-1, 3, 1)$ .
- (D)  $(-1, 9, -9)$ .
- (E)  $(2, 8, -4)$ .

**Teste 9** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (B) todas as afirmações são verdadeiras.
- (C) todas as afirmações são falsas.
- (D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



**Teste 10** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 4.
- B) -2.
- C) 0.
- D) 16.
- E) 8.

**Teste 11** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A)  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- B)  $0$  é um autovalor de  $T$ .
- C)  $1$  é um autovalor de  $T$ .
- D) o operador  $T$  é simétrico.
- E)  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .



**Teste 12** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{t - 5\}$ .
- B  $\{1 - t\}$ .
- C  $\{t + 2\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{3 + 4t\}$ .

**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A 22.
- B  $\frac{1}{5}$ .
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D  $\frac{22}{5}$ .
- E  $-5$ .





**Teste 14** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- $\frac{1}{2}$ .
- $-1$ .
- $-2$ .
- $1$ .
- $0$ .

**Teste 15** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = -1$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .
- $a = 0$ .
- $a = 1$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .



**Teste 16** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+61/12/49+



MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+62/2/47+



**Teste 1** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 2** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- 1.
- $\frac{1}{2}$ .
- 1.
- 0.
- 2.



**Teste 3** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- A  $\{3 + 4t\}$ .
- B  $\{t - 5\}$ .
- C  $\{t + 2\}$ .
- D  $\{-5 + 9t\}$ .
- E  $\{1 - t\}$ .

**Teste 4** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $16A$ .
- B  $64I$ .
- C  $-16A$ .
- D  $-64I$ .
- E  $0$ .





**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

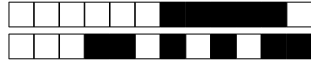
para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A)  $(-1, 3, 1)$ .
- B)  $(-7, 2, 2)$ .
- C)  $(-1, 9, -9)$ .
- D)  $(2, 8, -4)$ .
- E)  $(-1, 8, -10)$ .



**Teste 7** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (B) todas as afirmações são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Teste 8** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- (A) 23.
- (B) 34.
- (C) 12.
- (D) 40.
- (E) 21.



**Teste 9** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A**  $T$  é injetora.
- B** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.
- C** a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- D** a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- E**  $T$  é sobrejetora.

**Teste 10** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A**  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \sin(2t)$ .
- B**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \sin t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin t$ .
- C**  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- D**  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \sin(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .
- E**  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \sin(2t)$ .



**Teste 11** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- 16.
- B -2.
- C 0.
- D 4.
- E 8.

**Teste 12** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- 0 é um autovalor de  $T$ .
- B -1 é um autovalor de  $T$ .
- C  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- D 1 é um autovalor de  $T$ .
- E o operador  $T$  é simétrico.



**Teste 13** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- $\frac{22}{5}$ .
- $\frac{1}{10}$ .
- 22.
- $\frac{1}{5}$ .
- 5.

**Teste 14** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a \neq \frac{1}{2}$ .
- $a = 1$ .
- $a = 0$ .
- $a = -1$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .



**Teste 15** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A  $A$  é inversível.
- se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 16** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+62/12/37+





IDENTIFICAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+63/2/35+



**Teste 1** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- B  $T$  é sobrejetora.
- C  $T$  é injetora.
- D a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.

**Teste 2** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



**Teste 3** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- B  $x(t) = e^{3t} (\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- C  $x(t) = e^t (2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- D  $x(t) = e^{3t} (2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- E  $x(t) = e^{3t} (2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .

**Teste 4** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- A  $a = -1$ .
- B  $a = 0$ .
- C  $a = \frac{1}{2}$ .
- D  $a \neq \frac{1}{2}$ .
- E  $a = 1$ .



**Teste 5** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

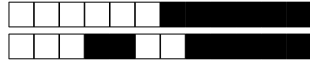
- (A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (D) todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- (A)  $\{1 - t\}$ .
- (B)  $\{3 + 4t\}$ .
- (C)  $\{t - 5\}$ .
- (D)  $\{t + 2\}$ .
- $\{-5 + 9t\}$ .



**Teste 7** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A 1.
- B -2.
- C -1.
- D  $\frac{1}{2}$ .
- E 0.

**Teste 8** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

- A se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B  $A$  é inversível.
- C se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- D se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teste 9** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A  $\frac{1}{10}$ .
- B -5.
- C  $\frac{1}{5}$ .
- D 22.
- E  $\frac{22}{5}$ .



**Teste 10** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 21.
- B) 23.
- C) 40.
- D) 12.
- E) 34.

**Teste 11** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 0.
- B) 4.
- C) -2.
- D) 16.
- E) 8.



**Teste 12** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.
- o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.

**Teste 13** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

- (III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.





**Teste 14** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 9, -9)$ .
- B  $(-7, 2, 2)$ .
- C  $(-1, 8, -10)$ .
- D  $(-1, 3, 1)$ .
- E  $(2, 8, -4)$ .

**Teste 15** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A  $-64I$ .
- B  $64I$ .
- C  $-16A$ .
- D  $16A$ .
- E  $0$ .



**Teste 16** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- 0 é um autovalor de  $T$ .
- 1 é um autovalor de  $T$ .
- $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- 1 é um autovalor de  $T$ .
- o operador  $T$  é simétrico.



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+63/12/25+



+64/1/24+

MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Prova Rec. — 12/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

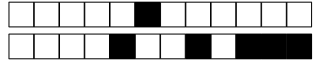
Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: \_\_\_\_\_

BOA PROVA!



+64/2/23+



**Teste 1** Considere as seguintes afirmações:

(I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W$  for um subespaço de  $V$  e  $v \in V$  for tal que  $\langle v, z \rangle = 0$  para todo  $z \in W^\perp$ , então  $v \in W$ ;

(II) se  $V$  for um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se  $v, w \in V$  forem vetores não nulos tais que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}},$$

então existirá um número real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ ;

(III) se  $n$  for um inteiro positivo,  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

for uma base de  $V$ , então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

para qualquer  $v \in V$ .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.  
 B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.  
 C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 D) apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Teste 2** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais reais e  $a$  e  $b$  números reais. Suponha que  $\dim(V) = 3$  e  $\dim(W) = 2$  e considere a transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & a & b \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  e  $\mathcal{C}$  é uma base de  $W$ . Se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , então  $a + b$  será igual a:

- A) 16.  
 B) 8.  
 C) -2.  
 D) 4.  
 E) 0.



**Teste 3** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no plano, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B o conjunto solução dessa equação é uma elipse.
- C o conjunto solução dessa equação possui um único ponto.
- D o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole.

**Teste 4** Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  autovalores de  $T$ ,  $v \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $w \neq 0$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Suponha que  $\lambda \neq \mu$  e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $v$  e  $w$  são linearmente independentes;
- (II) se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $T$  for simétrico, então  $v$  e  $w$  serão ortogonais;
- (III)  $v + w$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda + \mu$ .

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.





**Teste 5** Se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem tais que a integral

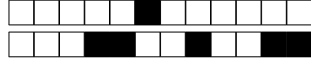
$$\int_{-1}^1 (|t| - (a + bt))^2 dt$$

assuma o seu valor mínimo, então  $a + b$  será igual a:

- A -1.
- B 1.
- C 0.
- D  $\frac{1}{2}$ .
- E -2.

**Teste 6** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico. Suponha que  $T$  não seja injetor, que  $-1$  seja um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $(1, 1, 1)$  e que  $3$  seja um autovalor de  $T$  associado a um autovetor  $v \neq 0$  cuja primeira coordenada seja nula. Temos que  $T(1, 4, -2)$  é igual a:

- A  $(-1, 8, -10)$ .
- B  $(-1, 3, 1)$ .
- C  $(2, 8, -4)$ .
- D  $(-7, 2, 2)$ .
- E  $(-1, 9, -9)$ .



**Teste 7** Considere o espaço vetorial  $P_1(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer  $p, q \in P_1(\mathbb{R})$ . Se  $S$  for o subespaço de  $P_1(\mathbb{R})$  gerado pelo polinômio  $1 + t$ , então um conjunto de geradores para  $S^\perp$  será:

- $\{-5 + 9t\}$ .
- $\{t - 5\}$ .
- $\{3 + 4t\}$ .
- $\{t + 2\}$ .
- $\{1 - t\}$ .

**Teste 8** Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se:

- $a = 0$ .
- $a \neq \frac{1}{2}$ .
- $a = 1$ .
- $a = \frac{1}{2}$ .
- $a = -1$ .



**Teste 9** Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,2), (1,3)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e denote por  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as transformações lineares tais que:

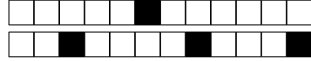
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  é igual a:

- A) 40.
- B) 21.
- C) 12.
- D) 34.
- E) 23.

**Teste 10** Seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear e denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^4$ . Suponha que  $A$  seja real, que  $1 + i$  seja um autovalor de  $T$  e que a dimensão do autoespaço associado a esse autovalor seja igual a 2. Denote por  $I \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Pode-se afirmar que  $A^{12}$  é igual a:

- A)  $64I$ .
- B)  $16A$ .
- C)  $0$ .
- D)  $-64I$ .
- E)  $-16A$ .



**Teste 11** Se  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 2$  e  $y(0) = 0$ , então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , teremos que:

- A  $x(t) = e^{3t}(2 \cos t + \operatorname{sen} t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen} t$ .
- B  $x(t) = e^{3t}(\cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \cos(2t)$ .
- C  $x(t) = e^{3t}(2 \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .
- D  $x(t) = e^t(2 \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t))$  e  $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}(2t)$ .
- E  $x(t) = 2e^{3t} \cos(2t)$  e  $y(t) = e^{3t} \operatorname{sen}(2t)$ .

**Teste 12** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear injetora, então  $T$  será sobrejetora;
- (II) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e  $\lambda \in \mathbb{R}$  for um autovalor de  $T$ , então para todo  $w \in V$  existirá  $v \in V$  tal que  $T(v) - \lambda v = w$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  for uma transformação linear e zero for um autovalor de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  não será inversível.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



**Teste 13** Seja  $V$  o espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer  $f, g \in V$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear definido por

$$T(f)(x) = f(-x),$$

para qualquer  $x \in [-1, 1]$  e qualquer  $f \in V$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A 1 é um autovalor de  $T$ .
- B 0 é um autovalor de  $T$ .
- C  $\|T(f)\| = \|f\|$ , para qualquer  $f \in V$ .
- D  $-1$  é um autovalor de  $T$ .
- E o operador  $T$  é simétrico.

**Teste 14** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \in M_6(\mathbb{R})$  uma matriz real cujo polinômio característico seja dado por  $p_A(t) = (t^4 + a)(t^2 - a)$ . Pode-se afirmar que:

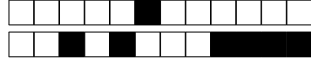
- A se  $a = 1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- B se  $a = 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- C  $A$  é inversível.
- D se  $a > 0$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .
- E se  $a = -1$ , então  $A$  será diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teste 15** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$  a transformação linear definida por

$$T(p) = (p(0), p'(0), p(1), p'(1), p(0)),$$

para todo  $p \in P_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa correta:

- A a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 1.
- B a dimensão da imagem de  $T$  é igual a 2.
- C  $T$  é sobrejetora.
- D  $T$  é injetora.
- E a dimensão do núcleo de  $T$  é igual a 3.



**Teste 16** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + 2t = 0\}.$$

Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  forem tais que  $(1, 1, 2, 4) = v + w$  e se  $w = (a, b, c, d)$ , então  $a + b + c + d$  será igual a:

- A 22.
- B  $-5$ .
- C  $\frac{1}{10}$ .
- D  $\frac{1}{5}$ .
- $\frac{22}{5}$ .



# 2019 – MAT-3458 – Prova de Recuperação– Folha de Respostas

## Identificação

Nome: \_\_\_\_\_ NUSP: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

## Respostas

Teste 1:  A  B  C  D  E

Teste 2:  A  B  C  D  E

Teste 3:  A  B  C  D  E

Teste 4:  A  B  C  D  E

Teste 5:  A  B  C  D  E

Teste 6:  A  B  C  D  E

Teste 7:  A  B  C  D  E

Teste 8:  A  B  C  D  E

Teste 9:  A  B  C  D  E

Teste 10:  A  B  C  D  E

Teste 11:  A  B  C  D  E

Teste 12:  A  B  C  D  E

Teste 13:  A  B  C  D  E

Teste 14:  A  B  C  D  E

Teste 15:  A  B  C  D  E

Teste 16:  A  B  C  D  E



+64/12/13+