MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- [A] $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [B] $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [C] $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [D] $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- [E] $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- [A] T não é injetor.
- [B] T não é simétrico.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T-5\mathrm{I})^2\big)$.
- [E] T é diagonalizável.

Teste 3 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- [A] $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- [B] $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2\operatorname{sen} t)$.
- [C] $(2\operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [D] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- [E] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.

Teste 4 Assinale a alternativa correta:

A para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

B para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

C para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

D para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

E para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

A 5.

B $-\frac{1}{3}$.

C -3.

D $\frac{1}{5}$.

E $\frac{1}{3}$.

Teste 6 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

A $e^{-2\pi}(0,1)$.

B $e^{-2\pi}(1,1)$.

C $e^{-2\pi}(5,0)$.

D $e^{-2\pi}(0,-5)$.

E $e^{-2\pi}(2,-1)$.

Teste 7 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- [B] o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- [C] o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- [D] o conjunto solução dessa equação é vazio.
- [E] o conjunto solução dessa equação é uma reta.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- [A] $\frac{1}{3}$.
- [B] 3.
- [C] 0.
- [D] 1.
- [E] 6.

Teste 9 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- [A] $a > 3$.
- [B] $a > 0$.
- [C] $a > 3$ ou $a < -3$.
- [D] $a \geq 3$.
- [E] $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.

Teste 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 11 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

A $a \neq b$.
B $a = 1$ e $b = 6$.
C $b \neq 2a$.
D $a + b \neq 0$.
E $b = 2a$.

Teste 12 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0, 3)$ é igual a:

A $(-4, 1)$.
B $(1, 2)$.
C $(1, 4)$.
D $(0, 9)$.
E $(6, 3)$.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \text{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(-i, 2, 3-i)$.
- B $(1, -i, 1)$.
- C $(-i, -1, -i)$.
- D $(i, 1, i)$.
- E $(-i, 1, -i)$.

Teste 14 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $-2e^t + 3e^{2t}$.
- B $3e^t - 2e^{2t}$.
- C $-e^t + 2e^{2t}$.
- D $2e^t - e^{6t}$.
- E $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Sabe-se que a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
possui polinômio catacterístico
$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$
e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- [A] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
- [B] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
- [C] $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- [D] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
- [E] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^t - e^{6t}$.
- B $-2e^t + 3e^{2t}$.
- C $3e^t - 2e^{2t}$.
- D $-e^t + 2e^{2t}$.
- E $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 3 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- B T não é injetor.
- C T é diagonalizável.
- D T não é simétrico.
- E $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 6.
- B 3.
- C 1.
- D 0.
- E $\frac{1}{3}$.

Teste 5 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $a + b \neq 0$.
- B $a = 1$ e $b = 6$.
- C $b \neq 2a$.
- D $a \neq b$.
- E $b = 2a$.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 7 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 + 3i \end{pmatrix} = (i - 4) \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 + 3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- B $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- C $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- D $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- E $e^{-2\pi}(0, -5)$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \operatorname{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(i, 1, i)$.
- B $(-i, 1, -i)$.
- C $(-i, 2, 3-i)$.
- D $(-i, -1, -i)$.
- E $(1, -i, 1)$.

Teste 9 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- B $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- C $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- D $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- E $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.

Teste 10 Assinale a alternativa correta:

- [A] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- [B] para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [C] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- [D] para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [E] para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 11 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- [A] $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- [B] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
- [C] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- [D] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
- [E] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.

Teste 12 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

A $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

B $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

C $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

D $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

E $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 13 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

A $(1,2)$.

B $(-4,1)$.

C $(6,3)$.

D $(1,4)$.

E $(0,9)$.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

A $\frac{1}{3}$.

B 5.

C $-\frac{1}{3}$.

D $\frac{1}{5}$.

E -3.

Teste 15 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a \geq 3$.
- B $a > 0$.
- C $a > 3$ ou $a < -3$.
- D $a > 3$.
- E $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.

Teste 16 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- B o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- C o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação é vazio.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ 1.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{C}}$ 3.
- $\boxed{\text{D}}$ 6.
- $\boxed{\text{E}}$ 0.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- $\boxed{\text{C}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 4 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

A $e^{-2\pi}(0, 1)$.

B $e^{-2\pi}(2, -1)$.

C $e^{-2\pi}(5, 0)$.

D $e^{-2\pi}(1, 1)$.

E $e^{-2\pi}(0, -5)$.

Teste 5 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(-4, 1)$.
- B $(0, 9)$.
- C $(1, 4)$.
- D $(1, 2)$.
- E $(6, 3)$.

Teste 6 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 7 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^t - e^{6t}$.
- [B] $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- [C] $3e^t - 2e^{2t}$.
- [D] $-2e^t + 3e^{2t}$.
- [E] $-e^t + 2e^{2t}$.

Teste 8 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- [A] $b \neq 2a$.
- [B] $b = 2a$.
- [C] $a \neq b$.
- [D] $a = 1$ e $b = 6$.
- [E] $a + b \neq 0$.

Teste 9 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
C $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.

Teste 10 Assinale a alternativa correta:

A para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1 + i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

B para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

C para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.

D para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

E para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1 + i$ e $3 - i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1, 3) = (1, 3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1, k) = 5(1, k)$, então k será igual a:

A $-\frac{1}{3}$.
B $\frac{1}{3}$.
C -3.
D 5.
E $\frac{1}{5}$.

Teste 12 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

A o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.

B o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.

C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

D o conjunto solução dessa equação é uma reta.

E o conjunto solução dessa equação é vazio.

Teste 13 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

A T é diagonalizável.

B T não é injetor.

C $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.

D T não é simétrico.

E $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3 - i, 4)$ é igual a:

A $(-i, -1, -i)$.

B $(-i, 2, 3 - i)$.

C $(i, 1, i)$.

D $(-i, 1, -i)$.

E $(1, -i, 1)$.

Teste 15 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- [A] $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- [B] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- [C] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [D] $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [E] $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.

Teste 16 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- [A] $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- [B] $a > 3$.
- [C] $a > 3$ ou $a < -3$.
- [D] $a > 0$.
- [E] $a \geq 3$.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- [A] T é diagonalizável.
- [B] T não é injetor.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- [D] T não é simétrico.
- [E] $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T-5\mathrm{I})^2\big)$.

Teste 2 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\big(\frac{\pi}{2}\big)$ será igual a:

- [A] $e^{-2\pi}(0, -5)$.
- [B] $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- [C] $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- [D] $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- [E] $e^{-2\pi}(1, 1)$.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1, 3) = (1, 3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1, k) = 5(1, k)$, então k será igual a:

- [A] 5.
- [B] -3.
- [C] $-\frac{1}{3}$.
- [D] $\frac{1}{3}$.
- [E] $\frac{1}{5}$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ 6.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{C}}$ 0.
- $\boxed{\text{D}}$ 3.
- $\boxed{\text{E}}$ 1.

Teste 5 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.

Teste 6 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- B o conjunto solução dessa equação é vazio.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- E o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

Teste 7 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 3$.
- B $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- C $a \geq 3$.
- D $a > 3$ ou $a < -3$.
- E $a > 0$.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 9 Sabe-se que a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
possui polinômio catacterístico
$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$
e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:
$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- [A] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$
- [B] $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}.$
- [C] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$
- [D] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$
- [E] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$

Teste 10 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 11 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $2e^t - e^{6t}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- $\boxed{\text{C}}$ $-e^t + 2e^{2t}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $3e^t - 2e^{2t}$.
- $\boxed{\text{E}}$ $-2e^t + 3e^{2t}$.

Teste 12 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(6,3)$.
- B $(0,9)$.
- C $(-4,1)$.
- D $(1,4)$.
- E $(1,2)$.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 14 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- [A] $b = 2a$.
- [B] $a = 1$ e $b = 6$.
- [C] $b \neq 2a$.
- [D] $a \neq b$.
- [E] $a + b \neq 0$.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \operatorname{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3 - i, 4)$ é igual a:

- [A] $(-i, -1, -i)$.
- [B] $(-i, 2, 3 - i)$.
- [C] $(1, -i, 1)$.
- [D] $(-i, 1, -i)$.
- [E] $(i, 1, i)$.

Teste 16 Assinale a alternativa correta:

- [A] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- [B] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- [C] para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [D] para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1 + i$ e $3 - i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [E] para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1 + i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ________________________________ **NUSP:** _____________ **Turma:** _________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 2 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $-e^t + 2e^{2t}$.
- [B] $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- [C] $3e^t - 2e^{2t}$.
- [D] $2e^t - e^{6t}$.
- [E] $-2e^t + 3e^{2t}$.

Teste 3 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(5,0)$.
- B $e^{-2\pi}(2,-1)$.
- C $e^{-2\pi}(1,1)$.
- D $e^{-2\pi}(0,-5)$.
- E $e^{-2\pi}(0,1)$.

Teste 4 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $b \neq 2a$.
- B $a + b \neq 0$.
- C $a \neq b$.
- D $b = 2a$.
- E $a = 1$ e $b = 6$.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A $-\frac{1}{3}$.
- B $\frac{1}{3}$.
- C 5.
- D $\frac{1}{5}$.
- E -3.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \text{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(-i,-1,-i)$.
- B $(i,1,i)$.
- C $(1,-i,1)$.
- D $(-i,1,-i)$.
- E $(-i,2,3-i)$.

Teste 8 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x+3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é vazio.
- B o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- C o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- D o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.

Teste 9 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- B $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- C $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- D $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- E $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B $\frac{1}{3}$.
- C 0.
- D 6.
- E 1.

Teste 11 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- B $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- C $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- D $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- E $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Teste 12 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 3$.
- B $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- C $a \geq 3$.
- D $a > 0$.
- E $a > 3$ ou $a < -3$.

Teste 13 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A T não é simétrico.
- B T não é injetor.
- C T é diagonalizável.
- D $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- E $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.

Teste 14 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- B para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- C para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- D para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- E para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 15 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(1,2)$.
- B $(0,9)$.
- C $(1,4)$.
- D $(6,3)$.
- E $(-4,1)$.

Teste 16 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A -3.
- B $\frac{1}{5}$.
- C $\frac{1}{3}$.
- D $-\frac{1}{3}$.
- E 5.

Teste 2 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1,3-i,4)$ é igual a:

- A $(-i,-1,-i)$.
- B $(i,1,i)$.
- C $(1,-i,1)$.
- D $(-i,1,-i)$.
- E $(-i,2,3-i)$.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 4 Assinale a alternativa correta:

- [A] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- [B] para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [C] para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [D] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- [E] para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 5 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^t - e^{6t}$.
- B $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- C $-2e^t + 3e^{2t}$.
- D $3e^t - 2e^{2t}$.
- E $-e^t + 2e^{2t}$.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- B T é diagonalizável.
- C $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- D T não é injetor.
- E T não é simétrico.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 3.
- B $\frac{1}{3}$.
- C 6.
- D 1.
- E 0.

Teste 8 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \neq b$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a + b \neq 0$.
- $\boxed{\text{C}}$ $b \neq 2a$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a = 1$ e $b = 6$.
- $\boxed{\text{E}}$ $b = 2a$.

Teste 9 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- $\boxed{\text{A}}$ $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- $\boxed{\text{B}}$ $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
- $\boxed{\text{C}}$ $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
- $\boxed{\text{E}}$ $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.

Teste 10 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 3$ ou $a < -3$.
- B $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- C $a > 0$.
- D $a \geq 3$.
- E $a > 3$.

Teste 11 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(0, -5)$.
- B $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- C $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- D $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- E $e^{-2\pi}(2, -1)$.

Teste 12 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ o conjunto solução dessa equação é vazio.
- $\boxed{\text{B}}$ o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- $\boxed{\text{C}}$ o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- $\boxed{\text{D}}$ o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- $\boxed{\text{E}}$ o conjunto solução dessa equação é uma reta.

Teste 13 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 14 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- [A] $(-4, 1)$.
- [B] $(1, 4)$.
- [C] $(0, 9)$.
- [D] $(1, 2)$.
- [E] $(6, 3)$.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 16 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- B $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- C $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- D $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- E $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- B $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- C $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- D $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- E $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Teste 2 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(-4, 1)$.
- B $(1, 4)$.
- C $(1, 2)$.
- D $(0, 9)$.
- E $(6, 3)$.

Teste 3 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $b = 2a$.
- B $a = 1$ e $b = 6$.
- C $a \neq b$.
- D $b \neq 2a$.
- E $a + b \neq 0$.

Teste 4 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- B T não é simétrico.
- C T é diagonalizável.
- D T não é injetor.
- E $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.

Teste 5 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\big(\frac{\pi}{2}\big)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- B $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- C $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- D $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- E $e^{-2\pi}(0, -5)$.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que
$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$
em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 3$.
- B $a > 3$ ou $a < -3$.
- C $a \geq 3$.
- D $a > 0$.
- E $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.

Teste 9 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- D $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $3e^t - 2e^{2t}$.
- B $-e^t + 2e^{2t}$.
- C $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- D $-2e^t + 3e^{2t}$.
- E $2e^t - e^{6t}$.

Teste 11 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- B o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- D o conjunto solução dessa equação é vazio.
- E o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

Teste 12 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- B $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- C $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- D $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- E $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 1.
- B $\frac{1}{3}$.
- C 6.
- D 0.
- E 3.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A 5.
- B $\frac{1}{3}$.
- C -3.
- D $\frac{1}{5}$.
- E $-\frac{1}{3}$.

Teste 15 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- B para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- C para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- D para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- E para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.

Teste 16 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \operatorname{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(1,-i,1)$.
- B $(-i,2,3-i)$.
- C $(-i,-1,-i)$.
- D $(-i,1,-i)$.
- E $(i,1,i)$.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^t - e^{6t}$.
- [B] $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- [C] $-e^t + 2e^{2t}$.
- [D] $-2e^t + 3e^{2t}$.
- [E] $3e^t - 2e^{2t}$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 4 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(1,4)$.
- B $(-4,1)$.
- C $(0,9)$.
- D $(1,2)$.
- E $(6,3)$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 3.
- C $\frac{1}{3}$.
- D 6.
- E 0.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A T não é injetor.
- B $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- C $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T-5\mathrm{I})^2\big)$.
- D T é diagonalizável.
- E T não é simétrico.

Teste 7 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\big(\frac{\pi}{2}\big)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(0,-5)$.
- B $e^{-2\pi}(5,0)$.
- C $e^{-2\pi}(1,1)$.
- D $e^{-2\pi}(2,-1)$.
- E $e^{-2\pi}(0,1)$.

Teste 8 Assinale a alternativa correta:

- [A] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- [B] para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [C] para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [D] para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [E] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Teste 9 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- [A] $b \neq 2a$.
- [B] $a + b \neq 0$.
- [C] $a \neq b$.
- [D] $b = 2a$.
- [E] $a = 1$ e $b = 6$.

Teste 10 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- [A] $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- [B] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- [C] $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
- [D] $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- [E] $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teste 11 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- $\boxed{\text{B}}$ o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- $\boxed{\text{C}}$ o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- $\boxed{\text{D}}$ o conjunto solução dessa equação é vazio.
- $\boxed{\text{E}}$ o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

Teste 12 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3 - i, 4)$ é igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $(1, -i, 1)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $(i, 1, i)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $(-i, 2, 3 - i)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $(-i, -1, -i)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $(-i, 1, -i)$.

Teste 13 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- [A] $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- [B] $a > 3$ ou $a < -3$.
- [C] $a \geq 3$.
- [D] $a > 3$.
- [E] $a > 0$.

Teste 14 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- [A] $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- [B] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- [C] $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [D] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [E] $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1, 3) = (1, 3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1, k) = 5(1, k)$, então k será igual a:

- [A] $\frac{1}{3}$.
- [B] $-\frac{1}{3}$.
- [C] $\frac{1}{5}$.
- [D] -3.
- [E] 5.

Teste 16 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$
- C $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}.$
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 2 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- [A] $a > 3$.
- [B] $a > 0$.
- [C] $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- [D] $a > 3$ ou $a < -3$.
- [E] $a \geq 3$.

Teste 3 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \neq b$.
- $\boxed{\text{B}}$ $b \neq 2a$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a = 1$ e $b = 6$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a + b \neq 0$.
- $\boxed{\text{E}}$ $b = 2a$.

Teste 4 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $3e^t - 2e^{2t}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- $\boxed{\text{C}}$ $2e^t - e^{6t}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $-e^t + 2e^{2t}$.
- $\boxed{\text{E}}$ $-2e^t + 3e^{2t}$.

Teste 5 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

A $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

B $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

C $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

D $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

E $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

A 6.

B 1.

C 0.

D 3.

E $\frac{1}{3}$.

Teste 7 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

A $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T-5\mathrm{I})^2\big)$.

B T não é injetor.

C T é diagonalizável.

D T não é simétrico.

E $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:
$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \text{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3 - i, 4)$ é igual a:

- [A] $(-i, 1, -i)$.
- [B] $(-i, -1, -i)$.
- [C] $(i, 1, i)$.
- [D] $(-i, 2, 3 - i)$.
- [E] $(1, -i, 1)$.

Teste 10 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- [A] $(2\,\mathrm{sen}\,t, \cos t + \mathrm{sen}\,t)$.
- [B] $(\mathrm{sen}\,t, \cos t - \mathrm{sen}\,t)$.
- [C] $(e^t\,\mathrm{sen}\,t, e^t \cos t + \mathrm{sen}\,t)$.
- [D] $(e^t\,\mathrm{sen}\,t, e^t \cos t - e^t\,\mathrm{sen}\,t)$.
- [E] $(\mathrm{sen}\,t, \cos t + 2\,\mathrm{sen}\,t)$.

Teste 11 Assinale a alternativa correta:

- [A] para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [B] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- [C] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- [D] para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [E] para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 12 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- [A] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$
- [B] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$
- [C] $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}.$
- [D] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$
- [E] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$

Teste 13 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x+3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- [B] o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- [C] o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- [D] o conjunto solução dessa equação é vazio.
- [E] o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

A 5.
B $\frac{1}{5}$.
C $\frac{1}{3}$.
D -3.
E $-\frac{1}{3}$.

Teste 15 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

A $(1,2)$.
B $(1,4)$.
C $(-4,1)$.
D $(0,9)$.
E $(6,3)$.

Teste 16 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

A $e^{-2\pi}(2,-1)$.
B $e^{-2\pi}(5,0)$.
C $e^{-2\pi}(0,-5)$.
D $e^{-2\pi}(1,1)$.
E $e^{-2\pi}(0,1)$.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ -3.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{5}$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{D}}$ 5.
- $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{1}{3}$.

Teste 2 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \operatorname{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $(1,-i,1)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $(i,1,i)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $(-i,1,-i)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $(-i,2,3-i)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $(-i,-1,-i)$.

Teste 3 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 5 Considere a matriz:
$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- [A] $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- [B] $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
- [C] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- [D] $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- [E] $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teste 6 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 3$ ou $a < -3$.
- B $a > 3$.
- C $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- D $a > 0$.
- E $a \geq 3$.

Teste 7 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0, 3)$ é igual a:

- A $(1, 4)$.
- B $(6, 3)$.
- C $(0, 9)$.
- D $(1, 2)$.
- E $(-4, 1)$.

Teste 8 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $3e^t - 2e^{2t}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $2e^t - e^{6t}$.
- $\boxed{\text{C}}$ $-e^t + 2e^{2t}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $-2e^t + 3e^{2t}$.
- $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.

Teste 9 Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- $\boxed{\text{B}}$ para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- $\boxed{\text{C}}$ para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- $\boxed{\text{D}}$ para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1 + i$ e $3 - i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- $\boxed{\text{E}}$ para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1 + i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 10 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a + b \neq 0$.
- $\boxed{\text{B}}$ $b \neq 2a$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a = 1$ e $b = 6$.
- $\boxed{\text{D}}$ $b = 2a$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a \neq b$.

Teste 11 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $e^{-2\pi}(0, -5)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $e^{-2\pi}(5, 0)$.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 13 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- [B] o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- [C] o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- [D] o conjunto solução dessa equação é vazio.
- [E] o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- B T é diagonalizável.
- C T não é injetor.
- D $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- E T não é simétrico.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B $\frac{1}{3}$.
- C 1.
- D 0.
- E 6.

Teste 16 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$
- B $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}.$
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$

+10/11/2+

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- [A] $e^{-2\pi}(0, -5)$.
- [B] $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- [C] $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- [D] $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- [E] $e^{-2\pi}(5, 0)$.

Teste 2 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- [A] $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [B] $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- [C] $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [D] $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [E] $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 3 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

A $(-4, 1)$.
B $(1, 2)$.
C $(1, 4)$.
D $(6, 3)$.
E $(0, 9)$.

Teste 4 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

A $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
B $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
C $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
D $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
E $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.

Teste 5 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\operatorname{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

A T não é injetor.
B $\operatorname{Ker}(T) = \big(\operatorname{Im}(T)\big)^\perp$.
C $\operatorname{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \operatorname{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
D T é diagonalizável.
E T não é simétrico.

Teste 6 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $b = 2a$.
- B $b \neq 2a$.
- C $a = 1$ e $b = 6$.
- D $a + b \neq 0$.
- E $a \neq b$.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \text{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(1,-i,1)$.
- B $(-i,2,3-i)$.
- C $(-i,-1,-i)$.
- D $(-i,1,-i)$.
- E $(i,1,i)$.

Teste 9 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- B para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- C para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- D para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- E para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $3e^t - 2e^{2t}$.
- B $-e^t + 2e^{2t}$.
- C $-2e^t + 3e^{2t}$.
- D $2e^t - e^{6t}$.
- E $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.

Teste 11 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
- B $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 13 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é vazio.
- B o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação é uma reta.

Teste 14 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a > 3$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a > 3$ ou $a < -3$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a > 0$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a \geq 3$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $-\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{C}}$ 5.
- $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{5}$.
- $\boxed{\text{E}}$ -3.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a + b + c$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ 1.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{C}}$ 0.
- $\boxed{\text{D}}$ 3.
- $\boxed{\text{E}}$ 6.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

A $-e^t + 2e^{2t}$.
B $-2e^t + 3e^{2t}$.
C $3e^t - 2e^{2t}$.
D $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
E $2e^t - e^{6t}$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

A 1.
B $\frac{1}{3}$.
C 6.
D 0.
E 3.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 4 Considere a matriz:
$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- [A] $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [B] $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [C] $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [D] $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- [E] $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- [A] 5.
- [B] $\frac{1}{5}$.
- [C] $\frac{1}{3}$.
- [D] $-\frac{1}{3}$.
- [E] -3.

Teste 6 Assinale a alternativa correta:

- [A] para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [B] para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [C] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- [D] para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [E] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Teste 7 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- [A] $(1,2)$.
- [B] $(-4,1)$.
- [C] $(6,3)$.
- [D] $(1,4)$.
- [E] $(0,9)$.

Teste 8 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- [A] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
- [B] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
- [C] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- [D] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
- [E] $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.

Teste 9 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- [A] $a + b \neq 0$.
- [B] $a \neq b$.
- [C] $b = 2a$.
- [D] $b \neq 2a$.
- [E] $a = 1$ e $b = 6$.

Teste 10 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- B $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- C $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- D $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- E $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.

Teste 11 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \operatorname{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(-i, 1, -i)$.
- B $(-i, -1, -i)$.
- C $(-i, 2, 3-i)$.
- D $(1, -i, 1)$.
- E $(i, 1, i)$.

Teste 12 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A\begin{pmatrix}1-i\\2+3i\end{pmatrix} = (i-4)\begin{pmatrix}1-i\\2+3i\end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(0,1)$.
- B $e^{-2\pi}(2,-1)$.
- C $e^{-2\pi}(5,0)$.
- D $e^{-2\pi}(1,1)$.
- E $e^{-2\pi}(0,-5)$.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 14 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- B o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é vazio.
- E o conjunto solução dessa equação é uma reta.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- B T é diagonalizável.
- C $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- D T não é simétrico.
- E T não é injetor.

Teste 16 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 3$ ou $a < -3$.
- B $a > 0$.
- C $a \geq 3$.
- D $a > 3$.
- E $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$
- D $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}.$
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$

Teste 2 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a \geq 3.$
- B $a > 0.$
- C $a \geq 3$ ou $a \leq -3.$
- D $a > 3.$
- E $a > 3$ ou $a < -3.$

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 4 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- B para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- C para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- D para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- E para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ -3.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{5}$.
- $\boxed{\text{C}}$ 5.
- $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{1}{3}$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ 1.
- $\boxed{\text{B}}$ 3.
- $\boxed{\text{C}}$ 6.
- $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{E}}$ 0.

Teste 7 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.

Teste 8 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- B o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- C o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- D o conjunto solução dessa equação é vazio.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 10 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- [A] $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [B] $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [C] $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [D] $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- [E] $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 11 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- [A] $(6,3)$.
- [B] $(-4,1)$.
- [C] $(0,9)$.
- [D] $(1,4)$.
- [E] $(1,2)$.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- [A] T é diagonalizável.
- [B] $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- [C] T não é simétrico.
- [D] $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- [E] T não é injetor.

Teste 13 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

A $3e^t - 2e^{2t}$.
B $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
C $2e^t - e^{6t}$.
D $-e^t + 2e^{2t}$.
E $-2e^t + 3e^{2t}$.

Teste 14 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

A $b \neq 2a$.
B $a \neq b$.
C $a + b \neq 0$.
D $a = 1$ e $b = 6$.
E $b = 2a$.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3 - i, 4)$ é igual a:

- A $(i, 1, i)$.
- B $(-i, 1, -i)$.
- C $(1, -i, 1)$.
- D $(-i, -1, -i)$.
- E $(-i, 2, 3 - i)$.

Teste 16 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 + 3i \end{pmatrix} = (i - 4) \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 + 3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- B $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- C $e^{-2\pi}(0, -5)$.
- D $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- E $e^{-2\pi}(5, 0)$.

+13/11/26+

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

A $(-4, 1)$.
B $(1, 4)$.
C $(1, 2)$.
D $(6, 3)$.
E $(0, 9)$.

Teste 2 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

A $a > 3$.
B $a \geq 3$.
C $a > 0$.
D $a > 3$ ou $a < -3$.
E $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] 1.
- [B] 6.
- [C] 0.
- [D] $\frac{1}{3}$.
- [E] 3.

Teste 4 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- [A] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [B] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- [C] $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- [D] $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- [E] $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.

Teste 5 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- B $-2e^t + 3e^{2t}$.
- C $-e^t + 2e^{2t}$.
- D $2e^t - e^{6t}$.
- E $3e^t - 2e^{2t}$.

Teste 6 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $a + b \neq 0$.
- B $b = 2a$.
- C $a = 1$ e $b = 6$.
- D $a \neq b$.
- E $b \neq 2a$.

Teste 7 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B o conjunto solução dessa equação é vazio.
- C o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- D o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.

Teste 8 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$
- E $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}\,.$

Teste 9 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $e^{-2\pi}(1,1)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $e^{-2\pi}(0,1)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $e^{-2\pi}(5,0)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $e^{-2\pi}(0,-5)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $e^{-2\pi}(2,-1)$.

Teste 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- $\boxed{\text{C}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 11 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- B T não é injetor.
- C T não é simétrico.
- D T é diagonalizável.
- E $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.

Teste 12 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3 - i, 4)$ é igual a:

- A $(1, -i, 1)$.
- B $(-i, -1, -i)$.
- C $(-i, 2, 3 - i)$.
- D $(i, 1, i)$.
- E $(-i, 1, -i)$.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 14 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- [A] $-\frac{1}{3}$.
- [B] 5.
- [C] -3.
- [D] $\frac{1}{3}$.
- [E] $\frac{1}{5}$.

Teste 16 Assinale a alternativa correta:

- [A] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- [B] para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [C] para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [D] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- [E] para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

+14/11/14+

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** _____________ **Turma:** _________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] 6.
- [B] 3.
- [C] $\frac{1}{3}$.
- [D] 1.
- [E] 0.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 3 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1,3-i,4)$ é igual a:

- A $(-i,1,-i)$.
- B $(1,-i,1)$.
- C $(-i,-1,-i)$.
- D $(-i,2,3-i)$.
- E $(i,1,i)$.

Teste 4 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O,\mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x+3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- B o conjunto solução dessa equação é vazio.
- C o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.

Teste 5 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $-2e^t + 3e^{2t}$.
- B $3e^t - 2e^{2t}$.
- C $2e^t - e^{6t}$.
- D $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- E $-e^t + 2e^{2t}$.

Teste 6 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- B $a > 0$.
- C $a > 3$.
- D $a \geq 3$.
- E $a > 3$ ou $a < -3$.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 8 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- [A] $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- [B] T não é injetor.
- [C] T não é simétrico.
- [D] T é diagonalizável.
- [E] $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.

Teste 9 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(6,3)$.
- B $(-4,1)$.
- C $(1,2)$.
- D $(0,9)$.
- E $(1,4)$.

Teste 10 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- E $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.

Teste 11 Assinale a alternativa correta:

A para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

B para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

C para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

D para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

E para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.

Teste 12 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A\begin{pmatrix}1-i\\2+3i\end{pmatrix} = (i-4)\begin{pmatrix}1-i\\2+3i\end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

A $e^{-2\pi}(5,0)$.

B $e^{-2\pi}(1,1)$.

C $e^{-2\pi}(2,-1)$.

D $e^{-2\pi}(0,-5)$.

E $e^{-2\pi}(0,1)$.

Teste 13 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $a + b \neq 0$.
- B $a = 1$ e $b = 6$.
- C $a \neq b$.
- D $b \neq 2a$.
- E $b = 2a$.

Teste 14 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- B $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- C $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- D $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- E $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.

Teste 15 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A 5.
- B -3.
- C $\frac{1}{5}$.
- D $\frac{1}{3}$.
- E $-\frac{1}{3}$.

+15/11/2+

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $b \neq 2a$.
- B $a + b \neq 0$.
- C $b = 2a$.
- D $a \neq b$.
- E $a = 1$ e $b = 6$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A -3.
- B $\frac{1}{5}$.
- C $\frac{1}{3}$.
- D 5.
- E $-\frac{1}{3}$.

Teste 3 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- B para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1 + i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- C para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- D para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- E para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1 + i$ e $3 - i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 1.
- C 6.
- D 0.
- E $\frac{1}{3}$.

Teste 5 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- B T não é simétrico.
- C T é diagonalizável.
- D T não é injetor.
- E $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T-5\mathrm{I})^2\big)$.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 7 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- [A] $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [B] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- [C] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [D] $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- [E] $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.

Teste 8 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- [A] $a > 3$.
- [B] $a \geq 3$.
- [C] $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- [D] $a > 0$.
- [E] $a > 3$ ou $a < -3$.

Teste 9 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 10 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- B o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação é vazio.
- E o conjunto solução dessa equação é uma reta.

Teste 11 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A\begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4)\begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(0,-5)$.
- B $e^{-2\pi}(0,1)$.
- C $e^{-2\pi}(1,1)$.
- D $e^{-2\pi}(2,-1)$.
- E $e^{-2\pi}(5,0)$.

Teste 12 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1,3-i,4)$ é igual a:

- A $(i,1,i)$.
- B $(-i,1,-i)$.
- C $(-i,-1,-i)$.
- D $(1,-i,1)$.
- E $(-i,2,3-i)$.

Teste 13 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- B $-2e^t + 3e^{2t}$.
- C $3e^t - 2e^{2t}$.
- D $-e^t + 2e^{2t}$.
- E $2e^t - e^{6t}$.

Teste 14 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0, 3)$ é igual a:

- A $(-4, 1)$.
- B $(1, 4)$.
- C $(0, 9)$.
- D $(6, 3)$.
- E $(1, 2)$.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{C}}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$
- D $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}\,.$
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$

+16/11/50+

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

[A] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
[B] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
[C] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
[D] $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
[E] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.

Teste 2 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

[A] $a \geq 3$.
[B] $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
[C] $a > 3$ ou $a < -3$.
[D] $a > 0$.
[E] $a > 3$.

Teste 3 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- B para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- C para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- D para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- E para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 4 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $-2e^t + 3e^{2t}$.
- B $-e^t + 2e^{2t}$.
- C $3e^t - 2e^{2t}$.
- D $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- E $2e^t - e^{6t}$.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 6 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:
$$A \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 + 3i \end{pmatrix} = (i - 4) \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 + 3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- [A] $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- [B] $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- [C] $e^{-2\pi}(0, -5)$.
- [D] $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- [E] $e^{-2\pi}(1, 1)$.

Teste 7 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- B $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- C $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- D $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- E $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 3.
- C 6.
- D $\frac{1}{3}$.
- E 0.

Teste 9 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- B o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é vazio.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.

Teste 10 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 11 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- B T é diagonalizável.
- C $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- D T não é simétrico.
- E T não é injetor.

Teste 12 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $b = 2a$.
- B $a \neq b$.
- C $a + b \neq 0$.
- D $b \neq 2a$.
- E $a = 1$ e $b = 6$.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \text{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3 - i, 4)$ é igual a:

- A $(-i, 1, -i)$.
- B $(-i, -1, -i)$.
- C $(-i, 2, 3 - i)$.
- D $(i, 1, i)$.
- E $(1, -i, 1)$.

Teste 15 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0, 3)$ é igual a:

- A $(0, 9)$.
- B $(-4, 1)$.
- C $(1, 4)$.
- D $(6, 3)$.
- E $(1, 2)$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1, 3) = (1, 3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1, k) = 5(1, k)$, então k será igual a:

- A $\frac{1}{5}$.
- B -3.
- C $-\frac{1}{3}$.
- D 5.
- E $\frac{1}{3}$.

+17/11/38+

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ___________________________________ **NUSP:** _____________ **Turma:** _____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $b = 2a$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a \neq b$.
- $\boxed{\text{C}}$ $b \neq 2a$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a = 1$ e $b = 6$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a + b \neq 0$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{B}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 4 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:
$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \operatorname{Ker}(T).$$
Temos que $T(1, 3 - i, 4)$ é igual a:

- [A] $(-i, 1, -i)$.
- [B] $(1, -i, 1)$.
- [C] $(-i, -1, -i)$.
- [D] $(i, 1, i)$.
- [E] $(-i, 2, 3 - i)$.

Teste 5 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a \geq 3$.
- B $a > 0$.
- C $a > 3$.
- D $a > 3$ ou $a < -3$.
- E $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B $\frac{1}{3}$.
- C 6.
- D 0.
- E 3.

Teste 7 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A\begin{pmatrix}1-i\\2+3i\end{pmatrix}=(i-4)\begin{pmatrix}1-i\\2+3i\end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(0,-5)$.
- B $e^{-2\pi}(5,0)$.
- C $e^{-2\pi}(1,1)$.
- D $e^{-2\pi}(2,-1)$.
- E $e^{-2\pi}(0,1)$.

Teste 8 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O,\mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2+6xy+9y^2+2\sqrt{10}\,(x+3y)=0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- B o conjunto solução dessa equação é vazio.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- E o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

Teste 9 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- [A] $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- [B] $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [C] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [D] $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- [E] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- [B] $2e^t - e^{6t}$.
- [C] $3e^t - 2e^{2t}$.
- [D] $-e^t + 2e^{2t}$.
- [E] $-2e^t + 3e^{2t}$.

Teste 11 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(0,9)$.
- B $(-4,1)$.
- C $(6,3)$.
- D $(1,2)$.
- E $(1,4)$.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A T não é injetor.
- B T não é simétrico.
- C $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- E T é diagonalizável.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A $\frac{1}{5}$.
- B $\frac{1}{3}$.
- C 5.
- D $-\frac{1}{3}$.
- E -3.

Teste 14 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.

B $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.

C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.

D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.

E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.

Teste 15 Assinale a alternativa correta:

A para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

B para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

C para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.

D para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

E para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Teste 16 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3 - i, 4)$ é igual a:

- A $(i, 1, i)$.
- B $(1, -i, 1)$.
- C $(-i, 2, 3 - i)$.
- D $(-i, 1, -i)$.
- E $(-i, -1, -i)$.

Teste 2 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- B $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.

Teste 3 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- [A] $(1,2)$.
- [B] $(1,4)$.
- [C] $(6,3)$.
- [D] $(0,9)$.
- [E] $(-4,1)$.

Teste 4 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] o conjunto solução dessa equação é vazio.
- [B] o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- [C] o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- [D] o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- [E] o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

Teste 5 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 3$.
- B $a > 3$ ou $a < -3$.
- C $a \geq 3$.
- D $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- E $a > 0$.

Teste 6 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(0, -5)$.
- B $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- C $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- D $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- E $e^{-2\pi}(0, 1)$.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 8 Assinale a alternativa correta:

- [A] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- [B] para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [C] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- [D] para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [E] para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 9 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A $\frac{1}{5}$.
- B $\frac{1}{3}$.
- C -3.
- D $-\frac{1}{3}$.
- E 5.

Teste 11 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $-e^t + 2e^{2t}$.
- B $3e^t - 2e^{2t}$.
- C $2e^t - e^{6t}$.
- D $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- E $-2e^t + 3e^{2t}$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

$\boxed{A}$ 6.

$\boxed{B}$ $\frac{1}{3}$.

$\boxed{C}$ 3.

$\boxed{D}$ 0.

$\boxed{E}$ 1.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

$\boxed{A}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{B}$ todas as afirmações são verdadeiras.

$\boxed{C}$ apenas a afirmação (III) é verdadeira.

$\boxed{D}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

$\boxed{E}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 14 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- B $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- C $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- D $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- E $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\operatorname{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\operatorname{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \operatorname{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- B T não é simétrico.
- C $\operatorname{Ker}(T) = \big(\operatorname{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- D T não é injetor.
- E T é diagonalizável.

Teste 16 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $a \neq b$.
- B $b = 2a$.
- C $a = 1$ e $b = 6$.
- D $b \neq 2a$.
- E $a + b \neq 0$.

+19/11/14+

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A T não é simétrico.
- B T não é injetor.
- C $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- D $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- E T é diagonalizável.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 6.
- B 3.
- C $\frac{1}{3}$.
- D 1.
- E 0.

Teste 3 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $b \neq 2a$.
- B $a = 1$ e $b = 6$.
- C $b = 2a$.
- D $a \neq b$.
- E $a + b \neq 0$.

Teste 4 Assinale a alternativa correta:

$\boxed{A}$ para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.

$\boxed{B}$ para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1 + i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

$\boxed{C}$ para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1 + i$ e $3 - i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

$\boxed{D}$ para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

$\boxed{E}$ para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 5 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

$\boxed{A}$ $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.

$\boxed{B}$ $a > 3$.

$\boxed{C}$ $a > 0$.

$\boxed{D}$ $a \geq 3$.

$\boxed{E}$ $a > 3$ ou $a < -3$.

Teste 6 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $-2e^t + 3e^{2t}$.
- B $-e^t + 2e^{2t}$.
- C $2e^t - e^{6t}$.
- D $3e^t - 2e^{2t}$.
- E $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.

Teste 7 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(6,3)$.
- B $(1,4)$.
- C $(1,2)$.
- D $(-4,1)$.
- E $(0,9)$.

Teste 8 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é vazio.
- B o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- E o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- B $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- C $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- D $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- E $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.

Teste 11 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \operatorname{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3 - i, 4)$ é igual a:

- A $(1, -i, 1)$.
- B $(i, 1, i)$.
- C $(-i, 1, -i)$.
- D $(-i, 2, 3 - i)$.
- E $(-i, -1, -i)$.

Teste 12 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A 5.
- B -3.
- C $-\frac{1}{3}$.
- D $\frac{1}{5}$.
- E $\frac{1}{3}$.

Teste 14 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(0,-5)$.
- B $e^{-2\pi}(5,0)$.
- C $e^{-2\pi}(2,-1)$.
- D $e^{-2\pi}(0,1)$.
- E $e^{-2\pi}(1,1)$.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 16 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$
- C $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}.$
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $-e^t + 2e^{2t}$.
- B $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- C $3e^t - 2e^{2t}$.
- D $2e^t - e^{6t}$.
- E $-2e^t + 3e^{2t}$.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A T não é injetor.
- B $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- C $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- D T não é simétrico.
- E T é diagonalizável.

Teste 3 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \operatorname{Ker}(T).$$

Temos que $T(1,3-i,4)$ é igual a:

- A $(1,-i,1)$.
- B $(-i,-1,-i)$.
- C $(-i,2,3-i)$.
- D $(-i,1,-i)$.
- E $(i,1,i)$.

Teste 4 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O,\mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a,b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $b \neq 2a$.
- B $a = 1$ e $b = 6$.
- C $a + b \neq 0$.
- D $a \neq b$.
- E $b = 2a$.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 6 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- $\boxed{\text{A}}$ $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$
- $\boxed{\text{B}}$ $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$
- $\boxed{\text{C}}$ $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$
- $\boxed{\text{D}}$ $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$
- $\boxed{\text{E}}$ $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}\,.$

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- $\boxed{\text{C}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- B para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- C para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- D para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- E para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A $\frac{1}{3}$.
- B 3.
- C 0.
- D 1.
- E 6.

Teste 10 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- B $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- C $(2\operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- D $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2\operatorname{sen} t)$.
- E $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{5}$.
- $\boxed{\text{B}}$ -3.
- $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{E}}$ 5.

Teste 12 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a > 3$ ou $a < -3$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a \geq 3$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a > 3$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a > 0$.

Teste 13 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $(1,4)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $(6,3)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $(0,9)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $(-4,1)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $(1,2)$.

Teste 14 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- B $e^{-2\pi}(0, -5)$.
- C $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- D $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- E $e^{-2\pi}(2, -1)$.

Teste 15 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 16 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- [B] o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- [C] o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- [D] o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- [E] o conjunto solução dessa equação é vazio.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \operatorname{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(1, -i, 1)$.
- B $(-i, 2, 3-i)$.
- C $(-i, -1, -i)$.
- D $(i, 1, i)$.
- E $(-i, 1, -i)$.

Teste 2 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^t - e^{6t}$.
- B $3e^t - 2e^{2t}$.
- C $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- D $-e^t + 2e^{2t}$.
- E $-2e^t + 3e^{2t}$.

Teste 3 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é vazio.
- B o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.

Teste 4 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- B para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1 + i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- C para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- D para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1 + i$ e $3 - i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- E para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.

Teste 5 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- B $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- C $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- D $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- E $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 7 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A 5.
- B $\frac{1}{3}$.
- C -3.
- D $-\frac{1}{3}$.
- E $\frac{1}{5}$.

Teste 10 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $a = 1$ e $b = 6$.
- B $a + b \neq 0$.
- C $a \neq b$.
- D $b \neq 2a$.
- E $b = 2a$.

Teste 11 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(1,1)$.
- B $e^{-2\pi}(5,0)$.
- C $e^{-2\pi}(0,1)$.
- D $e^{-2\pi}(0,-5)$.
- E $e^{-2\pi}(2,-1)$.

Teste 12 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

A $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

C $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

D $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

E $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

A $\frac{1}{3}$.

B 6.

C 1.

D 0.

E 3.

Teste 14 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(1,4)$.
- B $(-4,1)$.
- C $(1,2)$.
- D $(6,3)$.
- E $(0,9)$.

Teste 15 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 3$ ou $a < -3$.
- B $a \geq 3$.
- C $a > 0$.
- D $a > 3$.
- E $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- B T não é injetor.
- C T é diagonalizável.
- D $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- E T não é simétrico.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ________________________________ **NUSP:** _____________ **Turma:** _________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é vazio.
- B o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- C o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.

Teste 2 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- B para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- C para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1 + i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- D para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1 + i$ e $3 - i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- E para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 3 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 0$.
- B $a > 3$.
- C $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- D $a \geq 3$.
- E $a > 3$ ou $a < -3$.

Teste 4 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $-2e^t + 3e^{2t}$.
- B $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- C $-e^t + 2e^{2t}$.
- D $2e^t - e^{6t}$.
- E $3e^t - 2e^{2t}$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 6.
- C 1.
- D 0.
- E $\frac{1}{3}$.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(-i, 2, 3-i)$.
- B $(-i, 1, -i)$.
- C $(i, 1, i)$.
- D $(-i, -1, -i)$.
- E $(1, -i, 1)$.

Teste 8 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(0, 9)$.
- B $(1, 2)$.
- C $(-4, 1)$.
- D $(6, 3)$.
- E $(1, 4)$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- [A] $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- [B] $e^{-2\pi}(0, -5)$.
- [C] $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- [D] $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- [E] $e^{-2\pi}(0, 1)$.

Teste 11 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- B $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- C $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- D $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- E $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1, 3) = (1, 3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1, k) = 5(1, k)$, então k será igual a:

- A $-\frac{1}{3}$.
- B -3.
- C $\frac{1}{5}$.
- D 5.
- E $\frac{1}{3}$.

Teste 13 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- B $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- C $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- D $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
- E $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

A $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.

B $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.

C T não é simétrico.

D T é diagonalizável.

E T não é injetor.

Teste 15 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

A $b = 2a$.

B $a + b \neq 0$.

C $a \neq b$.

D $a = 1$ e $b = 6$.

E $b \neq 2a$.

Teste 16 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$
- C $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}.$
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$

+23/11/26+

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A $\frac{1}{5}$.
- B $-\frac{1}{3}$.
- C 5.
- D $\frac{1}{3}$.
- E -3.

Teste 2 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- B $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- C $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- D $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- E $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.

Teste 3 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(-4,1)$.
- B $(1,4)$.
- C $(1,2)$.
- D $(0,9)$.
- E $(6,3)$.

Teste 4 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $-e^t + 2e^{2t}$.
- B $3e^t - 2e^{2t}$.
- C $2e^t - e^{6t}$.
- D $-2e^t + 3e^{2t}$.
- E $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.

Teste 5 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.

Teste 6 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- [A] $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- [B] $a > 0$.
- [C] $a > 3$.
- [D] $a \geq 3$.
- [E] $a > 3$ ou $a < -3$.

Teste 7 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- [B] T é diagonalizável.
- [C] $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- [D] T não é simétrico.
- [E] T não é injetor.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] 6.
- [B] 0.
- [C] 3.
- [D] 1.
- [E] $\frac{1}{3}$.

Teste 9 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A\begin{pmatrix}1-i\\2+3i\end{pmatrix} = (i-4)\begin{pmatrix}1-i\\2+3i\end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\big(\frac{\pi}{2}\big)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $e^{-2\pi}(0,1)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $e^{-2\pi}(1,1)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $e^{-2\pi}(2,-1)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $e^{-2\pi}(0,-5)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $e^{-2\pi}(5,0)$.

Teste 10 Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- $\boxed{\text{B}}$ para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- $\boxed{\text{C}}$ para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- $\boxed{\text{D}}$ para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- $\boxed{\text{E}}$ para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 12 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- [B] o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- [C] o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- [D] o conjunto solução dessa equação é vazio.
- [E] o conjunto solução dessa equação é uma reta.

Teste 13 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \operatorname{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(1, -i, 1)$.
- B $(i, 1, i)$.
- C $(-i, -1, -i)$.
- D $(-i, 1, -i)$.
- E $(-i, 2, 3-i)$.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[B] todas as afirmações são verdadeiras.

[C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação
$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$
representará uma parábola se, e somente se:

[A] $b = 2a$.

[B] $b \neq 2a$.

[C] $a + b \neq 0$.

[D] $a = 1$ e $b = 6$.

[E] $a \neq b$.

+24/11/14+

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

A o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

B o conjunto solução dessa equação é uma reta.

C o conjunto solução dessa equação é vazio.

D o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.

E o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.

Teste 2 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$

B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$

C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$

D $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}.$

E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$

Teste 3 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A T não é injetor.
- B T é diagonalizável.
- C $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- D $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- E T não é simétrico.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 5 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $a \neq b$.
- B $a + b \neq 0$.
- C $b = 2a$.
- D $b \neq 2a$.
- E $a = 1$ e $b = 6$.

Teste 6 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0, 3)$ é igual a:

- A $(1, 4)$.
- B $(-4, 1)$.
- C $(1, 2)$.
- D $(0, 9)$.
- E $(6, 3)$.

Teste 7 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 3$.
- B $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- C $a > 0$.
- D $a > 3$ ou $a < -3$.
- E $a \geq 3$.

Teste 8 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- B para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1 + i$ e $3 - i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- C para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- D para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1 + i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- E para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Teste 9 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- B $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- C $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- D $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- E $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $-e^t + 2e^{2t}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- $\boxed{\text{C}}$ $3e^t - 2e^{2t}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $-2e^t + 3e^{2t}$.
- $\boxed{\text{E}}$ $2e^t - e^{6t}$.

Teste 11 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $e^{-2\pi}(0, -5)$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A $\frac{1}{3}$.
- B 5.
- C $\frac{1}{5}$.
- D -3.
- E $-\frac{1}{3}$.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(i,1,i)$.
- B $(-i,-1,-i)$.
- C $(-i,1,-i)$.
- D $(1,-i,1)$.
- E $(-i,2,3-i)$.

Teste 14 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- B $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- C $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- D $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- E $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 6.
- C 1.
- D $\frac{1}{3}$.
- E 0.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 0.
- B 1.
- C $\frac{1}{3}$.
- D 6.
- E 3.

Teste 2 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1,3-i,4)$ é igual a:

- A $(-i,2,3-i)$.
- B $(i,1,i)$.
- C $(-i,-1,-i)$.
- D $(-i,1,-i)$.
- E $(1,-i,1)$.

Teste 3 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- B o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- D o conjunto solução dessa equação é vazio.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.

Teste 4 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A T não é simétrico.
- B $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- C T é diagonalizável.
- D $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- E T não é injetor.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 6 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:
$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- [A] $e^{-2\pi}(0,-5)$.
- [B] $e^{-2\pi}(0,1)$.
- [C] $e^{-2\pi}(5,0)$.
- [D] $e^{-2\pi}(1,1)$.
- [E] $e^{-2\pi}(2,-1)$.

Teste 7 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(0,9)$.
- B $(6,3)$.
- C $(1,4)$.
- D $(-4,1)$.
- E $(1,2)$.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A $-\frac{1}{3}$.
- B 5.
- C $\frac{1}{3}$.
- D -3.
- E $\frac{1}{5}$.

Teste 10 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $2e^t - e^{6t}$.
- B $-e^t + 2e^{2t}$.
- C $3e^t - 2e^{2t}$.
- D $-2e^t + 3e^{2t}$.
- E $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.

Teste 11 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $a + b \neq 0$.
- B $a \neq b$.
- C $b = 2a$.
- D $b \neq 2a$.
- E $a = 1$ e $b = 6$.

Teste 12 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

A $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
B $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
C $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
D $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
E $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 13 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

A $a \geq 3$.
B $a > 3$ ou $a < -3$.
C $a > 3$.
D $a > 0$.
E $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.

Teste 14 Assinale a alternativa correta:

A para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.

B para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

C para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

D para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

E para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 15 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$
- C $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}.$
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$

Teste 16 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(2\,\mathrm{sen}\,t, \cos t + \mathrm{sen}\,t).$
- B $(\mathrm{sen}\,t, \cos t + 2\,\mathrm{sen}\,t).$
- C $(\mathrm{sen}\,t, \cos t - \mathrm{sen}\,t).$
- D $(e^t\,\mathrm{sen}\,t, e^t \cos t + \mathrm{sen}\,t).$
- E $(e^t\,\mathrm{sen}\,t, e^t \cos t - e^t\,\mathrm{sen}\,t).$

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** _____________ **Turma:** _________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(0,1)$.
- B $e^{-2\pi}(2,-1)$.
- C $e^{-2\pi}(1,1)$.
- D $e^{-2\pi}(5,0)$.
- E $e^{-2\pi}(0,-5)$.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A 5.
- B $\frac{1}{3}$.
- C $-\frac{1}{3}$.
- D -3.
- E $\frac{1}{5}$.

Teste 3 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1,3-i,4)$ é igual a:

- A $(-i,1,-i)$.
- B $(-i,-1,-i)$.
- C $(i,1,i)$.
- D $(1,-i,1)$.
- E $(-i,2,3-i)$.

Teste 4 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

A $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

B $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

C $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas a afirmação (III) é verdadeira.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 6 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $b \neq 2a$.
- B $a + b \neq 0$.
- C $a \neq b$.
- D $b = 2a$.
- E $a = 1$ e $b = 6$.

Teste 7 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 3$.
- B $a > 0$.
- C $a \geq 3$.
- D $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- E $a > 3$ ou $a < -3$.

Teste 8 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A T é diagonalizável.
- B $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- C $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- D T não é injetor.
- E T não é simétrico.

Teste 9 Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- $\boxed{\text{B}}$ para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- $\boxed{\text{C}}$ para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- $\boxed{\text{D}}$ para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- $\boxed{\text{E}}$ para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Teste 10 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $(-4, 1)$.
- $\boxed{\text{B}}$ $(0, 9)$.
- $\boxed{\text{C}}$ $(1, 4)$.
- $\boxed{\text{D}}$ $(1, 2)$.
- $\boxed{\text{E}}$ $(6, 3)$.

Teste 11 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3.$
- B $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}.$
- C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0.$
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9.$
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1.$

Teste 12 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- B o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- C o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- E o conjunto solução dessa equação é vazio.

Teste 13 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $-2e^t + 3e^{2t}$.
- B $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- C $3e^t - 2e^{2t}$.
- D $2e^t - e^{6t}$.
- E $-e^t + 2e^{2t}$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B $\frac{1}{3}$.
- C 3.
- D 0.
- E 6.

Teste 16 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- B $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- C $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- D $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- E $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A\begin{pmatrix}1-i\\2+3i\end{pmatrix} = (i-4)\begin{pmatrix}1-i\\2+3i\end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2,-1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- [A] $e^{-2\pi}(5,0)$.
- [B] $e^{-2\pi}(0,-5)$.
- [C] $e^{-2\pi}(0,1)$.
- [D] $e^{-2\pi}(1,1)$.
- [E] $e^{-2\pi}(2,-1)$.

Teste 2 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $-2e^t + 3e^{2t}$.
- [B] $-e^t + 2e^{2t}$.
- [C] $2e^t - e^{6t}$.
- [D] $3e^t - 2e^{2t}$.
- [E] $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.

Teste 3 Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- $\boxed{\text{B}}$ para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- $\boxed{\text{C}}$ para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1 + i$ e $3 - i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- $\boxed{\text{D}}$ para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- $\boxed{\text{E}}$ para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1 + i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A -3.
- B 5.
- C $-\frac{1}{3}$.
- D $\frac{1}{3}$.
- E $\frac{1}{5}$.

Teste 6 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 0$.
- B $a > 3$.
- C $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- D $a \geq 3$.
- E $a > 3$ ou $a < -3$.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \operatorname{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(-i, -1, -i)$.
- B $(i, 1, i)$.
- C $(1, -i, 1)$.
- D $(-i, 1, -i)$.
- E $(-i, 2, 3-i)$.

Teste 8 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

A $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

B $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

C $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

A 6.

B 0.

C 3.

D $\frac{1}{3}$.

E 1.

Teste 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 11 Considere a matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- [A] $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- [B] $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [C] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [D] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- [E] $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.

Teste 12 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
D $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.

Teste 13 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0, 3)$ é igual a:

A $(0, 9)$.
B $(6, 3)$.
C $(1, 2)$.
D $(-4, 1)$.
E $(1, 4)$.

Teste 14 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- [B] o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- [C] o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- [D] o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- [E] o conjunto solução dessa equação é vazio.

Teste 15 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- [A] $b \neq 2a$.
- [B] $a \neq b$.
- [C] $a = 1$ e $b = 6$.
- [D] $b = 2a$.
- [E] $a + b \neq 0$.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- [B] T não é simétrico.
- [C] $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- [D] T é diagonalizável.
- [E] T não é injetor.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- B para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- C para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- D para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- E para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 3 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- [A] $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- [B] $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
- [C] $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- [D] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- [E] $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Teste 4 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- [A] $(0,9)$.
- [B] $(1,4)$.
- [C] $(-4,1)$.
- [D] $(1,2)$.
- [E] $(6,3)$.

Teste 5 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- [A] $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- [B] $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- [C] $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- [D] $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- [E] $e^{-2\pi}(0, -5)$.

Teste 6 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- [A] $a = 1$ e $b = 6$.
- [B] $b \neq 2a$.
- [C] $b = 2a$.
- [D] $a + b \neq 0$.
- [E] $a \neq b$.

Teste 7 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a > 0$.
- B $a > 3$.
- C $a \geq 3$.
- D $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- E $a > 3$ ou $a < -3$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1, i, 1) = i(1, i, 1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3 - i, 4)$ é igual a:

- A $(-i, 2, 3 - i)$.
- B $(-i, 1, -i)$.
- C $(1, -i, 1)$.
- D $(-i, -1, -i)$.
- E $(i, 1, i)$.

Teste 9 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é vazio.
- B o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- D o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- E o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.

Teste 10 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- B T não é simétrico.
- C T é diagonalizável.
- D T não é injetor.
- E $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.

Teste 11 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- A $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- B $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- C $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- D $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- E $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.

Teste 12 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $-e^t + 2e^{2t}$.
- B $3e^t - 2e^{2t}$.
- C $2e^t - e^{6t}$.
- D $-2e^t + 3e^{2t}$.
- E $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 14 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x-z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
- B $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- C $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
- E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 0.
- B 3.
- C $\frac{1}{3}$.
- D 1.
- E 6.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ -3.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{5}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{1}{3}$.
- $\boxed{\text{E}}$ 5.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- A $(0,9)$.
- B $(1,4)$.
- C $(-4,1)$.
- D $(1,2)$.
- E $(6,3)$.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A T é diagonalizável.
- B $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- C T não é simétrico.
- D $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- E T não é injetor.

Teste 3 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
- B $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- C $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- D $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- E $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teste 4 Assinale a alternativa correta:

- [A] para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [B] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
- [C] para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [D] para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [E] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.

Teste 5 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x+3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] o conjunto solução dessa equação é vazio.
- [B] o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- [C] o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- [D] o conjunto solução dessa equação é uma reta.
- [E] o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- [A] $-\frac{1}{3}$.
- [B] $\frac{1}{5}$.
- [C] $\frac{1}{3}$.
- [D] 5.
- [E] -3.

Teste 7 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $b = 2a$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a + b \neq 0$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a \neq b$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a = 1$ e $b = 6$.
- $\boxed{\text{E}}$ $b \neq 2a$.

Teste 8 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a > 3$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a \geq 3$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a > 0$.
- $\boxed{\text{D}}$ $a > 3$ ou $a < -3$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.

Teste 9 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- [A] $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- [B] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- [C] $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [D] $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- [E] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.

Teste 10 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- [A] $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- [B] $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- [C] $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- [D] $e^{-2\pi}(0, -5)$.
- [E] $e^{-2\pi}(2, -1)$.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 12 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1,0,1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

A $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
B $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
C $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
D $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
E $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.

Teste 13 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

A $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
B $2e^t - e^{6t}$.
C $3e^t - 2e^{2t}$.
D $-e^t + 2e^{2t}$.
E $-2e^t + 3e^{2t}$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2+3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- [A] $(1,-i,1)$.
- [B] $(-i,-1,-i)$.
- [C] $(i,1,i)$.
- [D] $(-i,2,3-i)$.
- [E] $(-i,1,-i)$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 1.
- B 3.
- C $\frac{1}{3}$.
- D 0.
- E 6.

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 2 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

- A $e^{-2\pi}(1, 1)$.
- B $e^{-2\pi}(2, -1)$.
- C $e^{-2\pi}(5, 0)$.
- D $e^{-2\pi}(0, 1)$.
- E $e^{-2\pi}(0, -5)$.

Teste 3 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- [A] $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- [B] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- [C] $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.
- [D] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [E] $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.

Teste 4 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- [A] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.
- [B] $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- [C] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
- [D] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- [E] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.

Teste 5 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

A $(1,4)$.
B $(1,2)$.
C $(-4,1)$.
D $(0,9)$.
E $(6,3)$.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] 0.
- [B] 1.
- [C] 3.
- [D] 6.
- [E] $\frac{1}{3}$.

Teste 8 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^t - e^{6t}$.
- [B] $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- [C] $-e^t + 2e^{2t}$.
- [D] $-2e^t + 3e^{2t}$.
- [E] $3e^t - 2e^{2t}$.

Teste 9 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- A $a \geq 3$.
- B $a > 0$.
- C $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.
- D $a > 3$ ou $a < -3$.
- E $a > 3$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- A $\frac{1}{3}$.
- B $-\frac{1}{3}$.
- C $\frac{1}{5}$.
- D 5.
- E -3.

Teste 11 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
- B T é diagonalizável.
- C $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T - 5\mathrm{I})^2\big)$.
- D T não é injetor.
- E T não é simétrico.

Teste 12 Assinale a alternativa correta:

- A para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- B para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- C para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- D para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- E para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- A $(-i, 1, -i)$.
- B $(1, -i, 1)$.
- C $(-i, 2, 3-i)$.
- D $(i, 1, i)$.
- E $(-i, -1, -i)$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 15 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

- A o conjunto solução dessa equação é vazio.
- B o conjunto solução dessa equação é uma parábola.
- C o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.
- D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.
- E o conjunto solução dessa equação é uma reta.

Teste 16 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- A $b = 2a$.
- B $a \neq b$.
- C $a + b \neq 0$.
- D $a = 1$ e $b = 6$.
- E $b \neq 2a$.

+31/11/50+

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Terceira Prova — 21/11/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- A $-e^t + 2e^{2t}$.
- B $2e^t - e^{6t}$.
- C $3e^t - 2e^{2t}$.
- D $\frac{1}{2}(e^t + e^{2t})$.
- E $-2e^t + 3e^{2t}$.

Teste 2 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{100} é igual a:

- A $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- B $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- C $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- D $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- E $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(II) se
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
então existirá uma matriz inversível complexa $P \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $B = P^{-1}AP$;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{C})$ for uma matriz complexa cujo polinômio característico tenha coeficientes reais e se $2 + 3i$ e -7 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 4 Considere a matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $X(t)$ será igual a:

- [A] $(2 \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [B] $(\operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$.
- [C] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t + \operatorname{sen} t)$.
- [D] $(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)$.
- [E] $(\operatorname{sen} t, \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.

Teste 5 Assinale a alternativa correta:

- [A] para qualquer matriz complexa $A \in M_2(\mathbb{C})$, se A for simétrica então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [B] para qualquer matriz real $A \in M_4(\mathbb{R})$, se $1+i$ e $3-i$ forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [C] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A não for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então o polinômio característico de A terá raízes complexas não reais.
- [D] para qualquer matriz complexa $A \in M_3(\mathbb{C})$, se $1+i$ e 3 forem autovalores de A, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.
- [E] para qualquer matriz real $A \in M_2(\mathbb{R})$, se A^2 for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja da forma $p_T(t) = (t-5)^3 q(t)$, para algum polinômio q. Suponha também que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - 5\mathrm{I})$ seja igual a 2, em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade. Pode-se afirmar que:

- [A] T é diagonalizável.
- [B] T não é simétrico.
- [C] $\mathrm{Ker}(T-5\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\big((T-5\mathrm{I})^2\big)$.
- [D] T não é injetor.
- [E] $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ uma transformação linear e suponha que a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{C}^3$ seja real. Suponha também que:

$$T(1,i,1) = i(1,i,1) \quad \text{e} \quad (0,1,1) \in \mathrm{Ker}(T).$$

Temos que $T(1, 3-i, 4)$ é igual a:

- [A] $(1, -i, 1)$.
- [B] $(i, 1, i)$.
- [C] $(-i, -1, -i)$.
- [D] $(-i, 1, -i)$.
- [E] $(-i, 2, 3-i)$.

Teste 8 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $a \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$ax^2 + ay^2 + 6xy = 10$$

representará uma elipse se, e somente se:

- [A] $a > 0$.
- [B] $a > 3$.
- [C] $a > 3$ ou $a < -3$.
- [D] $a \geq 3$.
- [E] $a \geq 3$ ou $a \leq -3$.

Teste 9 Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

possui polinômio catacterístico

$$p_A(t) = -(t-4)(t-2)^2$$

e que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}\,(x - z) + 8y + 9 = 0.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa quádrica:

- [A] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 1$.
- [B] $2u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{2}$.
- [C] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 3$.
- [D] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 9$.
- [E] $4u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 0$.

Teste 10 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + ax + by = 6$$

representará uma parábola se, e somente se:

- [A] $a \neq b$.
- [B] $b = 2a$.
- [C] $a + b \neq 0$.
- [D] $b \neq 2a$.
- [E] $a = 1$ e $b = 6$.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 4 munido de um produto interno e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V tais que

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota a transformação identidade, então a soma dos elementos na diagonal principal de $[\mathrm{I}]_{\mathcal{CB}}$ será igual a 2;

(II) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem bases ortonormais de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se V for um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear, $\mathcal{B}$ for uma base de V e se a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ for simétrica, então o operador T será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 12 Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2\sqrt{10}\,(x + 3y) = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

A o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

B o conjunto solução dessa equação é vazio.

C o conjunto solução dessa equação é um par de retas paralelas distintas.

D o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes.

E o conjunto solução dessa equação é uma reta.

Teste 13 Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} = (i-4) \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Se X for a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, -1)$, então $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ será igual a:

A $e^{-2\pi}(5, 0)$.

B $e^{-2\pi}(0, -5)$.

C $e^{-2\pi}(1, 1)$.

D $e^{-2\pi}(0, 1)$.

E $e^{-2\pi}(2, -1)$.

Teste 14 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$X_1(t) = (e^t, 2e^t) \quad \text{e} \quad X_2(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$$

sejam soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$. Temos que $T(0,3)$ é igual a:

- [A] $(1,2)$.
- [B] $(1,4)$.
- [C] $(0,9)$.
- [D] $(-4,1)$.
- [E] $(6,3)$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico tal que $T(1,3) = (1,3)$. Se $k \in \mathbb{R}$ for tal que $T(1,k) = 5(1,k)$, então k será igual a:

- [A] $-\frac{1}{3}$.
- [B] -3.
- [C] $\frac{1}{5}$.
- [D] 5.
- [E] $\frac{1}{3}$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que $T(1,1,1) = (2,2,2)$ e $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$. Se $T(3,2,-2) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] 1.
- [B] 0.
- [C] $\frac{1}{3}$.
- [D] 6.
- [E] 3.

+32/11/38+

2019 – MAT-3458 – Terceira Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E