MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- A T é injetor.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- C se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- D se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- E $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.

Teste 2 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T é injetora.
- B T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- C T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- D $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

Teste 3 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

■ -52.
B $\frac{65}{8}$.
C $\frac{63}{8}$.
D 6.
E 52.

Teste 4 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t + 1, t^2 + t + 1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2, 2, 2), \quad S(t + 1) = (3, 5, 2), \quad S(t^2 + t + 1) = (2, 1, 1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

■ 10.
B -30.
C -10.
D 30.
E -3.

Teste 5 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A A não é diagonalizável.
- B A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- C se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- E A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T e S são ambos simétricos.
- B nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- E S é simétrico e T não é simétrico.

Teste 7 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- A as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- B para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- C as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.
- D as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

Teste 8 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A -2^{333}.
- B $1 - 2^{333}$.
- C 2^{334}.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- E $1 + 2^{334}$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E todas as afirmações são falsas.

Teste 10 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- C T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- D T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- E T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 12 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- B $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- ■ $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- D $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- E $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\operatorname{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 14 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- A $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- B $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- C $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- D $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\mathrm{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(5, 11, 13)$.
- B $(8, 5, 9)$.
- C $(10, 6, 8)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.
- E $(7, 7, 6)$.

Teste 16 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (II) é verdadeira.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A ■ C D E

Teste 2: A B C D ■

Teste 3: ■ B C D E

Teste 4: ■ B C D E

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: A B ■ D E

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B C ■ E

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: A ■ C D E

Teste 11: A B ■ D E

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: ■ B C D E

Teste 14: A B C D ■

Teste 15: A B C ■ E

Teste 16: A ■ C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

B nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

C T e S são ambos simétricos.

■ T é simétrico e S não é simétrico.

E S é simétrico e T não é simétrico.

Teste 2 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

A T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.

B T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.

C $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.

■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

E T é injetora.

Teste 3 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -30.
- B 30.
- C -10.
- ■ 10.
- E -3.

Teste 4 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- B A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- C A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- E A não é diagonalizável.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \dots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C todas as afirmações são falsas.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- ■ -52.
- [B] 52.
- [C] 6.
- [D] $\frac{63}{8}$.
- [E] $\frac{65}{8}$.

Teste 9 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- [E] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.

Teste 10 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- [A] as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- [C] para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- [D] as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- [E] as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.

Teste 11 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- C T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 12 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\right), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\right)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- A $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- B $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- D $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- E $(14x - 20y, 10x - 18y)$.

Teste 13 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(8,5,9)$.
- B $(7,7,6)$.
- C $(10,6,8)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- E $(5,11,13)$.

Teste 15 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- [ ] A -2^{333}.
- [ ] B 2^{334}.
- [ ] C $1 + 2^{334}$.
- [ ] D $1 - 2^{333}$.
- [x] E $2 - 2^{333}$.

Teste 16 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- [ ] A se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- [ ] B T é injetor.
- [ ] C se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- [ ] D $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- [x] E se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

+2/11/38+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A B C ■ E

Teste 2: A B C ■ E

Teste 3: A B C ■ E

Teste 4: A B C ■ E

Teste 5: A B C D ■

Teste 6: A B C D ■

Teste 7: A B C ■ E

Teste 8: ■ B C D E

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: A ■ C D E

Teste 11: A B C D ■

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: A B C ■ E

Teste 14: A B C ■ E

Teste 15: A B C D ■

Teste 16: A B C D ■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base
$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$
de $P_2(\mathbb{R})$, a base
$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$
de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que
$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$
e:
$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

■ 10.
[B] -10.
[C] -30.
[D] -3.
[E] 30.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
[B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
[C] todas as afirmações são falsas.
[D] todas as afirmações são verdadeiras.
■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 3 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- [A] T é injetor.
- [B] se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- [C] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- [D] se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] S é simétrico e T não é simétrico.
- [B] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- [D] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- [E] T e S são ambos simétricos.

Teste 5 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5, 3, 4)$ é igual a:

- A $(10, 6, 8)$.
- B $(7, 7, 6)$.
- C $(5, 11, 13)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.
- E $(8, 5, 9)$.

Teste 6 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- A $\frac{65}{8}$.
- B $\frac{63}{8}$.
- C 6.
- ■ -52.
- E 52.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são falsas.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3, -2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2, 3)]$.
- B $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0, 0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0, 1), (0, -2)]$.
- C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1, 0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1, -2)]$.
- D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1, 0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3, -4)]$.
- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1, 2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1, -2)]$.

Teste 9 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.

B A não é diagonalizável.

C se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

E A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.

Teste 10 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D apenas a afirmação (II) é verdadeira.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 11 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\right), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\right)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

A $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
B $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
C $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
D $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

Teste 12 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\operatorname{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

A $1 - 2^{333}$.
■ $2 - 2^{333}$.
C -2^{333}.
D 2^{334}.
E $1 + 2^{334}$.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 14 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- [B] T é injetora.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- [D] T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- [E] T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.

Teste 15 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- [A] para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- [B] as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- [C] as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- [D] as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

Teste 16 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- [C] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- [D] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- [E] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: A B C D ■

Teste 3: A B C D ■

Teste 4: A B ■ D E

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: A B C ■ E

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B C D ■

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: A ■ C D E

Teste 11: A B C D ■

Teste 12: A ■ C D E

Teste 13: A ■ C D E

Teste 14: ■ B C D E

Teste 15: A B C D ■

Teste 16: A ■ C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- [B] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- [C] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- [D] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- [E] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

Teste 2 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- [A] as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- [B] para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- [C] as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- [D] as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

Teste 3 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- [A] -3.
- [B] 30.
- ■ 10.
- [D] -30.
- [E] -10.

Teste 4 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 5 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(8,5,9)$.
- B $(10,6,8)$.
- C $(5,11,13)$.
- D $(7,7,6)$.
- ■ $(9,8,5)$.

Teste 6 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \text{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\text{I}\big), \quad (-1,-3) \in \text{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \text{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\text{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- B $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- C $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- D $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- E $(7x - 10y, 5x - 9y)$.

Teste 7 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
[B] $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
[C] $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
[D] $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
[E] $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.

Teste 8 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

[A] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
[C] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
[D] A não é diagonalizável.
[E] se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 10 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- B T é injetora.
- C T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- D $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- E T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.

Teste 11 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- [ ] A $1 + 2^{334}$.
- [ ] B -2^{333}.
- [x] C $2 - 2^{333}$.
- [ ] D 2^{334}.
- [ ] E $1 - 2^{333}$.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- [ ] A todas as afirmações são verdadeiras.
- [ ] B todas as afirmações são falsas.
- [x] C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [ ] D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [ ] E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A S é simétrico e T não é simétrico.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- C nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- D T e S são ambos simétricos.
- E nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

Teste 14 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- A $\frac{63}{8}$.
- ■ -52.
- C 52.
- D $\frac{65}{8}$.
- E 6.

Teste 15 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- B T é injetor.
- C $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 2$.
- D se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- E se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

+4/11/14+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: A B C D ■

Teste 3: A B ■ D E

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: A B C D ■

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: ■ B C D E

Teste 8: A ■ C D E

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: ■ B C D E

Teste 11: A B ■ D E

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: A ■ C D E

Teste 14: A ■ C D E

Teste 15: ■ B C D E

Teste 16: A B C D ■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(10,6,8)$.
- B $(8,5,9)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- D $(5,11,13)$.
- E $(7,7,6)$.

Teste 2 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- ■ 10.
- B -10.
- C -3.
- D -30.
- E 30.

Teste 3 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- [A] as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.
- [B] as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- [C] para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- [E] as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.

Teste 4 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\right), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\right)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- [A] $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- [B] $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- [C] $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- [D] $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

Teste 5 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- [A] $\frac{63}{8}$.
- [B] $\frac{65}{8}$.
- [C] 52.
- ■ -52.
- [E] 6.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- [B] T e S são ambos simétricos.
- [C] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- [E] S é simétrico e T não é simétrico.

Teste 7 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- [A] se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- [C] $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 2$.
- [D] T é injetor.
- [E] se $a = 4$, então T será diagonalizável.

Teste 8 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

A $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
B $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 9 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

A T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
C T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
D T é injetora.
E $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Teste 10 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 11 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- B A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- C A não é diagonalizável.
- D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 13 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

C T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

E T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- [ ] A -2^{333}.
- [ ] B 2^{334}.
- [ ] C $1 + 2^{334}$.
- [ ] D $1 - 2^{333}$.
- [x] $2 - 2^{333}$.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A B ■ D E

Teste 2: ■ B C D E

Teste 3: A B C ■ E

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: A B C ■ E

Teste 7: A ■ C D E

Teste 8: A B ■ D E

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: A B C D ■

Teste 11: A B C D ■

Teste 12: ■ B C D E

Teste 13: A ■ C D E

Teste 14: A B C ■ E

Teste 15: A B ■ D E

Teste 16: A B C D ■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T e S são ambos simétricos.
- B nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- D S é simétrico e T não é simétrico.
- E nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 3 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A A não é diagonalizável.
- B se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- C A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- [redacted] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- E A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

Teste 4 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\operatorname{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A $1 - 2^{333}$.
- B 2^{334}.
- C -2^{333}.
- D $1 + 2^{334}$.
- [redacted] $2 - 2^{333}$.

Teste 5 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 6 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- ■ -52.
- B 52.
- C $\frac{65}{8}$.
- D 6.
- E $\frac{63}{8}$.

Teste 7 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- A se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- C $\dim\bigl(\mathrm{Ker}(T)\bigr) \geq 2$.
- D se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- E T é injetor.

Teste 8 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \mathrm{Ker}\bigl(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\bigr), \quad (-1,-3) \in \mathrm{Ker}\bigl(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\bigr)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- A $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- B $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- C $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- E $(28x - 16y, 20x - 36y)$.

Teste 9 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5, 3, 4)$ é igual a:

- [A] $(10, 6, 8)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.
- [C] $(5, 11, 13)$.
- [D] $(7, 7, 6)$.
- [E] $(8, 5, 9)$.

Teste 10 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são verdadeiras.

B todas as afirmações são falsas.

■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C todas as afirmações são falsas.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 13 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- B T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- D T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- E T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 14 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t + 1, t^2 + t + 1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2, 2, 2), \quad S(t + 1) = (3, 5, 2), \quad S(t^2 + t + 1) = (2, 1, 1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -30.
- B -10.
- C 30.
- D -3.
- ■ 10.

Teste 15 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- [A] as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- [B] as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.
- [C] para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- [D] as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

Teste 16 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- [B] T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- [C] T é injetora.
- [D] $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

+6/11/50+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1:	A	B	■	D	E
Teste 2:	A	B	C	■	E
Teste 3:	A	B	C	■	E
Teste 4:	A	B	C	D	■
Teste 5:	A	■	C	D	E
Teste 6:	■	B	C	D	E
Teste 7:	A	■	C	D	E
Teste 8:	A	B	C	■	E
Teste 9:	A	■	C	D	E
Teste 10:	A	B	C	■	E
Teste 11:	A	B	■	D	E
Teste 12:	A	B	C	D	■
Teste 13:	A	B	■	D	E
Teste 14:	A	B	C	D	■
Teste 15:	A	B	C	D	■
Teste 16:	A	B	C	D	■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- A $\frac{65}{8}$.
- B 6.
- ■ -52.
- D $\frac{63}{8}$.
- E 52.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1), (1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1), (1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- B nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- D T e S são ambos simétricos.
- E S é simétrico e T não é simétrico.

Teste 3 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A 30.
- B -30.
- [redacted] 10.
- D -10.
- E -3.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [redacted] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.

Teste 5 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5, 3, 4)$ é igual a:

- A $(10, 6, 8)$.
- B $(5, 11, 13)$.
- C $(8, 5, 9)$.
- D $(7, 7, 6)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.

Teste 6 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- B $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- C T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- D T é injetora.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

Teste 7 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

A $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.

B se $a = 4$, então T será diagonalizável.

C T é injetor.

D se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.

■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

Teste 8 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

A A não é diagonalizável.

B A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.

D se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

E A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.

Teste 9 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ todas as afirmações são verdadeiras.

D apenas a afirmação (II) é verdadeira.

E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- B $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.

Teste 11 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x + y, x + 2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- A $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- B $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- D $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- E $(28x - 16y, 20x - 36y)$.

Teste 12 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- A as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- C para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- D as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- E as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.

Teste 13 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A -2^{333}.
- B $1 + 2^{334}$.
- C 2^{334}.
- D $1 - 2^{333}$.
- ■ $2 - 2^{333}$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz
$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$
é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são falsas.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 16 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- C T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- E T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A B ■ D E

Teste 2: A B ■ D E

Teste 3: A B ■ D E

Teste 4: A ■ C D E

Teste 5: A B C D ■

Teste 6: A B C D ■

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B ■ D E

Teste 9: A B ■ D E

Teste 10: ■ B C D E

Teste 11: A B ■ D E

Teste 12: A ■ C D E

Teste 13: A B C D ■

Teste 14: A B ■ D E

Teste 15: A B ■ D E

Teste 16: A B C ■ E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A $1 + 2^{334}$.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- C $1 - 2^{333}$.
- D -2^{333}.
- E 2^{334}.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 3 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- B para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- C as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.
- D as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- E as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

Teste 4 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- [A] $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- [B] $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- [C] $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- [D] $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1), (1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1), (1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] S é simétrico e T não é simétrico.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- [C] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- [D] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- [E] T e S são ambos simétricos.

Teste 6 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A Ker$(T) \neq \{0\}$.
- B T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- C T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- E T é injetora.

Teste 7 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- B A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- D se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- E A não é diagonalizável.

Teste 8 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B apenas a afirmação (II) é verdadeira.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

C todas as afirmações são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E todas as afirmações são falsas.

Teste 10 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A 30.
- B -3.
- C -10.
- ■ 10.
- E -30.

Teste 11 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- A T é injetor.
- B $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- D se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- E se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.

Teste 12 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- B $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.

Teste 13 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- ■ -52.
- B $\frac{65}{8}$.
- C 52.
- D $\frac{63}{8}$.
- E 6.

Teste 14 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- B T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- C T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- E T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(5,11,13)$.
- B $(8,5,9)$.
- C $(10,6,8)$.
- D $(7,7,6)$.
- ■ $(9,8,5)$.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas a afirmação (II) é verdadeira.

C todas as afirmações são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A ■ C D E

Teste 2: ■ B C D E

Teste 3: ■ B C D E

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: A ■ C D E

Teste 6: A B C ■ E

Teste 7: A B ■ D E

Teste 8: A B C ■ E

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: A B C ■ E

Teste 11: A B ■ D E

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: ■ B C D E

Teste 14: A B C ■ E

Teste 15: A B C D ■

Teste 16: A ■ C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E todas as afirmações são falsas.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C todas as afirmações são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A $1 + 2^{334}$.
- B -2^{333}.
- C 2^{334}.
- D $1 - 2^{333}$.
- ■ $2 - 2^{333}$.

Teste 4 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A A não é diagonalizável.
- B A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- C se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- E A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

Teste 5 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.

Teste 6 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -3.
- B -30.
- C -10.
- D 30.
- ■ 10.

Teste 7 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- [A] as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- [B] as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.
- [C] para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- [D] as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

Teste 8 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- [B] T é injetor.
- [C] se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- [D] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- [E] se $a = 4$, então T será diagonalizável.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1), (1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1), (1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] S é simétrico e T não é simétrico.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- [C] T e S são ambos simétricos.
- [D] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- [E] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

Teste 10 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 11 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\right), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\right)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- B $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- C $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- D $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- E $(7x - 4y, 17x - 9y)$.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5, 3, 4)$ é igual a:

- A $(8, 5, 9)$.
- B $(7, 7, 6)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.
- D $(5, 11, 13)$.
- E $(10, 6, 8)$.

Teste 14 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- C T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 15 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- C T é injetora.
- D T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- E T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.

Teste 16 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ será igual a:

- A $\frac{63}{8}$.
- B 6.
- C $\frac{65}{8}$.
- [redacted] -52.
- E 52.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: ■ B C D E

Teste 3: A B C D ■

Teste 4: A B C ■ E

Teste 5: A ■ C D E

Teste 6: A B C D ■

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: ■ B C D E

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: ■ B C D E

Teste 12: A ■ C D E

Teste 13: A B ■ D E

Teste 14: A B C D ■

Teste 15: A ■ C D E

Teste 16: A B C ■ E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

■ $(9,8,5)$.
B $(10,6,8)$.
C $(7,7,6)$.
D $(8,5,9)$.
E $(5,11,13)$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são verdadeiras.
■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
C todas as afirmações são falsas.
D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- [A] as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- [C] para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- [D] as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- [E] as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são falsas.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 6 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- B T é injetora.
- C T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- E T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.

Teste 7 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -30.
- ■ 10.
- C -3.
- D 30.
- E -10.

Teste 8 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- ■ -52.
- B 6.
- C 52.
- D $\frac{65}{8}$.
- E $\frac{63}{8}$.

Teste 9 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A 2^{334}.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- C $1 - 2^{333}$.
- D -2^{333}.
- E $1 + 2^{334}$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A S é simétrico e T não é simétrico.
- B T e S são ambos simétricos.
- C nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.

Teste 11 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\right), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\right)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- B $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- C $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- D $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- E $(14x - 20y, 10x - 18y)$.

Teste 12 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- [C] se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- [D] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- [E] A não é diagonalizável.

Teste 13 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- [B] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- [E] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 14 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

B T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

C T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

D T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 15 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

A T é injetor.

B se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.

C $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.

■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

E se $a = 4$, então T será diagonalizável.

Teste 16 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

■ todas as afirmações são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas a afirmação (II) é verdadeira.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

+10/11/2+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: A ■ C D E

Teste 3: A ■ C D E

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: A B C ■ E

Teste 7: A ■ C D E

Teste 8: ■ B C D E

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: A B C D ■

Teste 11: ■ B C D E

Teste 12: A ■ C D E

Teste 13: ■ B C D E

Teste 14: A B C D ■

Teste 15: A B C ■ E

Teste 16: ■ B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- C A não é diagonalizável.
- D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- E se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

■ T é simétrico e S não é simétrico.

B T e S são ambos simétricos.

C nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

E S é simétrico e T não é simétrico.

Teste 4 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

B para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

C as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

D as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.

E as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.

Teste 5 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D apenas a afirmação (II) é verdadeira.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 6 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- B $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- C $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- ■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- E $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(10,6,8)$.
- B $(5,11,13)$.
- C $(7,7,6)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- E $(8,5,9)$.

Teste 8 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- [D] T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- [E] T é injetora.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são falsas.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 10 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\right), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\right)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

A $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
B $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
C $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
E $(7x - 10y, 5x - 9y)$.

Teste 11 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45), (0,9,33), (0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
E T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

Teste 12 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1+t+t^2, 1-7t+t^2, t+t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7+2t, 3+t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

■ -52.
[B] 6.
[C] $\frac{65}{8}$.
[D] 52.
[E] $\frac{63}{8}$.

Teste 13 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

[A] -30.
[B] -3.
[C] 30.
■ 10.
[E] -10.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 15 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- [A] se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- [B] T é injetor.
- [C] se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- [D] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

Teste 16 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A $1 - 2^{333}$.
- B $1 + 2^{334}$.
- C 2^{334}.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- E -2^{333}.

+11/11/50+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A ■ C D E

Teste 2: A B C ■ E

Teste 3: ■ B C D E

Teste 4: ■ B C D E

Teste 5: A ■ C D E

Teste 6: A B C ■ E

Teste 7: A B C ■ E

Teste 8: A ■ C D E

Teste 9: A B C ■ E

Teste 10: A B C ■ E

Teste 11: A B ■ D E

Teste 12: ■ B C D E

Teste 13: A B C ■ E

Teste 14: A B ■ D E

Teste 15: A B C D ■

Teste 16: A B C ■ E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- B para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- C as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.
- D as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- E as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.

Teste 2 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- C se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- E A não é diagonalizável.

Teste 3 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] T é injetora.
- [B] $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- [C] T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- [E] T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 5 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- [A] $(10,6,8)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- [C] $(5,11,13)$.
- [D] $(8,5,9)$.
- [E] $(7,7,6)$.

Teste 6 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- [A] -2^{333}.
- [B] 2^{334}.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- [D] $1 + 2^{334}$.
- [E] $1 - 2^{333}$.

Teste 7 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- [A] $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- ■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- [C] $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- [D] $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- [E] $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.

Teste 8 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- [B] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- [D] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- [E] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x + y, x + 2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- [B] $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- [C] $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- [D] $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- [E] $(14x - 20y, 10x - 18y)$.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são falsas.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 12 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- [A] $\frac{65}{8}$.
- [B] 6.
- ■ -52.
- [D] $\frac{63}{8}$.
- [E] 52.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

■ T é simétrico e S não é simétrico.

B S é simétrico e T não é simétrico.

C nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

E T e S são ambos simétricos.

Teste 14 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C apenas a afirmação (II) é verdadeira.

■ todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 15 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -30.
- B -3.
- C 30.
- D -10.
- ■ 10.

Teste 16 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- A T é injetor.
- B se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- C se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- E $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: A ■ C D E

Teste 3: A B C ■ E

Teste 4: A ■ C D E

Teste 5: A ■ C D E

Teste 6: A B ■ D E

Teste 7: A ■ C D E

Teste 8: A B ■ D E

Teste 9: A B C ■ E

Teste 10: ■ B C D E

Teste 11: A B C ■ E

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: ■ B C D E

Teste 14: A B C ■ E

Teste 15: A B C D ■

Teste 16: A B C ■ E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- [redacted] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1), (1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1), (1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T e S são ambos simétricos.
- [redacted] T é simétrico e S não é simétrico.
- C nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- E S é simétrico e T não é simétrico.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [■] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são falsas.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 4 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\right), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\right)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- [A] $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- [B] $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- [C] $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- [■] $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- [E] $(7x - 4y, 17x - 9y)$.

Teste 5 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -3.
- ■ 10.
- C -30.
- D 30.
- E -10.

Teste 6 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1), (0,-2)]$.
- D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 7 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A $1 - 2^{333}$.
- B -2^{333}.
- C 2^{334}.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- E $1 + 2^{334}$.

Teste 8 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A A não é diagonalizável.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- C A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- E se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

Teste 9 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

[redacted] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

C T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

E T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 10 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

A T é injetor.

B se $a = 4$, então T será diagonalizável.

C $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) \geq 2$.

[redacted] se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

E se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.

Teste 11 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

A as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.

[redacted] para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

C as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

D para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

E as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.

Teste 12 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[redacted] todas as afirmações são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B todas as afirmações são falsas.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[redacted] apenas a afirmação (II) é verdadeira.

E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 14 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- A $\frac{65}{8}$.
- B 52.
- C 6.
- ■ -52.
- E $\frac{63}{8}$.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5, 3, 4)$ é igual a:

- A $(5, 11, 13)$.
- B $(7, 7, 6)$.
- C $(8, 5, 9)$.
- D $(10, 6, 8)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.

Teste 16 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- B T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- C $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- E T é injetora.

+13/11/26+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A B C ■ E

Teste 2: A ■ C D E

Teste 3: A ■ C D E

Teste 4: A B C ■ E

Teste 5: A ■ C D E

Teste 6: A ■ C D E

Teste 7: A B C ■ E

Teste 8: A ■ C D E

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: A B C ■ E

Teste 11: A ■ C D E

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: A B C ■ E

Teste 14: A B C ■ E

Teste 15: A B C D ■

Teste 16: A B C ■ E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- A 6.
- B $\frac{65}{8}$.
- C 52.
- ■ -52.
- E $\frac{63}{8}$.

Teste 2 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- A $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 2$.
- B T é injetor.
- C se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- D se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

Teste 3 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- B $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- C $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- ■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- E $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 5 Seja $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\mathrm{I}: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- ■ $2 - 2^{333}$.
- B $1 - 2^{333}$.
- C 2^{334}.
- D $1 + 2^{334}$.
- E -2^{333}.

Teste 6 Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\mathrm{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5, 3, 4)$ é igual a:

- A $(7, 7, 6)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.
- C $(5, 11, 13)$.
- D $(10, 6, 8)$.
- E $(8, 5, 9)$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A S é simétrico e T não é simétrico.

B T e S são ambos simétricos.

■ T é simétrico e S não é simétrico.

D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

E nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

Teste 8 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

B T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

E T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 9 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

■ todas as afirmações são verdadeiras.
B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

A as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
B para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
C as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
D as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.
■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

Teste 11 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
B A não é diagonalizável.
C se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
E A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.

Teste 12 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\right), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\right)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- [A] $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- [B] $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- [C] $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- [D] $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

Teste 13 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- [A] -3.
- [B] -30.
- [C] -10.
- [D] 30.
- ■ 10.

Teste 14 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- C T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- D T é injetora.
- E $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [redacted] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

+14/11/14+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1:	A	B	C	■	E
Teste 2:	A	B	C	D	■
Teste 3:	A	B	C	■	E
Teste 4:	A	B	C	■	E
Teste 5:	■	B	C	D	E
Teste 6:	A	■	C	D	E
Teste 7:	A	B	■	D	E
Teste 8:	A	B	■	D	E
Teste 9:	■	B	C	D	E
Teste 10:	A	B	C	D	■
Teste 11:	■	B	C	D	E
Teste 12:	A	B	C	D	■
Teste 13:	A	B	C	D	■
Teste 14:	A	■	C	D	E
Teste 15:	A	B	■	D	E
Teste 16:	A	■	C	D	E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A S é simétrico e T não é simétrico.
- B nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- C T e S são ambos simétricos.
- D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.

Teste 2 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A 30.
- B -10.
- ■ 10.
- D -3.
- E -30.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são falsas.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 5 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- A T é injetor.
- B $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- C se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- E se $a = 4$, então T será diagonalizável.

Teste 6 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [■] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 7 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- [A] $\frac{63}{8}$.
- [B] 52.
- [■] -52.
- [D] 6.
- [E] $\frac{65}{8}$.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 9 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- [C] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- [D] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- [E] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 10 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

■ $(9,8,5)$.
[B] $(7,7,6)$.
[C] $(5,11,13)$.
[D] $(10,6,8)$.
[E] $(8,5,9)$.

Teste 11 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\text{Ker}(T - 2\text{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \text{Ker}(T - \text{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\text{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

[A] 2^{334}.
■ $2 - 2^{333}$.
[C] $1 + 2^{334}$.
[D] $1 - 2^{333}$.
[E] -2^{333}.

Teste 12 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- B $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- C $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- D $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- ■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 13 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- B A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- C A não é diagonalizável.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- E A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.

Teste 14 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- A as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.
- B as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- D para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- E as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

Teste 15 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- B $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- C $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- D $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- E $(7x - 4y, 17x - 9y)$.

Teste 16 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- [B] T é injetora.
- [C] T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- [D] T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- [■] T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A B C D ■

Teste 2: A B ■ D E

Teste 3: A B C D ■

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: A B C ■ E

Teste 7: A B ■ D E

Teste 8: A B C D ■

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: ■ B C D E

Teste 11: A ■ C D E

Teste 12: A B C D ■

Teste 13: A B C ■ E

Teste 14: A B ■ D E

Teste 15: ■ B C D E

Teste 16: A B C D ■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

B nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

C S é simétrico e T não é simétrico.

D T e S são ambos simétricos.

[redacted] T é simétrico e S não é simétrico.

Teste 2 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[redacted] todas as afirmações são verdadeiras.

D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 3 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

A para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

B as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.

[redacted] para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

D as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

E as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.

Teste 4 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\right), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\right)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

A $(14x - 20y, 10x - 18y)$.

B $(7x - 10y, 5x - 9y)$.

C $(28x - 16y, 20x - 36y)$.

D $(7x - 4y, 17x - 9y)$.

■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

Teste 5 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\operatorname{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

A $1 + 2^{334}$.

B $1 - 2^{333}$.

C -2^{333}.

■ $2 - 2^{333}$.

E 2^{334}.

Teste 6 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- A $\frac{65}{8}$.
- B 6.
- C 52.
- ■ -52.
- E $\frac{63}{8}$.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 9 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- B $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.

Teste 10 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- [B] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- [D] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- [E] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 11 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- [B] $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- [C] T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- [D] T é injetora.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

Teste 12 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -10.
- B -3.
- C 30.
- D -30.
- ■ 10.

Teste 13 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- A se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- C se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- D T é injetor.
- E $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5, 3, 4)$ é igual a:

- A $(10, 6, 8)$.
- B $(7, 7, 6)$.
- C $(8, 5, 9)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.
- E $(5, 11, 13)$.

Teste 15 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- B A não é diagonalizável.
- C A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- E A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [■] apenas a afirmação (II) é verdadeira.

+16/11/50+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A B C D ■

Teste 2: A B ■ D E

Teste 3: A B ■ D E

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: A B C ■ E

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B ■ D E

Teste 9: A B ■ D E

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: A B C D ■

Teste 12: A B C D ■

Teste 13: A ■ C D E

Teste 14: A B C ■ E

Teste 15: A B C ■ E

Teste 16: A B C D ■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\right), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\right)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- [A] $(7x-4y, 17x-9y)$.
- [B] $(7x-10y, 5x-9y)$.
- [C] $(14x-20y, 10x-18y)$.
- ■ $(14x-8y, 34x-18y)$.
- [E] $(28x-16y, 20x-36y)$.

Teste 2 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\operatorname{Ker}(T-2\mathrm{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker}(T-\mathrm{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a+d$ será igual a:

- [A] $1-2^{333}$.
- [B] -2^{333}.
- [C] 2^{334}.
- [D] $1+2^{334}$.
- ■ $2-2^{333}$.

Teste 3 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 4 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- A as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.
- B para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- C as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- E as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1), (1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1), (1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- B nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- C S é simétrico e T não é simétrico.
- D T e S são ambos simétricos.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são falsas.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [■] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 7 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- [B] A não é diagonalizável.
- [C] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- [■] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- [E] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.

Teste 8 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- ■ -52.
- B $\frac{63}{8}$.
- C 52.
- D 6.
- E $\frac{65}{8}$.

Teste 9 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- B $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.

Teste 10 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

B T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

C T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

[redacted] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

E T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

Teste 11 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5, 3, 4)$ é igual a:

A $(7, 7, 6)$.

B $(5, 11, 13)$.

C $(8, 5, 9)$.

D $(10, 6, 8)$.

[redacted] $(9, 8, 5)$.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D todas as afirmações são falsas.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 13 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- ■ 10.
- B -10.
- C 30.
- D -30.
- E -3.

Teste 14 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

B T é injetora.

C $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.

D T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.

E T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.

Teste 15 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

B $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.

C T é injetor.

D se $a = 4$, então T será diagonalizável.

E se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- $\boxed{\text{C}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- $\boxed{\text{E}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1:	A	B	C	■	E	**Teste 9:**	A	B	C	■	E
Teste 2:	A	B	C	D	■	**Teste 10:**	A	B	C	■	E
Teste 3:	A	B	C	■	E	**Teste 11:**	A	B	C	D	■
Teste 4:	A	B	C	■	E	**Teste 12:**	A	B	■	D	E
Teste 5:	A	B	C	D	■	**Teste 13:**	■	B	C	D	E
Teste 6:	A	B	C	D	■	**Teste 14:**	■	B	C	D	E
Teste 7:	A	B	C	■	E	**Teste 15:**	■	B	C	D	E
Teste 8:	■	B	C	D	E	**Teste 16:**	A	B	C	■	E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- A $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- B $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- C $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- D $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\operatorname{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 3 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 4 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- A as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- C as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.
- D as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- E para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

Teste 5 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T é injetora.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- C T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- D T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- E $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Teste 6 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- [B] A não é diagonalizável.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- [D] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- [E] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\left([T]_{\mathcal{B}}\right)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são falsas.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- [A] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- [B] T é injetor.
- [C] se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- [E] se $a = 4$, então T será diagonalizável.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 10 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- B $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T e S são ambos simétricos.
- B nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- E S é simétrico e T não é simétrico.

Teste 12 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -3.
- B -10.
- C -30.
- D 30.
- ■ 10.

Teste 13 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45), (0,9,33), (0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- B T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- D T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- E T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 14 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

A $\frac{63}{8}$.
B 52.
C 6.
■ -52.
E $\frac{65}{8}$.

Teste 15 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

A $1 + 2^{334}$.
B $1 - 2^{333}$.
C -2^{333}.
D 2^{334}.
■ $2 - 2^{333}$.

Teste 16 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(5,11,13)$.
- B $(10,6,8)$.
- C $(7,7,6)$.
- D $(8,5,9)$.
- ■ $(9,8,5)$.

+18/11/26+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1:	A	B	C	D	■
Teste 2:	■	B	C	D	E
Teste 3:	A	■	C	D	E
Teste 4:	A	■	C	D	E
Teste 5:	A	■	C	D	E
Teste 6:	A	B	■	D	E
Teste 7:	■	B	C	D	E
Teste 8:	A	B	C	■	E
Teste 9:	A	■	C	D	E
Teste 10:	A	B	C	■	E
Teste 11:	A	B	■	D	E
Teste 12:	A	B	C	D	■
Teste 13:	A	B	■	D	E
Teste 14:	A	B	C	■	E
Teste 15:	A	B	C	D	■
Teste 16:	A	B	C	D	■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\mathrm{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

■ $(9,8,5)$.

B $(10,6,8)$.

C $(8,5,9)$.

D $(5,11,13)$.

E $(7,7,6)$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 3 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\right), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\left(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\right)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- A $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- B $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- D $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- E $(7x - 10y, 5x - 9y)$.

Teste 4 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- A 52.
- B $\frac{65}{8}$.
- C $\frac{63}{8}$.
- D 6.
- ■ -52.

Teste 5 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 6 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- [B] T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- [C] T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- [D] T é injetora.
- [E] $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 8 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- B A não é diagonalizável.
- C se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- E A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

Teste 9 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\operatorname{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A $1 - 2^{333}$.
- B -2^{333}.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- D $1 + 2^{334}$.
- E 2^{334}.

Teste 10 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- A as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.
- B as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- D as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- E para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

Teste 11 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

C T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

E T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

Teste 12 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

A se $a = 4$, então T será diagonalizável.

B T é injetor.

■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

D se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.

E $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 2$.

Teste 13 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A 30.
- B -10.
- ■ 10.
- D -30.
- E -3.

Teste 14 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- B $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- C $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- ■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- E $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [■] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] todas as afirmações são falsas.
- [E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [■] T é simétrico e S não é simétrico.
- [B] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- [C] S é simétrico e T não é simétrico.
- [D] T e S são ambos simétricos.
- [E] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: A B ■ D E

Teste 3: A B ■ D E

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: A ■ C D E

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: A B C ■ E

Teste 8: A B C ■ E

Teste 9: A B ■ D E

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: ■ B C D E

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: A B ■ D E

Teste 14: A B C ■ E

Teste 15: A ■ C D E

Teste 16: ■ B C D E

+20/1/12+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- [A] -30.
- [B] 30.
- ■ 10.
- [D] -10.
- [E] -3.

Teste 2 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- [A] $(7,7,6)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- [C] $(5,11,13)$.
- [D] $(8,5,9)$.
- [E] $(10,6,8)$.

Teste 3 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- C T é injetora.
- D T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- E $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Teste 4 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- C T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- D T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- E T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são falsas.

Teste 6 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- ■ -52.
- [B] $\frac{63}{8}$.
- [C] 52.
- [D] 6.
- [E] $\frac{65}{8}$.

Teste 7 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- [A] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- [B] T é injetor.
- [C] se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- [D] se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- B A não é diagonalizável.
- C A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.

Teste 11 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- B as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- C as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- D as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.
- E para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

Teste 12 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- ■ $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- C $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- D $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- E $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 13 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 14 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- [A] $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- [■] $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- [C] $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- [D] $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- [E] $(14x - 20y, 10x - 18y)$.

Teste 15 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\operatorname{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- [A] 2^{334}.
- [B] $1 - 2^{333}$.
- [C] -2^{333}.
- [■] $2 - 2^{333}$.
- [E] $1 + 2^{334}$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

■ T é simétrico e S não é simétrico.

[B] T e S são ambos simétricos.

[C] S é simétrico e T não é simétrico.

[D] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

[E] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A B ■ D E

Teste 2: A ■ C D E

Teste 3: A ■ C D E

Teste 4: ■ B C D E

Teste 5: A B ■ D E

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B ■ D E

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: A B C D ■

Teste 11: ■ B C D E

Teste 12: A ■ C D E

Teste 13: A B C ■ E

Teste 14: A ■ C D E

Teste 15: A B C ■ E

Teste 16: ■ B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

C T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 2 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2, 2, 2), \quad S(t+1) = (3, 5, 2), \quad S(t^2+t+1) = (2, 1, 1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

A 30.

B -10.

■ 10.

D -3.

E -30.

Teste 3 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
B $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
C $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
D $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
E $(7x - 10y, 5x - 9y)$.

Teste 4 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
B as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
C as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.
D as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
E para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

Teste 5 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (II) é verdadeira.
B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
■ todas as afirmações são verdadeiras.
E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 6 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1+t+t^2, 1-7t+t^2, t+t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7+2t, 3+t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

■ -52.

[B] $\frac{63}{8}$.

[C] $\frac{65}{8}$.

[D] 52.

[E] 6.

Teste 7 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T-2\mathrm{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T-\mathrm{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a+d$ será igual a:

[A] -2^{333}.

■ $2-2^{333}$.

[C] $1+2^{334}$.

[D] 2^{334}.

[E] $1-2^{333}$.

Teste 8 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(10,6,8)$.
- B $(5,11,13)$.
- C $(8,5,9)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- E $(7,7,6)$.

Teste 9 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- B $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[D] todas as afirmações são falsas.

[E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 11 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

[A] se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

[B] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.

[C] A não é diagonalizável.

[D] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T e S são ambos simétricos.
- B nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- [redacted] T é simétrico e S não é simétrico.
- D S é simétrico e T não é simétrico.
- E nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C todas as afirmações são falsas.
- [redacted] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 15 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- A se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- C T é injetor.
- D se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- E $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.

Teste 16 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- C T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- D $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- E T é injetora.

+21/11/50+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A B C D ■

Teste 2: A B ■ D E

Teste 3: ■ B C D E

Teste 4: ■ B C D E

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: A ■ C D E

Teste 8: A B C ■ E

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: A B C D ■

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: A B C ■ E

Teste 14: A B ■ D E

Teste 15: A ■ C D E

Teste 16: A ■ C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 2 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x + y, x + 2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- A $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- B $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- C $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- D $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

Teste 3 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1+t+t^2, 1-7t+t^2, t+t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7+2t, 3+t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- [A] 52.
- [■] -52.
- [C] 6.
- [D] $\frac{65}{8}$.
- [E] $\frac{63}{8}$.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [■] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são falsas.

Teste 5 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- C T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 6 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1,t,t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -3.
- B 30.
- ■ 10.
- D -10.
- E -30.

Teste 7 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

B se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.

C $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.

D T é injetor.

E se $a = 4$, então T será diagonalizável.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são falsas.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D todas as afirmações são verdadeiras.

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A S é simétrico e T não é simétrico.
- B T e S são ambos simétricos.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- E nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

Teste 10 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(8,5,9)$.
- B $(10,6,8)$.
- C $(7,7,6)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- E $(5,11,13)$.

Teste 11 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- [A] as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- [B] as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- [D] as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- [E] para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

Teste 12 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 13 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- [C] T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- [D] T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- [E] T é injetora.

Teste 14 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.

B se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

C A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.

D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

E A não é diagonalizável.

Teste 15 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

A -2^{333}.

B $1 - 2^{333}$.

C 2^{334}.

D $1 + 2^{334}$.

■ $2 - 2^{333}$.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz
$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$
é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A ■ C D E

Teste 2: A B C D ■

Teste 3: A ■ C D E

Teste 4: A B C ■ E

Teste 5: A B C D ■

Teste 6: A B ■ D E

Teste 7: ■ B C D E

Teste 8: A B C D ■

Teste 9: A B ■ D E

Teste 10: A B C ■ E

Teste 11: A B ■ D E

Teste 12: A B C D ■

Teste 13: A ■ C D E

Teste 14: ■ B C D E

Teste 15: A B C D ■

Teste 16: ■ B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- [A] as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- [C] as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.
- [D] para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- [E] as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

Teste 2 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- [A] 52.
- [B] $\frac{63}{8}$.
- [C] $\frac{65}{8}$.
- ■ -52.
- [E] 6.

Teste 3 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- [C] T é injetora.
- [D] T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- [E] T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

■ T é simétrico e S não é simétrico.

B S é simétrico e T não é simétrico.

C T e S são ambos simétricos.

D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

E nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

Teste 5 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\operatorname{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

A $1 + 2^{334}$.

■ $2 - 2^{333}$.

C 2^{334}.

D -2^{333}.

E $1 - 2^{333}$.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 7 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -10.
- B -3.
- ■ 10.
- D -30.
- E 30.

Teste 8 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- [B] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- [C] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- [D] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 9 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- [A] T é injetor.
- [B] se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- [D] se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- [E] $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 2$.

Teste 10 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- A $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- B $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- D $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- E $(28x - 16y, 20x - 36y)$.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \dots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B todas as afirmações são falsas.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 12 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 13 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- [A] $(7,7,6)$.
- [B] $(8,5,9)$.
- [C] $(5,11,13)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- [E] $(10,6,8)$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\operatorname{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [redacted] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 15 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [redacted] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- B A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- C se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- E A não é diagonalizável.

Teste 16 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- B $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- C $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- ■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- E $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A ■ C D E

Teste 2: A B C ■ E

Teste 3: A ■ C D E

Teste 4: ■ B C D E

Teste 5: A ■ C D E

Teste 6: A B ■ D E

Teste 7: A B ■ D E

Teste 8: A B C D ■

Teste 9: A B ■ D E

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: ■ B C D E

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: A B C ■ E

Teste 14: A ■ C D E

Teste 15: ■ B C D E

Teste 16: A B C ■ E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- B $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- C T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- E T é injetora.

Teste 2 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A $1 + 2^{334}$.
- B 2^{334}.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- D -2^{333}.
- E $1 - 2^{333}$.

Teste 3 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45), (0,9,33), (0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- [C] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- [D] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- [E] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

Teste 4 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 5 Considere a base
$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$
de $P_2(\mathbb{R})$, a base
$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$
de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:
$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- [A] -10.
- [B] -30.
- [C] -3.
- ■ 10.
- [E] 30.

Teste 6 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1+t+t^2, 1-7t+t^2, t+t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7+2t, 3+t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- [A] $\frac{65}{8}$.
- [B] 6.
- [C] $\frac{63}{8}$.
- [D] 52.
- ■ -52.

Teste 7 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

B dim$\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.

C se $a = 4$, então T será diagonalizável.

D se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.

E T é injetor.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

B T e S são ambos simétricos.

C S é simétrico e T não é simétrico.

D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

■ T é simétrico e S não é simétrico.

Teste 9 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- [B] A não é diagonalizável.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- [D] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- [E] se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

Teste 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] todas as afirmações são falsas.

Teste 11 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

A $(7x - 4y, 17x - 9y)$.

B $(7x - 10y, 5x - 9y)$.

C $(14x - 20y, 10x - 18y)$.

■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

E $(28x - 16y, 20x - 36y)$.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C todas as afirmações são falsas.

D todas as afirmações são verdadeiras.

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 13 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
■ todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

A $(5, 11, 13)$.
B $(10, 6, 8)$.
C $(7, 7, 6)$.
D $(8, 5, 9)$.
■ $(9, 8, 5)$.

Teste 15 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

A para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
C as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
D as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
E as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.

Teste 16 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

B $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.

C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.

D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.

+24/11/14+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A B C ■ E

Teste 2: A B ■ D E

Teste 3: A ■ C D E

Teste 4: A B C ■ E

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: A B C D ■

Teste 7: ■ B C D E

Teste 8: A B C D ■

Teste 9: A B ■ D E

Teste 10: ■ B C D E

Teste 11: A B C ■ E

Teste 12: A B C D ■

Teste 13: A B C D ■

Teste 14: A B C D ■

Teste 15: A ■ C D E

Teste 16: ■ B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 2 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- [A] $(5, 11, 13)$.
- [B] $(8, 5, 9)$.
- [C] $(10, 6, 8)$.
- [D] $(7, 7, 6)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.

Teste 3 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

B T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

C T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

D T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

E T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 4 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

A $\frac{65}{8}$.

B $\frac{63}{8}$.

■ -52.

D 6.

E 52.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são falsas.

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 6 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

A $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.

B T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.

C T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.

■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

E T é injetora.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- B nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- D T e S são ambos simétricos.
- E S é simétrico e T não é simétrico.

Teste 8 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- B $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 9 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- [A] se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- [B] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- [C] T é injetor.
- [D] se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

Teste 10 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- [A] $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- [B] $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- [C] $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- [E] $(14x - 20y, 10x - 18y)$.

Teste 11 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- [A] as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- [B] para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- [D] as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- [E] as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.

Teste 12 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A $1 + 2^{334}$.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- C $1 - 2^{333}$.
- D -2^{333}.
- E 2^{334}.

Teste 13 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t + 1, t^2 + t + 1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2, 2, 2), \quad S(t + 1) = (3, 5, 2), \quad S(t^2 + t + 1) = (2, 1, 1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -30.
- B 30.
- ■ 10.
- D -3.
- E -10.

Teste 14 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 15 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- B se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- E A não é diagonalizável.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

+25/11/2+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A ■ C D E

Teste 2: A B C D ■

Teste 3: ■ B C D E

Teste 4: A B ■ D E

Teste 5: A ■ C D E

Teste 6: A B C ■ E

Teste 7: A B ■ D E

Teste 8: ■ B C D E

Teste 9: A B C D ■

Teste 10: A B C ■ E

Teste 11: A B ■ D E

Teste 12: A ■ C D E

Teste 13: A B ■ D E

Teste 14: A B C D ■

Teste 15: A B ■ D E

Teste 16: A B C ■ E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 2 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- A se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- B $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- C T é injetor.
- D se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

Teste 3 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\mathrm{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5, 3, 4)$ é igual a:

- A $(10, 6, 8)$.
- B $(8, 5, 9)$.
- C $(5, 11, 13)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.
- E $(7, 7, 6)$.

Teste 4 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t + 1, t^2 + t + 1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2, 2, 2), \quad S(t + 1) = (3, 5, 2), \quad S(t^2 + t + 1) = (2, 1, 1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- ■ 10.
- B -10.
- C -30.
- D 30.
- E -3.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [■] apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 6 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- [■] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- [B] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- [C] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- [D] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- [E] $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.

Teste 7 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A $1 - 2^{333}$.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- C -2^{333}.
- D $1 + 2^{334}$.
- E 2^{334}.

Teste 8 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1, 2) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1, -3) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x, y) = (x + y, x + 2y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x, y)$ é igual a:

- A $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- B $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- D $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- E $(14x - 20y, 10x - 18y)$.

Teste 9 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

■ todas as afirmações são verdadeiras.

B apenas a afirmação (II) é verdadeira.

C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.

B A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

C se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.

E A não é diagonalizável.

Teste 11 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

A as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

B as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.

■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

D para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

E as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.

Teste 12 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- B T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- C $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- E T é injetora.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \dots, 988$, então $\left([T]_{\mathcal{B}}\right)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.

Teste 14 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1+t+t^2, 1-7t+t^2, t+t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7+2t, 3+t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- ■ -52.
- B 52.
- C $\frac{65}{8}$.
- D 6.
- E $\frac{63}{8}$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A S é simétrico e T não é simétrico.
- B T e S são ambos simétricos.
- C nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- E nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

Teste 16 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- C T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

+26/11/50+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A B ■ D E

Teste 2: A B C D ■

Teste 3: A B C ■ E

Teste 4: ■ B C D E

Teste 5: A B C D ■

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: A ■ C D E

Teste 8: A B ■ D E

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: ■ B C D E

Teste 11: A B ■ D E

Teste 12: A B C ■ E

Teste 13: A ■ C D E

Teste 14: ■ B C D E

Teste 15: A B C ■ E

Teste 16: A B C D ■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- A as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- B para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- C as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- D as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

Teste 2 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- B T é injetora.
- C T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- D T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

Teste 3 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 4 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\mathrm{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(5, 11, 13)$.
- B $(8, 5, 9)$.
- C $(7, 7, 6)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.
- E $(10, 6, 8)$.

Teste 5 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A $1 - 2^{333}$.
- B -2^{333}.
- C $1 + 2^{334}$.
- [redacted] $2 - 2^{333}$.
- E 2^{334}.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1), (1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1), (1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A S é simétrico e T não é simétrico.
- B T e S são ambos simétricos.
- [redacted] T é simétrico e S não é simétrico.
- D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- E nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

Teste 7 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- [A] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- [C] se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- [D] A não é diagonalizável.
- [E] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.

Teste 8 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- [A] $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- [B] $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- [C] $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- [D] $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C todas as afirmações são falsas.

D todas as afirmações são verdadeiras.

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 10 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

■ todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 11 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- [B] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- [C] T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- [E] T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 12 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- [A] 52.
- [B] 6.
- ■ -52.
- [D] $\frac{65}{8}$.
- [E] $\frac{63}{8}$.

Teste 13 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- ■ $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- C $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- D $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- E $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.

Teste 14 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 15 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- [A] -3.
- [B] -30.
- ■ 10.
- [D] 30.
- [E] -10.

Teste 16 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- [A] se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- [B] se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- [C] $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 2$.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- [E] T é injetor.

+27/11/38+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: A B C D ■

Teste 2: A B C D ■

Teste 3: A ■ C D E

Teste 4: A B C ■ E

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: A B ■ D E

Teste 7: A ■ C D E

Teste 8: A B C D ■

Teste 9: A B C D ■

Teste 10: A B C ■ E

Teste 11: A B C ■ E

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: A ■ C D E

Teste 14: A B C ■ E

Teste 15: A B ■ D E

Teste 16: A B C ■ E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C todas as afirmações são falsas.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

B T e S são ambos simétricos.

C nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

■ T é simétrico e S não é simétrico.

E S é simétrico e T não é simétrico.

Teste 4 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

A A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.

C A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.

D se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

E A não é diagonalizável.

Teste 5 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- ■ $2 - 2^{333}$.
- B $1 + 2^{334}$.
- C 2^{334}.
- D $1 - 2^{333}$.
- E -2^{333}.

Teste 6 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- A para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- B as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- D as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- E as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

■ $(9,8,5)$.
B $(5,11,13)$.
C $(7,7,6)$.
D $(10,6,8)$.
E $(8,5,9)$.

Teste 8 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

A $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
C $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
D $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
E $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 9 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- A $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- B $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- D $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- E $(28x - 16y, 20x - 36y)$.

Teste 10 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- ■ -52.
- B 6.
- C $\frac{63}{8}$.
- D $\frac{65}{8}$.
- E 52.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são falsas.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 12 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 13 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- B $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- [redacted] T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- D T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- E T é injetora.

Teste 14 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- [redacted] se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- B se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- C T é injetor.
- D se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- E $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 2$.

Teste 15 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- A -10.
- B -30.
- C 30.
- ■ 10.
- E -3.

Teste 16 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45), (0,9,33), (0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- E T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

+28/11/26+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1:	A	B	C	D	■
Teste 2:	A	B	■	D	E
Teste 3:	A	B	C	■	E
Teste 4:	A	■	C	D	E
Teste 5:	■	B	C	D	E
Teste 6:	A	B	■	D	E
Teste 7:	■	B	C	D	E
Teste 8:	A	■	C	D	E
Teste 9:	A	B	■	D	E
Teste 10:	■	B	C	D	E
Teste 11:	A	B	■	D	E
Teste 12:	■	B	C	D	E
Teste 13:	A	B	■	D	E
Teste 14:	■	B	C	D	E
Teste 15:	A	B	C	■	E
Teste 16:	A	B	■	D	E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

B as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.

C as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.

D as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

E para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

Teste 2 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

■ 10.

B -30.

C -10.

D -3.

E 30.

Teste 3 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- A $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- C $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- D $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- E $(14x - 20y, 10x - 18y)$.

Teste 4 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- B T é injetora.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- D $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- E T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.

Teste 5 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- A $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 2$.
- B se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- C T é injetor.
- D se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

Teste 6 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 8 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

B $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.

C $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.

D $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.

E $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 9 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

A T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

C T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

D T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

B S é simétrico e T não é simétrico.

C nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

D T e S são ambos simétricos.

■ T é simétrico e S não é simétrico.

Teste 11 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1+t+t^2, 1-7t+t^2, t+t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7+2t, 3+t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

■ -52.

B 52.

C $\frac{65}{8}$.

D 6.

E $\frac{63}{8}$.

Teste 12 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- $\boxed{A}$ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- $\boxed{B}$ se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- $\boxed{C}$ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- $\boxed{E}$ A não é diagonalizável.

Teste 13 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- ■ $2 - 2^{333}$.
- $\boxed{B}$ $1 + 2^{334}$.
- $\boxed{C}$ $1 - 2^{333}$.
- $\boxed{D}$ -2^{333}.
- $\boxed{E}$ 2^{334}.

Teste 14 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(10,6,8)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- C $(5,11,13)$.
- D $(8,5,9)$.
- E $(7,7,6)$.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1:	■	B	C	D	E
Teste 2:	■	B	C	D	E
Teste 3:	A	■	C	D	E
Teste 4:	A	B	■	D	E
Teste 5:	A	B	C	D	■
Teste 6:	A	B	C	D	■
Teste 7:	A	B	■	D	E
Teste 8:	■	B	C	D	E
Teste 9:	A	B	C	D	■
Teste 10:	A	B	C	D	■
Teste 11:	■	B	C	D	E
Teste 12:	A	B	C	■	E
Teste 13:	■	B	C	D	E
Teste 14:	A	■	C	D	E
Teste 15:	A	B	■	D	E
Teste 16:	A	B	C	D	■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(5, 11, 13)$.
- B $(7, 7, 6)$.
- C $(10, 6, 8)$.
- D $(8, 5, 9)$.
- ■ $(9, 8, 5)$.

Teste 2 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- A as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- B as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.
- D para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- E as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.

Teste 3 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- A 6.
- B $\frac{65}{8}$.
- C 52.
- ■ -52.
- E $\frac{63}{8}$.

Teste 4 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- C T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- D T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são falsas.
■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
D todas as afirmações são verdadeiras.
E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 6 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

A -3.
■ 10.
C -10.
D -30.
E 30.

Teste 7 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

A $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
B $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
C $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
D $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

Teste 8 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são verdadeiras.
B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 9 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- B A não é diagonalizável.
- C se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
- D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- E A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

Teste 10 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- A $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- B se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- C T é injetor.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- E se $a = 4$, então T será diagonalizável.

Teste 11 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

A nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

B S é simétrico e T não é simétrico.

C nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

■ T é simétrico e S não é simétrico.

E T e S são ambos simétricos.

Teste 13 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

A $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$.

B T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.

■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

D T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.

E T é injetora.

Teste 14 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A 2^{334}.
- B $1 - 2^{333}$.
- C -2^{333}.
- D $1 + 2^{334}$.
- ■ $2 - 2^{333}$.

Teste 15 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 16 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- B $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- C $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- D $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.
- ■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1:	A	B	C	D	■
Teste 2:	A	B	■	D	E
Teste 3:	A	B	C	■	E
Teste 4:	A	B	C	D	■
Teste 5:	A	■	C	D	E
Teste 6:	A	■	C	D	E
Teste 7:	A	B	C	D	■
Teste 8:	A	B	C	D	■
Teste 9:	■	B	C	D	E
Teste 10:	A	B	C	■	E
Teste 11:	A	B	C	■	E
Teste 12:	A	B	C	■	E
Teste 13:	A	B	■	D	E
Teste 14:	A	B	C	D	■
Teste 15:	A	B	■	D	E
Teste 16:	A	B	C	D	■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

B T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

C T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

D T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.

E T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 2 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C todas as afirmações são verdadeiras.

D todas as afirmações são falsas.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 3 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.
- B T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- C T é injetora.
- D $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- E T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.

Teste 4 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- A $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.
- B $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- ■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.
- D $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.
- E $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.

Teste 5 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

- ■ 10.
- B -10.
- C -30.
- D 30.
- E -3.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C todas as afirmações são falsas.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(8,5,9)$.
- B $(10,6,8)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- D $(7,7,6)$.
- E $(5,11,13)$.

Teste 8 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 9 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

■ -52.
B $\frac{63}{8}$.
C 6.
D $\frac{65}{8}$.
E 52.

Teste 10 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

A se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
B A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
E A não é diagonalizável.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são verdadeiras.

B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[redacted] apenas a afirmação (II) é verdadeira.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 12 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

A para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

B as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.

C as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

[redacted] para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

E as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.

Teste 13 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- A $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- C $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- D $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- E $(7x - 10y, 5x - 9y)$.

Teste 14 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1+t, 1-t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1+t+t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- ■ $2 - 2^{333}$.
- B $1 + 2^{334}$.
- C 2^{334}.
- D -2^{333}.
- E $1 - 2^{333}$.

Teste 15 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- [A] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.
- [B] se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- [C] T é injetor.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- [E] se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] T e S são ambos simétricos.
- [B] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- [C] S é simétrico e T não é simétrico.
- [D] nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.

+31/11/50+

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: A ■ C D E

Teste 3: ■ B C D E

Teste 4: A B ■ D E

Teste 5: ■ B C D E

Teste 6: A B C D ■

Teste 7: A B ■ D E

Teste 8: A B ■ D E

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: A B C ■ E

Teste 12: A B C ■ E

Teste 13: A ■ C D E

Teste 14: ■ B C D E

Teste 15: A B C ■ E

Teste 16: A B C D ■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Segunda Prova — 10/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1, 2) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1, -3) \in \mathrm{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x, y) = (x + y, x + 2y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x, y)$ é igual a:

- A $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- B $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.
- D $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- E $(7x - 10y, 5x - 9y)$.

Teste 2 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
- ■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
- C A não é diagonalizável.
- D A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.
- E se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

Teste 3 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 4 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.
- B T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- D T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- E T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

■ T é simétrico e S não é simétrico.

B S é simétrico e T não é simétrico.

C T e S são ambos simétricos.

D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.

E nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.

Teste 6 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

A as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.

B as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes.

C as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.

D para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.

■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

Teste 7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- A $(8,5,9)$.
- B $(10,6,8)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- D $(7,7,6)$.
- E $(5,11,13)$.

Teste 8 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1+t+t^2, 1-7t+t^2, t+t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7+2t, 3+t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- A 6.
- ■ -52.
- C $\frac{65}{8}$.
- D $\frac{63}{8}$.
- E 52.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são falsas.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 10 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- A T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- B T é injetora.
- C T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- D $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

Teste 11 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

■ $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

B $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.

C $\text{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.

D $\text{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.

E $\text{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\text{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 12 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C todas as afirmações são falsas.

D apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 13 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$, a base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:

$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

■ 10.
B -30.
C 30.
D -10.
E -3.

Teste 14 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

A T é injetor.
B $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 2$.
C se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
D se $a = 4$, então T será diagonalizável.
■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.

Teste 15 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A 2^{334}.
- B $1 + 2^{334}$.
- C -2^{333}.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- E $1 - 2^{333}$.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

2019 – MAT-3458 – Segunda Prova– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas

Teste 1:	A	B	■	D	E
Teste 2:	A	■	C	D	E
Teste 3:	■	B	C	D	E
Teste 4:	A	B	■	D	E
Teste 5:	■	B	C	D	E
Teste 6:	A	B	C	D	■
Teste 7:	A	B	■	D	E
Teste 8:	A	■	C	D	E
Teste 9:	A	B	C	D	■
Teste 10:	A	B	C	D	■
Teste 11:	■	B	C	D	E
Teste 12:	■	B	C	D	E
Teste 13:	■	B	C	D	E
Teste 14:	A	B	C	D	■
Teste 15:	A	B	C	■	E
Teste 16:	A	■	C	D	E