MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^{\perp} \subset S^{\perp}$.
- B para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- ■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^{\perp} \subset W^{\perp}$.
- D para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^{\perp}$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- E se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \operatorname{proj}_{e_1} x + \operatorname{proj}_{e_2} x + \cdots + \operatorname{proj}_{e_n} x$.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A n é par.
- B T é sobrejetora.
- C T é injetora.
- ■ $\operatorname{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- E $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = \dim(\operatorname{Im}(T))$.

Teste 3 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\operatorname{Im}(T) \subset \operatorname{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$;

(II) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = \dim(\operatorname{Im}(T))$;

(III) $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C todas as afirmações são falsas.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 4 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ todas as afirmações são falsas.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x+y\| + \|x-y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\operatorname{proj}_{[v,w]} x = \operatorname{proj}_v x + \operatorname{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

[B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[E] todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \operatorname{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\operatorname{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

[A] 3.

[B] 5.

[C] 4.

[D] 2.

■ 1.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^{\perp}$ será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- A 1.
- ■ 3.
- C 2.
- D 4.
- E 6.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \big\{ a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0 \big\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^{\perp} = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A 7.
- B -3.
- ■ -7.
- D 5.
- E 3.

Teste 11 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = 1 - t^2, \quad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = t, \quad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\Big) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$.
- ■ $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.
- C T é injetora.
- D $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$.
- E $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- A $-\pi$.
- ■ 2.
- C π.
- D 1.
- E -1.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

- [A] $\frac{1}{2}$.
- [B] $-\frac{1}{5}$.
- [C] 0.
- [D] $\frac{1}{5}$.
- [■] $\frac{3}{5}$.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [■] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A $\frac{4}{15}$.
- B $\frac{1}{15}$.
- C $-\frac{2}{15}$.
- ■ $\frac{8}{15}$.
- E 0.

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B ■ D E

Teste 2: A B C ■ E

Teste 3: A B C D ■

Teste 4: A B ■ D E

Teste 5: A ■ C D E

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B C D ■

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: A ■ C D E

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: A ■ C D E

Teste 14: A B C D ■

Teste 15: A B C D ■

Teste 16: A B C ■ E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

■ $\frac{8}{15}$.

B $-\frac{2}{15}$.

C $\frac{4}{15}$.

D 0.

E $\frac{1}{15}$.

Teste 2 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;

(II) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;

(III) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (I) é verdadeira.

B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D todas as afirmações são falsas.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 3 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x+y\| + \|x-y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\operatorname{proj}_{[v,w]} x = \operatorname{proj}_v x + \operatorname{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{t}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{t},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\operatorname{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- [A] 1.
- [B] 4.
- ■ 3.
- [D] 2.
- [E] 6.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^{\perp}$ será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$
para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por
$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$
para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por
$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$
para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são falsas.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 8 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- [A] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$.
- [B] T é sobrejetora.
- ■ $\mathrm{Im}(T) = \big\{x \in V : T(x) = x\big\}$.
- [D] n é par.
- [E] T é injetora.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi,\pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi,\pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

■ 2.
B $-\pi$.
C π.
D 1.
E -1.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \operatorname{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\operatorname{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

A 3.
B 5.
■ 1.
D 2.
E 4.

Teste 11 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = t, \quad T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.
- ■ $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.
- C $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$.
- D $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$.
- E T é injetora.

Teste 12 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 13 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [■] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- [A] para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^\perp$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- [B] para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- [C] para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- [■] para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- [E] se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \mathrm{proj}_{e_1} x + \mathrm{proj}_{e_2} x + \cdots + \mathrm{proj}_{e_n} x$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

- A $\frac{1}{2}$.
- B $\frac{1}{5}$.
- ■ $\frac{3}{5}$.
- D 0.
- E $-\frac{1}{5}$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A 3.
- B 7.
- C -3.
- ■ -7.
- E 5.

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: A B ■ D E

Teste 3: A ■ C D E

Teste 4: A B ■ D E

Teste 5: A B ■ D E

Teste 6: A B C D ■

Teste 7: A ■ C D E

Teste 8: A B ■ D E

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: A ■ C D E

Teste 12: ■ B C D E

Teste 13: A ■ C D E

Teste 14: A B C ■ E

Teste 15: A B ■ D E

Teste 16: A B C ■ E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = t, \quad T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

■ $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.

B $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$.

C $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.

D $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$.

E T é injetora.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^\perp$, vale que o conjunto $\big\{x + y : x \in A,\ y \in B\big\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (II) é verdadeira.

B apenas a afirmação (III) é verdadeira.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{\mathrm{t}},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- ■ 3.
- B 6.
- C 1.
- D 2.
- E 4.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A 0.
- B $\frac{1}{15}$.
- C $-\frac{2}{15}$.
- ■ $\frac{8}{15}$.
- E $\frac{4}{15}$.

Teste 5 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A T é sobrejetora.
- B T é injetora.
- C n é par.
- ■ $\mathrm{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- E $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^\perp$ será:

■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

B $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.

C $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

D $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

E $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

A -1.

B 1.

C π.

D $-\pi$.

■ 2.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

A 3.
B 7.
C 5.
D -3.
■ -7.

Teste 9 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\operatorname{proj}_{[v,w]} x = \operatorname{proj}_v x + \operatorname{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
B todas as afirmações são verdadeiras.
C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;

(II) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;

(III) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] todas as afirmações são falsas.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

- ■ $\frac{3}{5}$.
- [B] 0.
- [C] $\frac{1}{2}$.
- [D] $-\frac{1}{5}$.
- [E] $\frac{1}{5}$.

Teste 12 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por
$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$
para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por
$$T(X) = \mathrm{tr}(X),$$
para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

[A] 2.

[B] 4.

[C] 5.

[D] 3.

■ 1.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

[A] para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.

[B] para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^{\perp}$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.

[C] para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^{\perp} \subset S^{\perp}$.

[D] se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \mathrm{proj}_{e_1} x + \mathrm{proj}_{e_2} x + \cdots + \mathrm{proj}_{e_n} x$.

■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^{\perp} \subset W^{\perp}$.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (I) é verdadeira.

B apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida por

$$\langle p, q\rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y')\rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (III) é verdadeira.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

■ todas as afirmações são falsas.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ________________________________ **NUSP:** _____________ **Turma:** _________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: A B C ■ E

Teste 3: ■ B C D E

Teste 4: A B C ■ E

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B C D ■

Teste 9: A B C ■ E

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: ■ B C D E

Teste 12: A ■ C D E

Teste 13: A B C D ■

Teste 14: A B C D ■

Teste 15: A B ■ D E

Teste 16: A B C ■ E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{\mathrm{t}},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\operatorname{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

■ 3.
B 2.
C 1.
D 6.
E 4.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

■ $\operatorname{Im}(T) = \big\{x \in V : T(x) = x\big\}$.
B $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = \dim\big(\operatorname{Im}(T)\big)$.
C n é par.
D T é injetora.
E T é sobrejetora.

Teste 3 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\operatorname{Im}(T) \subset \operatorname{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 2$;

(II) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = \dim\big(\operatorname{Im}(T)\big)$;

(III) $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
B todas as afirmações são falsas.
C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \operatorname{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\operatorname{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- A 2.
- B 4.
- ■ 1.
- D 5.
- E 3.

Teste 5 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = 1 - t^2, \quad T\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = t, \quad T\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Big) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) < \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big)$.
- B T é injetora.
- C $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 1$.
- ■ $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 2$.
- E $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 3$.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\operatorname{proj}_{[v,w]} x = \operatorname{proj}_v x + \operatorname{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 7 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi,\pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi,\pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

A -1.
B π.
■ 2.
D $-\pi$.
E 1.

Teste 9 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\big\{x + y : x \in A,\ y \in B\big\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (II) é verdadeira.
■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^\perp$ será:

- [A] $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- [B] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- [C] $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- [E] $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- ■ $\frac{8}{15}$.
- [B] $\frac{1}{15}$.
- [C] 0.
- [D] $\frac{4}{15}$.
- [E] $-\frac{2}{15}$.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

■ -7.
B 7.
C 3.
D 5.
E -3.

Teste 13 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

■ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

■ $\frac{3}{5}$.
B 0.
C $\frac{1}{5}$.
D $\frac{1}{2}$.
E $-\frac{1}{5}$.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
B para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^\perp$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
C se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \mathrm{proj}_{e_1} x + \mathrm{proj}_{e_2} x + \cdots + \mathrm{proj}_{e_n} x$.
D para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
E para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são falsas.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: ■ B C D E

Teste 3: A B C D ■

Teste 4: A B ■ D E

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B ■ D E

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: A B C ■ E

Teste 11: ■ B C D E

Teste 12: ■ B C D E

Teste 13: ■ B C D E

Teste 14: ■ B C D E

Teste 15: ■ B C D E

Teste 16: A B ■ D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são falsas.
- [D] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \big\{ a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0 \big\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- [A] 7.
- [B] -3.
- [C] 5.
- ■ -7.
- [E] 3.

Teste 3 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) = t, \quad T\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

■ $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.

B T é injetora.

C $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$.

D $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.

E $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{\mathrm{t}},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

A 1.

B 6.

C 4.

D 2.

■ 3.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \mathrm{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- ■ 1.
- B 3.
- C 5.
- D 2.
- E 4.

Teste 6 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;

(II) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;

(III) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C todas as afirmações são falsas.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

- [A] $-\frac{1}{5}$.
- [B] $\frac{1}{5}$.
- ■ $\frac{3}{5}$.
- [D] $\frac{1}{2}$.
- [E] 0.

Teste 8 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\mathrm{proj}_{[v,w]}\, x = \mathrm{proj}_v\, x + \mathrm{proj}_w\, x.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A $\frac{4}{15}$.
- B $\frac{1}{15}$.
- C $-\frac{2}{15}$.
- ■ $\frac{8}{15}$.
- E 0.

Teste 10 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- B para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- ■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- D se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \operatorname{proj}_{e_1} x + \operatorname{proj}_{e_2} x + \cdots + \operatorname{proj}_{e_n} x$.
- E para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^\perp$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.

Teste 11 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[B] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[D] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[B] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

■ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^{\perp}$ será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi,\pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f,g\in\mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$. Sejam $f,g_1,g_2\in\mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ definidas por

$$f(x)=x,\quad g_1(x)=\operatorname{sen}x \quad \text{e} \quad g_2(x)=\cos x,$$

para todo $x\in[-\pi,\pi]$. Se $a,b\in\mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f-ag_1-bg_2\|$$

seja mínimo, então $a+b$ será igual a:

- [A] π.
- [B] $-\pi$.
- ■ 2.
- [D] -1.
- [E] 1.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T:V\to V$ uma transformação linear tal que $T\circ T=T$. Pode-se afirmar que:

- [A] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)=\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$.
- [B] T é injetora.
- ■ $\mathrm{Im}(T)=\big\{x\in V: T(x)=x\big\}$.
- [D] n é par.
- [E] T é sobrejetora.

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B ■ D E

Teste 2: A B C ■ E

Teste 3: ■ B C D E

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: ■ B C D E

Teste 6: A ■ C D E

Teste 7: A B ■ D E

Teste 8: A ■ C D E

Teste 9: A B C ■ E

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: A B C D ■

Teste 12: A B C ■ E

Teste 13: A B C ■ E

Teste 14: A B C ■ E

Teste 15: A B ■ D E

Teste 16: A B ■ D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^{\perp}$ será:

A $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

[redacted] $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

C $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.

D $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

E $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\mathrm{proj}_{[v,w]}\, x = \mathrm{proj}_v\, x + \mathrm{proj}_w\, x.$$

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[redacted] apenas a afirmação (II) é verdadeira.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 3 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{\mathrm{t}},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- A 2.
- B 6.
- C 4.
- D 1.
- ■ 3.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida por

$$\langle p, q\rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida por

$$\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

■ todas as afirmações são falsas.
B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 6 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\operatorname{Im}(T) \subset \operatorname{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 2$;

(II) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = \dim\big(\operatorname{Im}(T)\big)$;

(III) $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.
C todas as afirmações são falsas.
D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 7 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$.
- B n é par.
- C T é sobrejetora.
- D T é injetora.
- ■ $\mathrm{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}\big([-\pi, \pi]\big)$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}\big([-\pi, \pi]\big)$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}\big([-\pi, \pi]\big)$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- A 1.
- B π.
- C $-\pi$.
- ■ 2.
- E -1.

Teste 9 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- B para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- C se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \mathrm{proj}_{e_1} x + \mathrm{proj}_{e_2} x + \cdots + \mathrm{proj}_{e_n} x$.
- ■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- E para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^\perp$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.

Teste 10 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = t, \quad T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

A T é injetora.

B $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$.

C $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.

[redacted] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.

E $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$.

Teste 11 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[redacted] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $\frac{4}{15}$.
- $\boxed{\text{B}}$ 0.
- $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{15}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{2}{15}$.
- ■ $\frac{8}{15}$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \operatorname{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\operatorname{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ 2.
- $\boxed{\text{B}}$ 3.
- ■ 1.
- $\boxed{\text{D}}$ 4.
- $\boxed{\text{E}}$ 5.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t) q(t) \, \mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

- [A] 0.
- [B] $\frac{1}{2}$.
- [C] $\frac{1}{5}$.
- ■ $\frac{3}{5}$.
- [E] $-\frac{1}{5}$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left\{ a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0 \right\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^{\perp} = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- [A] 5.
- [B] 3.
- ■ -7.
- [D] 7.
- [E] -3.

+6/11/50+

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A ■ C D E

Teste 2: A ■ C D E

Teste 3: A B ■ D E

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: ■ B C D E

Teste 6: A ■ C D E

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B C ■ E

Teste 9: A B C ■ E

Teste 10: A B C ■ E

Teste 11: A ■ C D E

Teste 12: A B C D ■

Teste 13: A B ■ D E

Teste 14: A B C D ■

Teste 15: A B C ■ E

Teste 16: A B ■ D E

+7/1/48+

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- [A] para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^{\perp} \subset S^{\perp}$.
- [B] para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^{\perp}$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- [C] se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \operatorname{proj}_{e_1} x + \operatorname{proj}_{e_2} x + \cdots + \operatorname{proj}_{e_n} x$.
- ■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^{\perp} \subset W^{\perp}$.
- [E] para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^{\perp}$ será:

- [A] $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- [B] $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- [C] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- [D] $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

- A $\frac{1}{2}$.
- B 0.
- C $\frac{1}{5}$.
- D $-\frac{1}{5}$.
- ■ $\frac{3}{5}$.

Teste 4 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 5 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\Big(\big(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\big)\Big) = 1 - t^2, \quad T\Big(\big(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\big)\Big) = t, \quad T\Big(\big(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\big)\Big) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\Big(\big(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)\Big) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.
- B $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$.
- ■ $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.
- D T é injetora.
- E $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$.
- ■ $\mathrm{Im}(T) = \big\{x \in V : T(x) = x\big\}$.
- C T é injetora.
- D T é sobrejetora.
- E n é par.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi,\pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f,g \in \mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$. Sejam $f,g_1,g_2 \in \mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi,\pi]$. Se $a,b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a+b$ será igual a:

- A π.
- B 1.
- C -1.
- D $-\pi$.
- ■ 2.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p,q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p,q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \big\{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a,b,c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\big\}.$$

Se $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A 3.
- B -3.
- C 7.
- D 5.
- ■ -7.

Teste 9 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\{x+y : x \in A,\ y \in B\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 10 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x+y\| + \|x-y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\mathrm{proj}_{[v,w]}\, x = \mathrm{proj}_v\, x + \mathrm{proj}_w\, x.$$

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$
para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por
$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$
para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por
$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$
para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são falsas.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por
$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$
para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por
$$T(X) = X + X^{\mathrm{t}},$$
para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- A 1.
- ■ 3.
- C 2.
- D 4.
- E 6.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \mathrm{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- [A] 5.
- [B] 3.
- [C] 4.
- ■ 1.
- [E] 2.

Teste 14 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;

(II) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;

(III) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [C] todas as afirmações são falsas.
- [D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 15 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- [A] 0.
- [B] $-\frac{2}{15}$.
- [C] $\frac{1}{15}$.
- [D] $\frac{4}{15}$.
- ■ $\frac{8}{15}$.

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C ■ E

Teste 2: A B C D ■

Teste 3: A B C D ■

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: A B ■ D E

Teste 6: A ■ C D E

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B C D ■

Teste 9: A B C D ■

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: A ■ C D E

Teste 12: A ■ C D E

Teste 13: A B C ■ E

Teste 14: A ■ C D E

Teste 15: A ■ C D E

Teste 16: A B C D ■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [■] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \big\{ a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0 \big\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- [A] -3.
- [■] -7.
- [C] 3.
- [D] 7.
- [E] 5.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{\mathrm{t}},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- A 6.
- B 1.
- C 2.
- D 4.
- ■ 3.

Teste 4 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y\rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 5 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x+y\| + \|x-y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\operatorname{proj}_{[v,w]} x = \operatorname{proj}_v x + \operatorname{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- [A] $-\frac{2}{15}$.
- ■ $\frac{8}{15}$.
- [C] 0.
- [D] $\frac{4}{15}$.
- [E] $\frac{1}{15}$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^{\perp}$ será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \operatorname{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\operatorname{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- A 4.
- B 3.
- C 2.
- ■ 1.
- E 5.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

■ todas as afirmações são falsas.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas a afirmação (I) é verdadeira.

D todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi,\pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi,\pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- A $-\pi$.
- B π.
- C -1.
- ■ 2.
- E 1.

Teste 11 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T é injetora.
- B $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) < \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big)$.
- C $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 3$.
- D $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 1$.
- ■ $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 2$.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A n é par.
- ■ $\mathrm{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- C T é sobrejetora.
- D $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$.
- E T é injetora.

Teste 13 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$;

(II) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$;

(III) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^\perp$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- B para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- ■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- D para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- E se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \mathrm{proj}_{e_1} x + \mathrm{proj}_{e_2} x + \cdots + \mathrm{proj}_{e_n} x$.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\big\{x + y : x \in A,\ y \in B\big\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- $\boxed{\text{C}}$ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{D}}$ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

- $\boxed{\text{A}}$ $-\frac{1}{5}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{5}$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{2}$.
- $\boxed{\text{D}}$ 0.
- ■ $\frac{3}{5}$.

+8/11/26+

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ______

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A ■ C D E

Teste 2: A ■ C D E

Teste 3: A B C D ■

Teste 4: A B C ■ E

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: A ■ C D E

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B C ■ E

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: A B C ■ E

Teste 11: A B C D ■

Teste 12: A ■ C D E

Teste 13: ■ B C D E

Teste 14: A B ■ D E

Teste 15: A B C D ■

Teste 16: A B C D ■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ____________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \mathrm{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

A 4.
B 3.
C 5.
■ 1.
E 2.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^{\perp}$ será:

■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
B $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
C $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
D $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
E $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 3 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

A T é sobrejetora.
■ $\mathrm{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
C T é injetora.
D $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$.
E n é par.

Teste 4 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

B apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[redacted] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 5 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

[redacted] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C apenas a afirmação (III) é verdadeira.

D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{\mathrm{t}},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\operatorname{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- A 4.
- ■ 3.
- C 2.
- D 6.
- E 1.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \big\{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\big\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^{\perp} = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- ■ -7.
- B 5.
- C -3.
- D 7.
- E 3.

Teste 8 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;

(II) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;

(III) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.
B todas as afirmações são falsas.
C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

■ $\frac{3}{5}$.
B $\frac{1}{5}$.
C 0.
D $\frac{1}{2}$.
E $-\frac{1}{5}$.

Teste 10 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

A para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
B se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \mathrm{proj}_{e_1} x + \mathrm{proj}_{e_2} x + \cdots + \mathrm{proj}_{e_n} x$.
C para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^{\perp}$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
D para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^{\perp} \subset S^{\perp}$.
■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^{\perp} \subset W^{\perp}$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi,\pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f,g \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$. Sejam $f,g_1,g_2 \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi,\pi]$. Se $a,b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a+b$ será igual a:

- A -1.
- B $-\pi$.
- C 1.
- D π.
- ■ 2.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1,-1,2,-3), \quad v_2 = (1,1,3,2),$$
$$v_3 = (1,-5,0,2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1,1,1,1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1,w_2,w_3,w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a,b,c,0)$, então $a+b+c$ será igual a:

- ■ $\frac{8}{15}$.
- B 0.
- C $-\frac{2}{15}$.
- D $\frac{1}{15}$.
- E $\frac{4}{15}$.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- ■ todas as afirmações são falsas.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\mathrm{proj}_{[v,w]}\, x = \mathrm{proj}_v\, x + \mathrm{proj}_w\, x.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [B] todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 15 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = 1 - t^2, \quad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = t, \quad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\Big) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

■ $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2.$

B $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1.$

C T é injetora.

D $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big).$

E $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3.$

Teste 16 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

B apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

+9/11/14+

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ____________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C ■ E

Teste 2: ■ B C D E

Teste 3: A ■ C D E

Teste 4: A B ■ D E

Teste 5: ■ B C D E

Teste 6: A ■ C D E

Teste 7: ■ B C D E

Teste 8: ■ B C D E

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: A B C D ■

Teste 11: A B C D ■

Teste 12: ■ B C D E

Teste 13: A B ■ D E

Teste 14: A B C D ■

Teste 15: ■ B C D E

Teste 16: A B ■ D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;

(II) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;

(III) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^\perp$, vale que o conjunto $\big\{x + y : x \in A,\ y \in B\big\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 3 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[C] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 4 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = 1 - t^2, \quad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = t, \quad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\Big) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

■ $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.

[B] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.

[C] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$.

[D] T é injetora.

[E] $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$.

Teste 5 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- [A] para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^{\perp} \subset S^{\perp}$.
- ■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^{\perp} \subset W^{\perp}$.
- [C] para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^{\perp}$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- [D] para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- [E] se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \operatorname{proj}_{e_1} x + \operatorname{proj}_{e_2} x + \cdots + \operatorname{proj}_{e_n} x$.

Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

■ todas as afirmações são falsas.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C todas as afirmações são verdadeiras.

D apenas a afirmação (III) é verdadeira.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^\perp$ será:

A $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.

B $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

C $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

D $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi,\pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f,g \in \mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$. Sejam $f,g_1,g_2 \in \mathcal{C}\big([-\pi,\pi]\big)$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi,\pi]$. Se $a,b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a+b$ será igual a:

■ 2.
[B] 1.
[C] π.
[D] $-\pi$.
[E] -1.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p,q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p,q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \big\{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a,b,c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\big\}.$$

Se $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^{\perp} = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

[A] -3.
[B] 5.
[C] 7.
[D] 3.
■ -7.

Teste 11 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x+y\| + \|x-y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\operatorname{proj}_{[v,w]} x = \operatorname{proj}_v x + \operatorname{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1,-1,2,-3), \quad v_2 = (1,1,3,2),$$
$$v_3 = (1,-5,0,2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1,1,1,1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a,b,c,0)$, então $a+b+c$ será igual a:

- [A] $\frac{1}{15}$.
- [B] $\frac{4}{15}$.
- [C] 0.
- [D] $-\frac{2}{15}$.
- ■ $\frac{8}{15}$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{\mathrm{t}},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- A 1.
- B 2.
- C 6.
- D 4.
- ■ 3.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

- A $\frac{1}{5}$.
- B $-\frac{1}{5}$.
- ■ $\frac{3}{5}$.
- D 0.
- E $\frac{1}{2}$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \mathrm{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- A 2.
- B 5.
- C 3.
- ■ 1.
- E 4.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$.
- B T é injetora.
- ■ $\mathrm{Im}(T) = \big\{x \in V : T(x) = x\big\}$.
- D T é sobrejetora.
- E n é par.

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B ■ D E

Teste 2: A B C D ■

Teste 3: A ■ C D E

Teste 4: ■ B C D E

Teste 5: A B C D ■

Teste 6: A ■ C D E

Teste 7: ■ B C D E

Teste 8: A B C D ■

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: A B C D ■

Teste 11: A ■ C D E

Teste 12: A B C D ■

Teste 13: A B C D ■

Teste 14: A B ■ D E

Teste 15: A B C ■ E

Teste 16: A B ■ D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

Instruções

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

Boa Prova!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x+y\| + \|x-y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\operatorname{proj}_{[v,w]} x = \operatorname{proj}_v x + \operatorname{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- ■ $\operatorname{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- B n é par.
- C T é injetora.
- D T é sobrejetora.
- E $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = \dim(\operatorname{Im}(T))$.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A $\frac{1}{15}$.
- B $\frac{4}{15}$.
- C $-\frac{2}{15}$.
- D 0.
- ■ $\frac{8}{15}$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^{\text{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{\text{t}},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\text{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- A 4.
- B 6.
- C 1.
- D 2.
- ■ 3.

Teste 5 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \mathrm{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- [A] 5.
- [B] 4.
- [C] 2.
- ■ 1.
- [E] 3.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

- ■ todas as afirmações são falsas.
- [B] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] todas as afirmações são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 7 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.
- [B] $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$.
- [C] T é injetora.
- [D] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$.
- ■ $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}\big([-\pi, \pi]\big)$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}\big([-\pi, \pi]\big)$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}\big([-\pi, \pi]\big)$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- [A] $-\pi$.
- [B] 1.
- [C] π.
- ■ 2.
- [E] -1.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

- ■ $\frac{3}{5}$.
- B 0.
- C $\frac{1}{2}$.
- D $-\frac{1}{5}$.
- E $\frac{1}{5}$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^{\perp}$ será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 11 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

B apenas a afirmação (III) é verdadeira.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

A para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^{\perp} \subset S^{\perp}$.

B para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.

C para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^{\perp}$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.

D se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \operatorname{proj}_{e_1} x + \operatorname{proj}_{e_2} x + \cdots + \operatorname{proj}_{e_n} x$.

■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^{\perp} \subset W^{\perp}$.

Teste 13 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\operatorname{Im}(T) \subset \operatorname{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 2$;

(II) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = \dim\big(\operatorname{Im}(T)\big)$;

(III) $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.

B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C apenas a afirmação (I) é verdadeira.

D todas as afirmações são falsas.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [E] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \big\{ a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0 \big\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- [A] 7.
- [B] 5.
- ■ -7.
- [D] 3.
- [E] -3.

Teste 16 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

■ apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[B] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[C] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

[D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

[E] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C ■ E

Teste 2: ■ B C D E

Teste 3: A B C D ■

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: A B C D ■

Teste 8: A B C ■ E

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: A B ■ D E

Teste 11: ■ B C D E

Teste 12: A B C D ■

Teste 13: ■ B C D E

Teste 14: A ■ C D E

Teste 15: A B ■ D E

Teste 16: ■ B C D E

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** ________ **Turma:** ________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (III) é verdadeira.

B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^\perp$, vale que o conjunto $\big\{x + y : x \in A,\ y \in B\big\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (III) é verdadeira.

■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \mathrm{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

A 5.
■ 1.
C 3.
D 2.
E 4.

Teste 4 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;

(II) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;

(III) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
C todas as afirmações são falsas.
D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 5 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

A se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \mathrm{proj}_{e_1} x + \mathrm{proj}_{e_2} x + \cdots + \mathrm{proj}_{e_n} x$.
B para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
C para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^{\perp}$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^{\perp} \subset W^{\perp}$.
E para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^{\perp} \subset S^{\perp}$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

■ -7.
[B] 3.
[C] 7.
[D] -3.
[E] 5.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

[A] $\frac{4}{15}$.
[B] $\frac{1}{15}$.
[C] $-\frac{2}{15}$.
■ $\frac{8}{15}$.
[E] 0.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

[A] $\frac{1}{2}$.

[B] 0.

[C] $-\frac{1}{5}$.

■ $\frac{3}{5}$.

[E] $\frac{1}{5}$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

[A] apenas a afirmação (I) é verdadeira.

[B] apenas a afirmação (III) é verdadeira.

[C] todas as afirmações são verdadeiras.

■ todas as afirmações são falsas.

[E] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{\mathrm{t}},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- A 1.
- ■ 3.
- C 6.
- D 2.
- E 4.

Teste 11 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\mathrm{proj}_{[v,w]}\, x = \mathrm{proj}_v\, x + \mathrm{proj}_w\, x.$$

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 12 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = 1 - t^2, \quad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = t, \quad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\Big) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$.
- ■ $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.
- C $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$.
- D $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.
- E T é injetora.

Teste 13 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- ■ $\mathrm{Im}(T) = \big\{x \in V : T(x) = x\big\}$.
- B $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$.
- C T é sobrejetora.
- D n é par.
- E T é injetora.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^{\perp}$ será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 15 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi,\pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f,g \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$. Sejam $f,g_1,g_2 \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi,\pi]$. Se $a,b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a+b$ será igual a:

- A π.
- B 1.
- C -1.
- D $-\pi$.
- ■ 2.

+12/11/38+

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ______________________________ **NUSP:** _____________ **Turma:** _________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B ■ D E

Teste 2: A ■ C D E

Teste 3: A ■ C D E

Teste 4: A B C D ■

Teste 5: A B C ■ E

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: A B C ■ E

Teste 8: A B C ■ E

Teste 9: A B C ■ E

Teste 10: A ■ C D E

Teste 11: ■ B C D E

Teste 12: A ■ C D E

Teste 13: ■ B C D E

Teste 14: A B ■ D E

Teste 15: A B C D ■

Teste 16: A B C D ■

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questÃ£o correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x+y\| + \|x-y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\operatorname{proj}_{[v,w]} x = \operatorname{proj}_v x + \operatorname{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

D todas as afirmações são verdadeiras.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 2 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y\rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

A apenas a afirmação (III) é verdadeira.

B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

■ apenas a afirmação (I) é verdadeira.

E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi,\pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f,g \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$. Sejam $f,g_1,g_2 \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi,\pi]$. Se $a,b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a+b$ será igual a:

- A -1.
- B 1.
- C π.
- D $-\pi$.
- ■ 2.

Teste 4 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$;

(II) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$;

(III) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 5 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 6 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- [A] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.
- [B] $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$.
- ■ $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.
- [D] T é injetora.
- [E] $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{\mathrm{t}},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\operatorname{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- [A] 6.
- [B] 1.
- [C] 2.
- ■ 3.
- [E] 4.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

- [A] 0.
- [B] $-\frac{1}{5}$.
- [C] $\frac{1}{2}$.
- ■ $\frac{3}{5}$.
- [E] $\frac{1}{5}$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para $S^{\perp}$ será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q\rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y')\rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são falsas.

Teste 11 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [B] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- ■ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \operatorname{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\operatorname{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

- [A] 4.
- [B] 5.
- ■ 1.
- [D] 2.
- [E] 3.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A 7.
- B 5.
- C 3.
- D -3.
- ■ -7.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^\perp$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- B se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \operatorname{proj}_{e_1} x + \operatorname{proj}_{e_2} x + \cdots + \operatorname{proj}_{e_n} x$.
- ■ para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- D para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- E para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

■ $\frac{8}{15}$.

[B] $\frac{4}{15}$.

[C] $\frac{1}{15}$.

[D] $-\frac{2}{15}$.

[E] 0.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

[A] T é injetora.

[B] n é par.

[C] T é sobrejetora.

[D] $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = \dim(\operatorname{Im}(T))$.

■ $\operatorname{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.

+13/11/26+

2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ________

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: A B C ■ E

Teste 3: A B C D ■

Teste 4: A ■ C D E

Teste 5: A B C D ■

Teste 6: A B ■ D E

Teste 7: A B C ■ E

Teste 8: A B C ■ E

Teste 9: A ■ C D E

Teste 10: A B C D ■

Teste 11: A B C D ■

Teste 12: A B ■ D E

Teste 13: A B C D ■

Teste 14: A B ■ D E

Teste 15: ■ B C D E

Teste 16: A B C D ■