

IDENTIFICAÇÃO

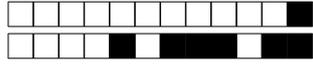
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+1/2/59+



Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- B para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- C para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- D para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- E se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

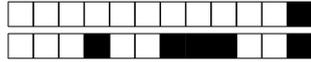
- A n é par.
- B T é sobrejetora.
- C T é injetora.
- D $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- E $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.

Teste 3 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;
- (III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C todas as afirmações são falsas.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.



Teste 4 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

- (I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

- (II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

- (III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B todas as afirmações são falsas.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.



Teste 6 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

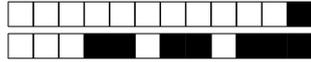
$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- 3.
- 5.
- 4.
- 2.
- 1.



Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

- A 1.
- B 3.
- C 2.
- D 4.
- E 6.



Teste 10 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A) 7.
- B) -3.
- C) -7.
- D) 5.
- E) 3.

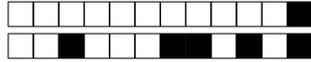
Teste 11 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

e $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$

Assinale a alternativa correta:

- A) $\dim(\text{Ker}(T)) = 3.$
- B) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2.$
- C) T é injetora.
- D) $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T)).$
- E) $\dim(\text{Ker}(T)) = 1.$



Teste 12 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- (B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

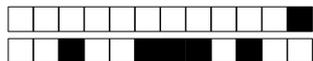
$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \text{cos } x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- (A) $-\pi$.
- (B) 2.
- (C) π .
- (D) 1.
- (E) -1 .



Teste 14 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

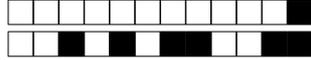
- A $\frac{1}{2}$.
- B $-\frac{1}{5}$.
- C 0.
- D $\frac{1}{5}$.
- $\frac{3}{5}$.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



Teste 16 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores

$$\begin{aligned}v_1 &= (1, -1, 2, -3), & v_2 &= (1, 1, 3, 2), \\v_3 &= (1, -5, 0, 2) & \text{e } v_4 &= (1, 1, 1, 1)\end{aligned}$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A $\frac{4}{15}$.
- B $\frac{1}{15}$.
- C $-\frac{2}{15}$.
- D $\frac{8}{15}$.
- E 0.



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

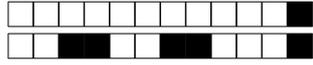
Teste 12: A B C D E

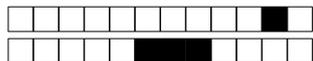
Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E





IDENTIFICAÇÃO

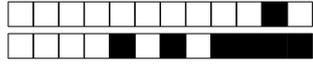
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

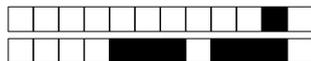
1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+2/2/47+



Teste 1 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$\begin{aligned}v_1 &= (1, -1, 2, -3), & v_2 &= (1, 1, 3, 2), \\v_3 &= (1, -5, 0, 2) & \text{e } v_4 &= (1, 1, 1, 1)\end{aligned}$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

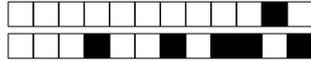
- $\frac{8}{15}$.
- $-\frac{2}{15}$.
- $\frac{4}{15}$.
- 0.
- $\frac{1}{15}$.

Teste 2 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;
- (III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



Teste 3 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C) todas as afirmações são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

- A) 1.
- B) 4.
- C) 3.
- D) 2.
- E) 6.



Teste 5 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

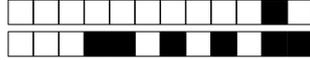
- A $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são falsas.
- C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 8 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.
- B) T é sobrejetora.
- C) $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- D) n é par.
- E) T é injetora.



Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \text{cos } x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- 2.
- B $-\pi$.
- C π .
- D 1.
- E -1 .

Teste 10 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

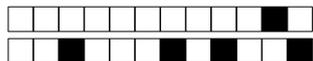
$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- A 3.
- B 5.
- 1.
- D 2.
- E 4.



Teste 11 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

e $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$

Assinale a alternativa correta:

- A $\dim(\text{Ker}(T)) = 1.$
- B $\dim(\text{Ker}(T)) = 2.$
- C $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T)).$
- D $\dim(\text{Ker}(T)) = 3.$
- E T é injetora.

Teste 12 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



Teste 13 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

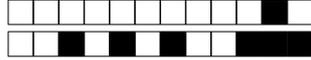
- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- B para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- C para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- D para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- E se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.



Teste 15 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- A $\frac{1}{2}$.
- B $\frac{1}{5}$.
- C $\frac{3}{5}$.
- D 0.
- E $-\frac{1}{5}$.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

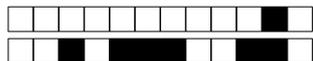
$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A 3.
- B 7.
- C -3.
- D -7.
- E 5.



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: B C D E

Teste 2: A B D E

Teste 3: A C D E

Teste 4: A B D E

Teste 5: A B D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A C D E

Teste 8: A B D E

Teste 9: B C D E

Teste 10: A B D E

Teste 11: A C D E

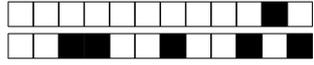
Teste 12: B C D E

Teste 13: A C D E

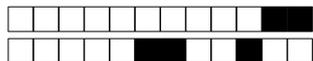
Teste 14: A B C E

Teste 15: A B D E

Teste 16: A B C E



+2/12/37+



IDENTIFICAÇÃO

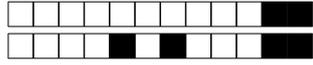
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+3/2/35+



Teste 1 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

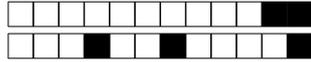
- A** $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$.
- B** $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$.
- C** $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.
- D** $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$.
- E** T é injetora.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- A** apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B** apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C** apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D** apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E** apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



Teste 3 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

- 3.
- 6.
- 1.
- 2.
- 4.

Teste 4 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 2, -3), & v_2 &= (1, 1, 3, 2), \\ v_3 &= (1, -5, 0, 2) & \text{e } v_4 &= (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- 0.
- $\frac{1}{15}$.
- $-\frac{2}{15}$.
- $\frac{8}{15}$.
- $\frac{4}{15}$.

Teste 5 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- T é sobrejetora.
- T é injetora.
- n é par.
- $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.



Teste 6 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

$\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}.$

$\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}.$

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

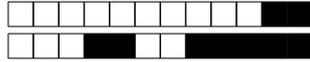
$-1.$

$1.$

$\pi.$

$-\pi.$

$2.$



Teste 8 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A) 3.
- B) 7.
- C) 5.
- D) -3.
- E) -7.

Teste 9 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



Teste 10 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;

(II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;

(III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

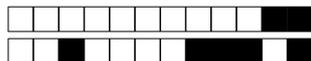
- A) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
 B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
 C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
 D) todas as afirmações são falsas.
 E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 11 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- A) $\frac{3}{5}$.
 B) 0.
 C) $\frac{1}{2}$.
 D) $-\frac{1}{5}$.
 E) $\frac{1}{5}$.



Teste 12 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- A 2.
- B 4.
- C 5.
- D 3.
- E 1.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- B para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- C para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- D se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.
- E para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.



Teste 15 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

- (I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

- (II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

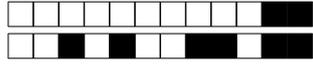
- (III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

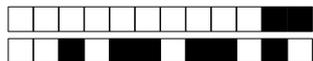
para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.



+3/10/27+



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova – Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

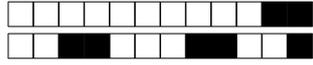
Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

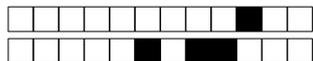
Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E



+3/12/25+



IDENTIFICAÇÃO

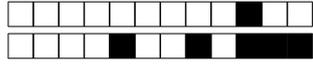
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

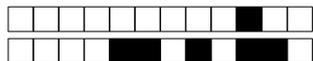
1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+4/2/23+



Teste 1 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

- 3.
- 2.
- 1.
- 6.
- 4.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

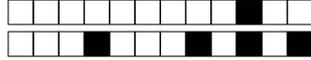
- $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.
- n é par.
- T é injetora.
- T é sobrejetora.

Teste 3 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;
- (III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.



Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- A) 2.
- B) 4.
- C) 1.
- D) 5.
- E) 3.

Teste 5 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

e $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$

Assinale a alternativa correta:

- A) $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$.
- B) T é injetora.
- C) $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.
- D) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$.
- E) $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$.



Teste 6 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 7 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

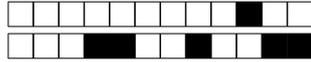
- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.



Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \text{cos } x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

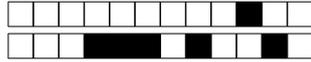
- A) -1 .
- B) π .
- C) 2 .
- D) $-\pi$.
- E) 1 .

Teste 9 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.



Teste 10 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

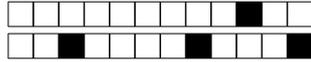
- A $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 11 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 2, -3), & v_2 &= (1, 1, 3, 2), \\ v_3 &= (1, -5, 0, 2) & \text{e} & \quad v_4 = (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A $\frac{8}{15}$.
- B $\frac{1}{15}$.
- C 0.
- D $\frac{4}{15}$.
- E $-\frac{2}{15}$.



Teste 12 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

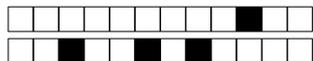
- 7.
- 7.
- 3.
- 5.
- 3.

Teste 13 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.



Teste 14 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

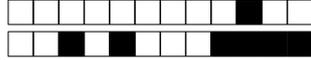
$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- $\frac{3}{5}$.
- 0 .
- $\frac{1}{5}$.
- $\frac{1}{2}$.
- $-\frac{1}{5}$.

Teste 15 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.
- para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.



Teste 16 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

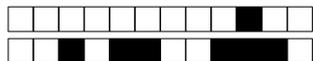
(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são falsas.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova – Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: B C D E

Teste 2: B C D E

Teste 3: A B C D

Teste 4: A B D E

Teste 5: A B C E

Teste 6: B C D E

Teste 7: A B C D

Teste 8: A B D E

Teste 9: A C D E

Teste 10: A B C E

Teste 11: B C D E

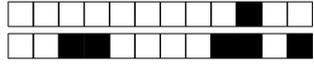
Teste 12: B C D E

Teste 13: B C D E

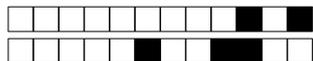
Teste 14: B C D E

Teste 15: B C D E

Teste 16: A B D E



+4/12/13+



IDENTIFICAÇÃO

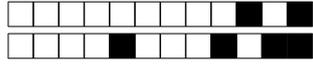
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

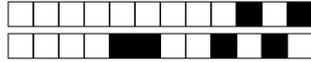
1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+5/2/11+



Teste 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) todas as afirmações são falsas.
- D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

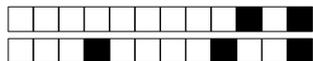
$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A) 7.
- B) -3.
- C) 5.
- D) -7.
- E) 3.



Teste 3 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$
$$\text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A** $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$.
- B** T é injetora.
- C** $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$.
- D** $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.
- E** $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

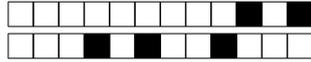
$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

- A** 1.
- B** 6.
- C** 4.
- D** 2.
- E** 3.



Teste 5 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

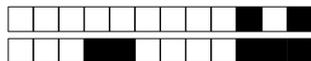
- 1.
- 3.
- 5.
- 2.
- 4.

Teste 6 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;
- (III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.



Teste 7 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- A $-\frac{1}{5}$.
- B $\frac{1}{5}$.
- C $\frac{3}{5}$.
- D $\frac{1}{2}$.
- E 0.

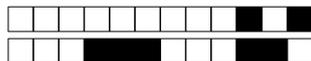
Teste 8 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



Teste 9 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

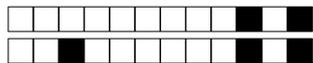
$$\begin{aligned}v_1 &= (1, -1, 2, -3), & v_2 &= (1, 1, 3, 2), \\v_3 &= (1, -5, 0, 2) & \text{e } v_4 &= (1, 1, 1, 1)\end{aligned}$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A $\frac{4}{15}$.
- B $\frac{1}{15}$.
- C $-\frac{2}{15}$.
- D $\frac{8}{15}$.
- E 0.

Teste 10 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- B para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- C para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- D se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.
- E para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.



Teste 11 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

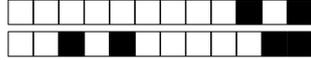
- A $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (III) é verdadeira.



Teste 15 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \text{cos } x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- A π .
- B $-\pi$.
- C 2.
- D -1 .
- E 1.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.
- B T é injetora.
- C $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- D n é par.
- E T é sobrejetora.



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

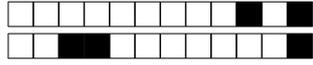
Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

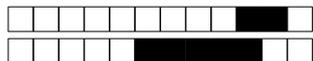
Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E



+5/12/1+



IDENTIFICAÇÃO

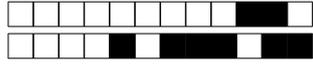
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+6/2/59+



Teste 1 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

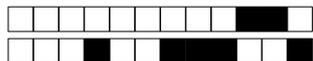
Teste 2 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.



Teste 3 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

- A) 2.
- B) 6.
- C) 4.
- D) 1.
- E) 3.



Teste 5 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- todas as afirmações são falsas.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 6 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

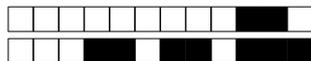
(I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;

(II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;

(III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



Teste 7 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.
- B n é par.
- C T é sobrejetora.
- D T é injetora.
- E $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \text{cos } x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- A 1.
- B π .
- C $-\pi$.
- D 2.
- E -1 .

Teste 9 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- B para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- C se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.
- D para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- E para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.



Teste 10 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T é injetora.
- B $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$.
- C $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.
- D $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$.
- E $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$.

Teste 11 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



Teste 12 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$\begin{aligned}v_1 &= (1, -1, 2, -3), & v_2 &= (1, 1, 3, 2), \\v_3 &= (1, -5, 0, 2) & \text{e } v_4 &= (1, 1, 1, 1)\end{aligned}$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A $\frac{4}{15}$.
- B 0.
- C $\frac{1}{15}$.
- D $-\frac{2}{15}$.
- $\frac{8}{15}$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- A 2.
- B 3.
- 1.
- D 4.
- E 5.



Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

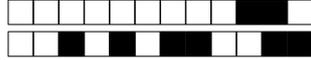
- A) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- A) 0.
- B) $\frac{1}{2}$.
- C) $\frac{1}{5}$.
- D) $\frac{3}{5}$.
- E) $-\frac{1}{5}$.



Teste 16 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A) 5.
- B) 3.
- C) -7.
- D) 7.
- E) -3.



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

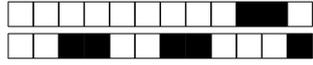
Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

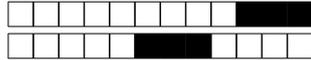
Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E



+6/12/49+



IDENTIFICAÇÃO

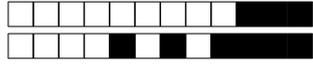
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+7/2/47+



Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A** para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- B** para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- C** se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.
- D** para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- E** para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

- A** $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- B** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- C** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- D** $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- E** $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.



Teste 3 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- A $\frac{1}{2}$.
- B 0.
- C $\frac{1}{5}$.
- D $-\frac{1}{5}$.
- $\frac{3}{5}$.

Teste 4 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



Teste 5 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

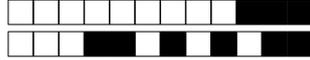
$$\text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.
- B $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$.
- C $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$.
- D T é injetora.
- E $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.
- B $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- C T é injetora.
- D T é sobrejetora.
- E n é par.



Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \text{cos } x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- A π .
- B 1.
- C -1 .
- D $-\pi$.
- 2.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A 3.
- B -3 .
- C 7.
- D 5.
- -7 .



Teste 9 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

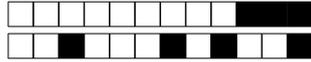
Teste 10 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D todas as afirmações são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E todas as afirmações são verdadeiras.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

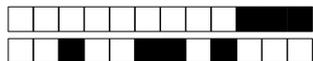
$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

- A 1.
- B 3.
- C 2.
- D 4.
- E 6.



Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- A) 5.
- B) 3.
- C) 4.
- D) 1.
- E) 2.

Teste 14 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;
- (III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C) todas as afirmações são falsas.
- D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 15 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

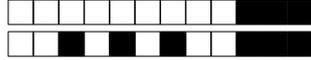
- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

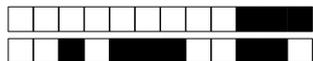


Teste 16 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores

$$\begin{aligned}v_1 &= (1, -1, 2, -3), & v_2 &= (1, 1, 3, 2), \\v_3 &= (1, -5, 0, 2) & \text{e } v_4 &= (1, 1, 1, 1)\end{aligned}$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A) 0.
- B) $-\frac{2}{15}$.
- C) $\frac{1}{15}$.
- D) $\frac{4}{15}$.
- E) $\frac{8}{15}$.



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C E

Teste 2: A B C D

Teste 3: A B C D

Teste 4: A B C D

Teste 5: A B D E

Teste 6: A C D E

Teste 7: A B C D

Teste 8: A B C D

Teste 9: A B C D

Teste 10: A B D E

Teste 11: A C D E

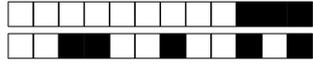
Teste 12: A C D E

Teste 13: A B C E

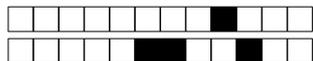
Teste 14: A C D E

Teste 15: A C D E

Teste 16: A B C D



+7/12/37+



IDENTIFICAÇÃO

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+8/2/35+



Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

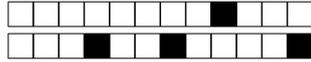
$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A -3.
- B -7.
- C 3.
- D 7.
- E 5.



Teste 3 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

- A) 6.
- B) 1.
- C) 2.
- D) 4.
- E) 3.

Teste 4 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



Teste 5 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

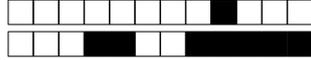
- A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C) todas as afirmações são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 6 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2), \\ v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A) $-\frac{2}{15}$.
- B) $\frac{8}{15}$.
- C) 0.
- D) $\frac{4}{15}$.
- E) $\frac{1}{15}$.



Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- A 4.
- B 3.
- C 2.
- 1.
- E 5.



Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

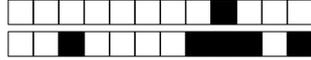
(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.



Teste 10 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- A $-\pi$.
- B π .
- C -1 .
- D 2 .
- E 1 .

Teste 11 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

e $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$

Assinale a alternativa correta:

- A T é injetora.
- B $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$.
- C $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$.
- D $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.
- E $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$.



Teste 12 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A n é par.
- B $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- C T é sobrejetora.
- D $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.
- E T é injetora.

Teste 13 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

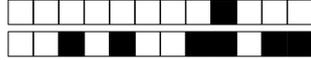
- (I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;
- (III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- B para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- C para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- D para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- E se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.



Teste 15 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

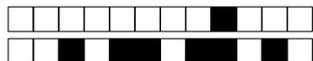
- A) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 16 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- A) $-\frac{1}{5}$.
- B) $\frac{1}{5}$.
- C) $\frac{1}{2}$.
- D) 0.
- $\frac{3}{5}$.



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

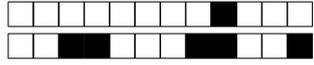
Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

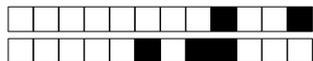
Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E



+8/12/25+



IDENTIFICAÇÃO

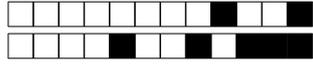
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

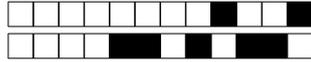
1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+9/2/23+



Teste 1 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- A) 4.
- B) 3.
- C) 5.
- D) 1.
- E) 2.

Teste 2 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

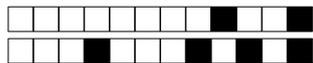
$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

- A) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- B) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- C) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- D) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- E) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 3 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A) T é sobrejetora.
- B) $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- C) T é injetora.
- D) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.
- E) n é par.



Teste 4 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 5 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



Teste 6 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

- A) 4.
- B) 3.
- C) 2.
- D) 6.
- E) 1.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

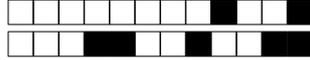
$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A) -7.
- B) 5.
- C) -3.
- D) 7.
- E) 3.



Teste 8 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;
- (III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- todas as afirmações são falsas.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

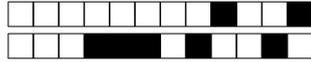
$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- $\frac{3}{5}$.
- $\frac{1}{5}$.
- 0.
- $\frac{1}{2}$.
- $-\frac{1}{5}$.

Teste 10 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.
- para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.



Teste 11 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

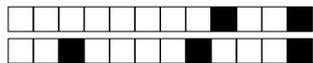
- A) -1 .
- B) $-\pi$.
- C) 1 .
- D) π .
- E) 2 .

Teste 12 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 2, -3), & v_2 &= (1, 1, 3, 2), \\ v_3 &= (1, -5, 0, 2) & \text{e} & \quad v_4 = (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A) $\frac{8}{15}$.
- B) 0 .
- C) $-\frac{2}{15}$.
- D) $\frac{1}{15}$.
- E) $\frac{4}{15}$.



Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são verdadeiras.
- B) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C) todas as afirmações são falsas.
- D) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;

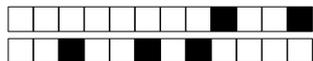
(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;

(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B) todas as afirmações são verdadeiras.
- C) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E) apenas a afirmação (II) é verdadeira.



Teste 15 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$
$$\text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

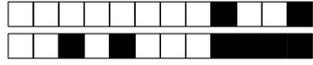
- $\dim(\text{Ker}(T)) = 2.$
- $\dim(\text{Ker}(T)) = 1.$
- T é injetora.
- $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T)).$
- $\dim(\text{Ker}(T)) = 3.$

Teste 16 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

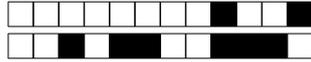
- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.



+9/10/15+



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

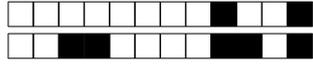
Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

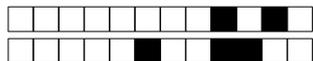
Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E



+9/12/13+



IDENTIFICAÇÃO

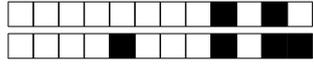
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

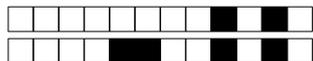
1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+10/2/11+



Teste 1 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;
- (III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

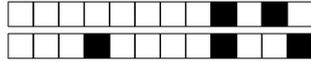
- (A) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (B) todas as afirmações são falsas.
- (C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (D) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- (E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- (A) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (B) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- (C) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (D) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (E) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



Teste 3 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

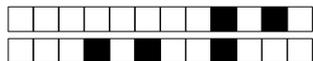
- A apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 4 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$
$$\text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$.
- B $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.
- C $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$.
- D T é injetora.
- E $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$.



Teste 5 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

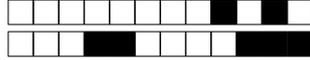
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 6 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- B para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- C para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- D para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- E se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.



Teste 7 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.



Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- 2.
- 1.
- π .
- $-\pi$.
- -1 .

Teste 10 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

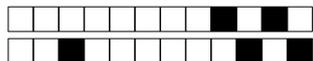
$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- -3 .
- 5 .
- 7 .
- 3 .
- -7 .



Teste 11 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- (A) todas as afirmações são verdadeiras.
- (B) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- (C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (E) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 12 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2), \\ v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- (A) $\frac{1}{15}$.
- (B) $\frac{4}{15}$.
- (C) 0.
- (D) $-\frac{2}{15}$.
- (E) $\frac{8}{15}$.



Teste 13 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

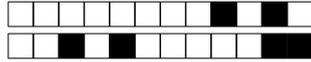
- A 1.
- B 2.
- C 6.
- D 4.
- 3.

Teste 14 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- A $\frac{1}{5}$.
- B $-\frac{1}{5}$.
- $\frac{3}{5}$.
- D 0.
- E $\frac{1}{2}$.



Teste 15 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

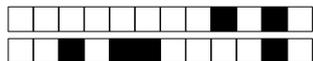
$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- A) 2.
- B) 5.
- C) 3.
- 1.
- E) 4.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.
- B) T é injetora.
- $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- D) T é sobrejetora.
- E) n é par.



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova – Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

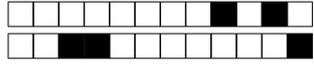
Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

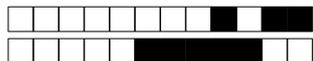
Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E



+10/12/1+



IDENTIFICAÇÃO

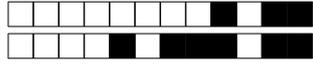
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+11/2/59+



Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

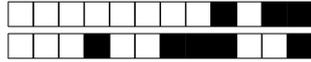
$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- E apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- B n é par.
- C T é injetora.
- D T é sobrejetora.
- E $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.



Teste 3 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores

$$\begin{aligned}v_1 &= (1, -1, 2, -3), & v_2 &= (1, 1, 3, 2), \\v_3 &= (1, -5, 0, 2) & \text{e } v_4 &= (1, 1, 1, 1)\end{aligned}$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A $\frac{1}{15}$.
- B $\frac{4}{15}$.
- C $-\frac{2}{15}$.
- D 0.
- $\frac{8}{15}$.

Teste 4 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

- A 4.
- B 6.
- C 1.
- D 2.
- 3.



Teste 5 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- A) 5.
- B) 4.
- C) 2.
- D) 1.
- E) 3.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

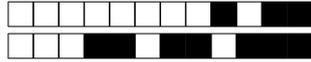
(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- A) todas as afirmações são falsas.
- B) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D) todas as afirmações são verdadeiras.
- E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.



Teste 7 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.
- B $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$.
- C T é injetora.
- D $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$.
- E $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \text{cos } x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- A $-\pi$.
- B 1.
- C π .
- D 2.
- E -1 .



Teste 9 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- $\frac{3}{5}$.
- 0 .
- $\frac{1}{2}$.
- $-\frac{1}{5}$.
- $\frac{1}{5}$.

Teste 10 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

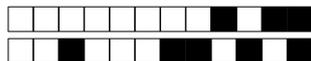
$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

- $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.



Teste 11 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Teste 12 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.
- para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.

Teste 13 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;
- (III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- todas as afirmações são falsas.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 15 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

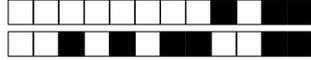
$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A) 7.
- B) 5.
- C) -7.
- D) 3.
- E) -3.



Teste 16 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C E

Teste 2: B C D E

Teste 3: A B C D

Teste 4: A B C D

Teste 5: A B C E

Teste 6: B C D E

Teste 7: A B C D

Teste 8: A B C E

Teste 9: B C D E

Teste 10: A B D E

Teste 11: B C D E

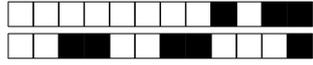
Teste 12: A B C D

Teste 13: B C D E

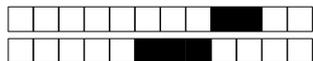
Teste 14: A C D E

Teste 15: A B D E

Teste 16: B C D E



+11/12/49+



MAT-3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP-USP — Primeira Prova — 29/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

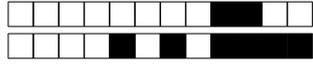
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

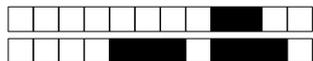
1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+12/2/47+



Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

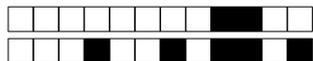
- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 2 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (II) é verdadeira.



Teste 3 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- A) 5.
- B) 1.
- C) 3.
- D) 2.
- E) 4.

Teste 4 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;
- (III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C) todas as afirmações são falsas.
- D) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Teste 5 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A) se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.
- B) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- C) para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.
- D) para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- E) para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.



Teste 6 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

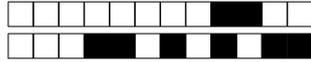
- 7.
- 3.
- 7.
- 3.
- 5.

Teste 7 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 2, -3), & v_2 &= (1, 1, 3, 2), \\ v_3 &= (1, -5, 0, 2) & \text{e } v_4 &= (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- $\frac{4}{15}$.
- $\frac{1}{15}$.
- $-\frac{2}{15}$.
- $\frac{8}{15}$.
- 0.



Teste 8 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- A $\frac{1}{2}$.
- B 0.
- C $-\frac{1}{5}$.
- D $\frac{3}{5}$.
- E $\frac{1}{5}$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- B apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D todas as afirmações são falsas.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



Teste 10 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

- A 1.
- B 3.
- C 6.
- D 2.
- E 4.

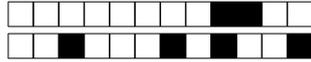
Teste 11 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são verdadeiras.



Teste 12 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$.
- B $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$.
- C $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$.
- D $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.
- E T é injetora.

Teste 13 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.
- B $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.
- C T é sobrejetora.
- D n é par.
- E T é injetora.



Teste 14 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 15 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

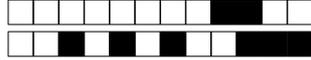
- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.



Teste 16 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \text{cos } x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- A π .
- B 1.
- C -1 .
- D $-\pi$.
- 2.



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova – Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

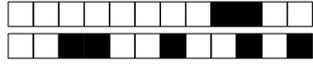
Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

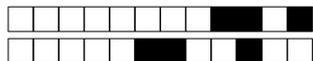
Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E



+12/12/37+



IDENTIFICAÇÃO

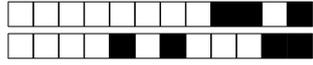
Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo.** Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!



+13/2/35+



Teste 1 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
- (III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\text{proj}_{[v,w]} x = \text{proj}_v x + \text{proj}_w x.$$

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- todas as afirmações são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 2 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

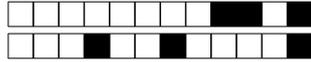
- (I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^\perp$;
- (II) para qualquer base \mathcal{B} de V e qualquer $x \in V$, se (x_1, x_2, \dots, x_n) denotarem as coordenadas de x na base \mathcal{B} , então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^\perp$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.



Teste 3 Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \text{cos } x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

- A -1.
- B 1.
- C π .
- D $-\pi$.
- 2.

Teste 4 Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (II) $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$;
- (III) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são falsas.
- apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- E apenas a afirmação (I) é verdadeira.



Teste 5 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

- (I) para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$ é linearmente independente;
- (II) para qualquer subespaço S de V , vale que $(S^\perp)^\perp \subset S$;
- (III) para qualquer subespaço S de V , vale que $V = S + S^\perp$.

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- B apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

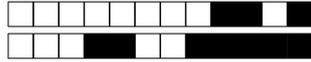
Teste 6 Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - t^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

- A $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.
- B $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$.
- $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$.
- D T é injetora.
- E $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(\text{Ker}(T))$.



Teste 7 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^t,$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $(\text{Im}(T))^\perp$ é igual a:

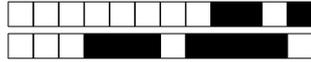
- A) 6.
- B) 1.
- C) 2.
- D) 3.
- E) 4.

Teste 8 Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a + bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4 , então $a + b$ será igual a:

- A) 0.
- B) $-\frac{1}{5}$.
- C) $\frac{1}{2}$.
- D) $\frac{3}{5}$.
- E) $\frac{1}{5}$.



Teste 9 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

então uma base para S^\perp será:

- A $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- B $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- C $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- D $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.
- E $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Teste 10 Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2})q(-\sqrt{2}) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3})q(\sqrt{3}),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

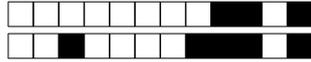
(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Assinale a alternativa correta:

- A apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B todas as afirmações são verdadeiras.
- C apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- E todas as afirmações são falsas.



Teste 11 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- (II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;
- (III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

- A) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- B) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- C) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- D) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 12 Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \text{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\text{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X , isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X . Temos que a dimensão de $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a:

- A) 4.
- B) 5.
- C) 1.
- D) 2.
- E) 3.



Teste 13 Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

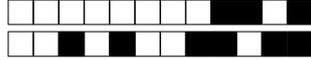
$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

- A 7.
- B 5.
- C 3.
- D -3.
- 7.

Teste 14 Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- A para qualquer subespaço S de V , qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de S^\perp , vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente.
- B se a dimensão de V for finita e igual a n , então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \text{proj}_{e_1} x + \text{proj}_{e_2} x + \dots + \text{proj}_{e_n} x$.
- para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $S^\perp \subset W^\perp$.
- D para quaisquer subespaços S e W de V , se $S \subset W$, então $W^\perp \subset S^\perp$.
- E para qualquer subespaço S de V , qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^\perp$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$.



Teste 15 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores

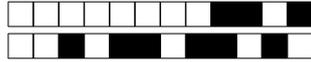
$$\begin{aligned}v_1 &= (1, -1, 2, -3), & v_2 &= (1, 1, 3, 2), \\v_3 &= (1, -5, 0, 2) & \text{e } v_4 &= (1, 1, 1, 1)\end{aligned}$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

- A $\frac{8}{15}$.
- B $\frac{4}{15}$.
- C $\frac{1}{15}$.
- D $-\frac{2}{15}$.
- E 0.

Teste 16 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

- A T é injetora.
- B n é par.
- C T é sobrejetora.
- D $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$.
- E $\text{Im}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.



2019 – MAT-3458 – Primeira Prova– Folha de Respostas

Nome: _____ NUSP: _____ Turma: _____

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a primeira coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Teste 1: A B C D E

Teste 2: A B C D E

Teste 3: A B C D E

Teste 4: A B C D E

Teste 5: A B C D E

Teste 6: A B C D E

Teste 7: A B C D E

Teste 8: A B C D E

Teste 9: A B C D E

Teste 10: A B C D E

Teste 11: A B C D E

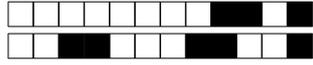
Teste 12: A B C D E

Teste 13: A B C D E

Teste 14: A B C D E

Teste 15: A B C D E

Teste 16: A B C D E



+13/12/25+