Q1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;

(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Resposta: O grau do polinômio característico coincide com a dimensão do espaço vetorial. Logo (II) é verdadeira.

Como o polinômio característico é $p_T(t) = t^{754}$ temos que o único autovalor é o número real 0 (zero). Que T seja diagonalizável, implica que existe uma base $\mathcal{D} = \{u_1, \ldots, u_{754}\}$ de V tal que $T(u_i) = 0 \cdot u_i = 0$ para cada $i = 1, \ldots, 754$. Isso implica que T é o operador nulo pois se $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{754} \alpha_i u_i$ para alguns números reais $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Então

$$T(v) = T(\sum_{i=1}^{754} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{754} \alpha_i T(u_i) = 0.$$

Logo (I) é verdadeiro.

Como T é o operador nulo, temos que para cada base $\mathcal{B}$ de V, $[T]_{\mathcal{B}}$ é a matriz quadrada nula de tamanho 754 e portanto diagonalizável. É claro que existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V. Por exemplo seja $v \neq 0$, e considere para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ o vetor av. Como $av \neq 0$, existe uma base de V da forma $\{u_1, \ldots, u_{754}\}$ com $u_1 = av$. Assim (III) também é verdadeira.

Logo (I), (II) e (III) são verdadeiras.

Q2. Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são falsas;
(e) todas as afirmações são verdadeiras.

Resposta: Se $n > 988$, observa que a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ tem n colunas, e que as colunas são vetores de $\mathbb{R}^{988}$. Logo não podem ser linearmente independentes, pois $\mathbb{R}^{988}$ tem dimensão 988. Logo (I) é falsa.

Observa que $[T]_{\mathcal{B}}^2 = [T]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = [T \circ T]_{\mathcal{B}}$. Agora, se $j \geq 2$, temos que $(T \circ T)(e_j) = T(T(e_j)) = T(0) = 0$. E se $j = 1$, temos que $(T \circ T)(e_1) = T(T(e_1)) = T(e_2) = 0$. Logo $[T \circ T]_{\mathcal{B}} = 0$. E (II) é verdadeira.

Outra forma de verificar que (II) é verdadeira. Observa que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Então é fácil ver que $[T]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = 0$.

A afirmação (III) é falsa, pois por exemplo, o operador linear nulo ($u \mapsto 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^{988}$) é diagonalizável.

Q3. Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

(a) -52;
(b) 52;
(c) $\frac{65}{8}$;
(d) $\frac{63}{8}$;
(e) 6.

Resposta: Seja $\mathcal{H} = (1, t, t^2)$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$. Temos que

$$[I]_{\mathcal{BH}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [I]_{\mathcal{CH}} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo $[I]_{\mathcal{BC}} = [I]_{\mathcal{HC}}[I]_{\mathcal{BH}} = [I]_{\mathcal{CH}}^{-1}[I]_{\mathcal{BH}}$. Agora

$$[I]_{\mathcal{CH}}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} [I]_{\mathcal{BC}} = [I]_{\mathcal{CH}}^{-1}[I]_{\mathcal{BH}} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 22 & -3 \\ 5 & -51 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E a soma dos elementos da diagonal principal é -52.

Q4. Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$;
(b) T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$;
(c) T é injetora;
(d) T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$;
(e) $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Resposta: A imagem de T está gerada pela imagem de qualquer base de $P_2(\mathbb{R})$. Como $P_2(\mathbb{R})$ tem dimensão 3, T será injetora se, e somente se, a imagem de T tem dimensão 3.

As coordenadas (em relação à base $\mathcal{C}$) da imagem da base $\mathcal{B}$ vem dadas pelas colunas da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$. Por tanto é suficiente ver, quais são as condições para que as colunas de $[T]_{\mathcal{BC}}$ sejam l. i.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & a & 1 \\ b & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a+4 & 1 \\ 0 & 1-b & -2b & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a+4 & 1 \\ 0 & 0 & ab-a+2b-4 & b-2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a+4 & 1 \\ 0 & 0 & a(b-1)+2(b-2) & b-2 \end{pmatrix}$$

Claramente, se $b \neq 2$, os três vetores são l.i. Quando $b = 2$, os vetores são l.i. se, e somente se, $a \neq 0$.

Assim T é injetora se, e somente se, $a \neq 0$ ou $b \neq 2$.

Outro jeito de fazer o exercício é encontrar condições para que $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Isso é equivalente a provar que o sistema homogêneo com matriz de coeficientes

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

so tenha a solução trivial (i.e. não tenha variáveis livres.) Assim

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 0 & 1 & 1-b \\ 0 & a+4 & -2b \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & -2b+a+4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

De novo, se, e somente se, $a \neq 0$ ou $b \neq 2$.

Q5. Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **NÃO** é necessariamente verdadeira:

(a) para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B;

(b) para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B;

(c) as matrizes transpostas A^{t} e B^{t} são semelhantes;

(d) as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$;

(e) as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.

Solução: Se as matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são semelhantes, então $A = M^{-1}BM$ para alguma matriz inversível $M \in M_n(\mathbb{R})$. Segue

$$p_A(t) = det(A - tI) = det(M^{-1}BM - tI) = det(M^{-1}(B - tI)M) = \\ detM^{-1}det(B - tI)detM = det(B - tI) = p_B(t).$$

As raizes de $p_A(t)$ são autovalores de A. Assim obtemos que as alternativas (b) e (e) são verdadeiras.

Se $A = M^{-1}BM$, então $A^2 = M^{-1}BM\,M^{-1}BM = M^{-1}B^2M$, repetindo $A^k = M^{-1}B^kM$ para todo $k \geq 1$. Logo A^k e B^k são semelhantes, a alternativa (d) é verdadeira.

Se $A = M^{-1}BM$, então $\mathrm{t}A = \mathrm{t}(M^{-1}BM) = \mathrm{t}M\mathrm{t}B\mathrm{t}(M^{-1})$. De $MM^{-1} = I$ segue que $\mathrm{t}(M^{-1})\mathrm{t}M = \mathrm{t}I = I$, logo $\mathrm{t}(M^{-1}) = (\mathrm{t}M)^{-1}$ e alternativa (c) é verdadeira.

As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

são semelhantes. O vetor $(1, 0)$ é autovetor de A com autovalor 1 mas não é autovetor de B. Então a alternativa (a) não é necessariamente verdadeira.

Q6. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$;

(b) A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$;

(c) A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$;

(d) A não é diagonalizável;

(e) se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.

Solução: O polinômio característico de A é $p_A(t) = (a - t)^2(2 - t)$. Calculamos $Ker(A - aI)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2-a & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-a-1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim Ker(A - aI) = 2$, se, e somente se, $a = 1$, logo A é diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.

Q7. Considere a base
$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$
de $P_2(\mathbb{R})$, a base
$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$
de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que
$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$
e:
$$[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

(a) 10;
(b) -30;
(c) -10;
(d) 30;
(e) -3.

Solução: De $[S \circ T]_{\mathcal{BC}} = [S]_{\mathcal{BC}}[T]_{\mathcal{BB}}$ segue que
$$det([S \circ T]_{\mathcal{BC}}) = det([S]_{\mathcal{BC}})det([T]_{\mathcal{B}}).$$
Usando que $det([T]_{\mathcal{D}}) = det([T]_{\mathcal{B}})$ e
$$[S]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
obtemos
$$det[T]_{\mathcal{D}} = \frac{det([S \circ T]_{\mathcal{BC}})}{det[S]_{\mathcal{BC}}} = \frac{-30}{-3} = 10.$$

Q8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

(a) $(9,8,5)$;
(b) $(7,7,6)$;
(c) $(8,5,9)$;
(d) $(5,11,13)$;
(e) $(10,6,8)$.

Solução:. Do fato que $M^{-1}[T]_{\text{can}}M$ é a matriz diagonal com as entradas 1, 2 e 3 segue que $(1,0,1)$ é autovetor com autovalor 1, $(0,1,1)$ é autovetor com autovalor 2, $(1,1,0)$ é autovetor com autovalor 3. Sabendo que

$$(5,3,4) = 3(1,0,1) + 1(0,1,1) + 2(1,1,0)$$

obtemos

$$T(5,3,4) = 3T(1,0,1) + T(0,1,1) + 2T(1,1,0) =$$
$$3(1,0,1) + 2(0,1,1) + 6(1,1,0) = (9,8,5).$$

Q9. Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(d) todas as afirmações são falsas;
(e) todas as afirmações são verdadeiras.

Solução: A matriz A é diagonalizável, então todas as raizes de polinômio característico $p_A(t)$ são reais, logo A é semelhante a uma matriz diagonal D cujos elementos na diagonal são as raizes de $p_A(t)$. Como B possui o mesmo polinômio característico e é diagonalizável, B é semelhante a mesma matriz D. Logo as matrizes A e B são semelhantes. A afirmação (I) é verdadeira.

Seja $A \in M_2(R)$ matriz não simétrica diagonalizável, então A é semelhante à matriz B diagonal simétrica. Então a afirmação (II) é falsa. O exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A afirmação (II) é falsa.

Para quaisquer $u, v \in V$

$$\langle (T \circ S + S \circ T)(u), v \rangle = \langle T(S(u)), v \rangle + \langle S(T(u)), v \rangle = \langle S(u), T(v) \rangle + \langle T(u), S(v) \rangle = \langle u, S(T(v)) \rangle + \langle u, T(S(v)) \rangle = \langle u, (T \circ S + S \circ T)(v) \rangle.$$

Logo o operador $T \circ S + S \circ T$ é simétrico. A afirmação (III) é correta.

Q10. Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

(a) se $a < 0$, então T não será diagonalizável;
(b) se $a = 4$, então T será diagonalizável;
(c) T é injetor;
(d) $\dim\bigl(\mathrm{Ker}(T)\bigr) \geq 2$;
(e) se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.

Solução: $p_T(t) = -t(t^2 - a)(t^2 - 4)$ possui todas raizes reais se e somente se $a \geq 0$. Logo se $a < 0$ T não é diagonalizável, a alternativa (a) é correta. Como $t = 0$ é raiz de $p_T(t)$ de multiplicidade 1, $\dim KerT = 1$, então as alternativas (c) e (d) são falsas. Caso $a = 4$ operador T é diagonalizável se e somente se $\dim Ker(T - 2I) = 2$ e $\dim Ker(T + 2I) = 2$, logo as alternativas (b) e (e) são falsas.

Q11. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) T é simétrico e S não é simétrico;
(b) T e S são ambos simétricos;
(c) nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes;
(d) nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes;
(e) S é simétrico e T não é simétrico.

Solução:

$$T(2,1) = 5(1,1) = (5,5) = 3(2,1) - (1,-2)$$
$$T(1,-2) = -\tfrac{5}{2}(1,1) + \tfrac{5}{2}(1,-1) = (0,-5) = -(2,1) + 2(1,-2).$$

Como $\|(2,1)\| = \|(1,-2)\| = \sqrt{5}$, $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)\}$ é uma base ortonormal e

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Obtemos que T é simétrico. Analogamente

$$S(1,1) = 2(2,1) - (1,-2) = (3,4) = \tfrac{7}{2}(1,1) - \tfrac{1}{2}(1,-1)$$
$$S(1,-1) = -(1,-2) = (-1,2) = \tfrac{1}{2}(1,1) - \tfrac{3}{2}(1,-1)$$

Again $\|(1,1)\| = \|(1,-1)\| = \sqrt{2}$, $\mathcal{C}' = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\}$ é uma base ortonormal e

$$[S]_{\mathcal{C}'} = [S]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Obtemos que S não é simétrico.

Q12. Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;

(b) todas as afirmações são verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Resposta: (I) é falsa pois por exemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tem o mesmo determinante mas não são semelhantes. Se fossem semelhantes, A seria diagonalizável.

(II) Como 55 e 99 são autovalores, temos que 55 e 99 são raízes do polinômio característico de T. Observa que a multiplicidade geométrica de 55 é 1776. Assim a multiplicidade algébrica de 55 é maior o igual. Mas como 99 é raiz do polinômio característico, temos que a multiplicidade algébrica de 55 tem que ser exatamente 1776 e portanto a multiplicidade algébrica de 99 tem que ser exatamente 1. Logo o polinômio característico de T é $p_T(t) = (t-55)^{1776}(t-99)$ e as multiplicidades algébricas e geométricas de todas as raízes de $p_T(t)$ coincidem. Resumindo, (II) é verdadeira.

Outro jeito de fazer o exercício. Seja $(u_1, \ldots, u_{1776})$ uma base de $\mathrm{Ker}(T - 55\mathrm{I})$. Como 99 é autovalor de T, existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $T(v) = 99v$. Por teoria sabemos que $\mathcal{D} = (u_1, \ldots, u_{1776}, v)$ é l.i. e portanto uma base de V. Agora $T(u_i) = 55u_i$ e $T(v) = 99v$, isso implica que $[T]_{\mathcal{D}}$ é diagonal.

(III) Observa que o polinômio característico da matriz é $(77-t)^3$ mas

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix} - 77I = \begin{pmatrix} 0 & 43 & 0 \\ 0 & 0 & 43 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o que implica que a multiplicidade geométrica de 77 é 1. Como a multiplicidade algébrica de 77 é 3, e portanto diferente de 1, temos que a matriz não é diagonolizável. Assim (III) é falsa.

Q13. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

(a) $2 - 2^{333}$;
(b) 2^{334};
(c) $1 - 2^{333}$;
(d) $1 + 2^{334}$;
(e) -2^{333}.

Solução: O conjunto $\mathcal{C} = \{1+t, 1-t^2, 1+t+t^2\}$ forma base de autovetores de T. Temos $[T]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{CB}}[T]_{\mathcal{C}}[I]_{\mathcal{BC}}$ com

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [I]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz $[I]_{\mathcal{BC}}$ é a inversa de matriz $[I]_{\mathcal{CB}}$, então

$$[I]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$[T]_{\mathcal{B}}^{333} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{333} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{333} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando obtemos que as entradas $a = 1$ e $d = 1 - 2^{333}$, então $a + d = 2 - 2^{333}$.

Q14. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

(a) $(14x - 8y, 34x - 18y)$;
(b) $(14x - 20y, 10x - 18y)$;
(c) $(7x - 4y, 17x - 9y)$;
(d) $(7x - 10y, 5x - 9y)$;
(e) $(28x - 16y, 20x - 36y)$.

Resposta: De $S(x,y) = (x+y, x+2y)$ obtemos que

$$[S]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

obtemos que $(1,2)$ é autovetor de $\frac{1}{2}T+S$ associado a 2 e $(-1,-3)$ é autovetor de $\frac{1}{2}T+S$ associado a -1. Logo $\mathcal{D} = ((1,2),(-1,-3))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e

$$\big[\tfrac{1}{2}T + S\big]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como os dados pedido estão expressos na base canônica e S também, é melhor expressar $\frac{1}{2}T + S$ na base canônica também. Assim temos que

$$\big[\tfrac{1}{2}T + S\big]_{\text{can}} = [I]_{\mathcal{D}\text{can}} \big[\tfrac{1}{2}T + S\big]_{\mathcal{D}} [I]_{\text{can}\mathcal{D}} = [I]_{\mathcal{D}\text{can}} \big[\tfrac{1}{2}T + S\big]_{\mathcal{D}} [I]_{\mathcal{D}\text{can}}^{-1}.$$

Agora $[I]_{\mathcal{D}\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ e $[I]_{\mathcal{D}\text{can}}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Portanto

$$\big[\tfrac{1}{2}T + S\big]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{pmatrix}$$

Por outro lado, $\big[\frac{1}{2}T + S\big]_{\text{can}} = \frac{1}{2}[T]_{\text{can}} + [S]_{\text{can}}$ e portanto,

$$[T]_{\text{can}} = 2(\big[\tfrac{1}{2}T + S\big]_{\text{can}} - [S]_{\text{can}}).$$

Assim,

$$[T]_{\text{can}} = 2\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ 34 & -18 \end{pmatrix}.$$

Isso implica que $T(x,y) = (14x - 8y\,,\, 34x - 18y)$.

Q15. Considere a base
$$\mathcal{B} = \{(1,77,45),(0,9,33),(0,0,877)\}$$
de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:
$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Assinale a alternativa correta:

(a) T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$;
(b) T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$;
(c) T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1;
(d) T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5;
(e) T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.

Resposta: Os autovalores de T são as raízes reais do polinômio característico. Vamos calcular o polinômio característico $p_T(t)$ de T. Assim
$$p_T(t) = \det\begin{pmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 3 & 1-t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2-t & -2+t & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 3 & 1-t \end{pmatrix}$$
$$= (2-t)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 3 & 1-t \end{pmatrix} = (2-t)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 4 & 1-t \end{pmatrix}$$
$$= (2-t)\det\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 4 & 1-t \end{pmatrix} = (2-t)(t^2-3t-2).$$
Logo os autovalores são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Como o polinômio característico tem grau 3 e tem três raízes reais diferentes (multiplicidade algébrica 1), temos que T é diagonalizável.

Q16. Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$;
(b) $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$;
(c) $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$;
(d) $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$;
(e) $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.

Resposta: Sejam $\mathcal{H} = (1, t, t^2)$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = ((1,2),(2,3))$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e can a base canônica de $\mathbb{R}^2$. De

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

obtemos que

$$[S]_{\mathcal{B}\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

obtemos que $[T]_{\mathcal{H}\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Assim temos que

$$[T \circ S]_{\mathcal{H}\mathrm{can}} = [T]_{\mathcal{H}\mathrm{can}}[S]_{\mathcal{B}\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, estamos dizendo que $(T \circ S)(1,2) = (0,0)$ e $(T \circ S)(2,3) = (1,-2)$. Logo $\mathrm{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ pois tem dimensão 1. E $\mathrm{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.