CORRECTED

Teste 1 Sejam $a \in \mathbb{R}$, V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -(t^3 - at)(t^2 - 4).$$

Pode-se afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ T é injetor.
- ■ se $a < 0$, então T não será diagonalizável.
- $\boxed{\text{C}}$ se $a \geq 4$, então T será diagonalizável.
- $\boxed{\text{D}}$ se $a = 4$, então T será diagonalizável.
- $\boxed{\text{E}}$ $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.

Teste 2 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- $\boxed{\text{A}}$ T é injetora.
- $\boxed{\text{B}}$ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ e $a \neq 0$.
- $\boxed{\text{C}}$ T será injetora se, e somente se, $b \neq 3$ e $a \neq 1$.
- $\boxed{\text{D}}$ $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.
- ■ T será injetora se, e somente se, $b \neq 2$ ou $a \neq 0$.

Teste 3 Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2, 1 - 7t + t^2, t + t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{7 + 2t, 3 + t, t^2\}.$$

Denotando por $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação identidade, teremos que a soma dos elementos na diagonal principal da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{BC}}$ será igual a:

- ■ -52.
- $\boxed{\text{B}}$ $\frac{65}{8}$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\frac{63}{8}$.
- $\boxed{\text{D}}$ 6.
- $\boxed{\text{E}}$ 52.

Teste 4 Considere a base
$$\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$$
de $P_2(\mathbb{R})$, a base
$$\mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$
de $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{D} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ e $S : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$S(1) = (2,2,2), \quad S(t+1) = (3,5,2), \quad S(t^2+t+1) = (2,1,1)$$

e:
$$[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{D}}$ é igual a:

■ 10.
[B] -30.
[C] -10.
[D] 30.
[E] -3.

Teste 5 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

[A] A não é diagonalizável.
[B] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 2$.
[C] se $a \neq 2$, então A será diagonalizável.
■ A será diagonalizável se, e somente se, $a = 1$.
[E] A será diagonalizável se, e somente se, $a = 0$.

Teste 6 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{(2,1),(1,-2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T e S são ambos simétricos.
- B nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes.
- ■ T é simétrico e S não é simétrico.
- D nem T nem S são simétricos e as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ não são semelhantes.
- E S é simétrico e T não é simétrico.

Teste 7 Sejam n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação que **Não** é necessariamente verdadeira:

- A as matrizes A^k e B^k são semelhantes, para todo inteiro $k \geq 1$.
- B para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se λ for um autovalor de A, então λ será um autovalor de B.
- C as matrizes transpostas A^t e B^t são semelhantes.
- D as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico.
- ■ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, se v for um autovetor de A, então v será um autovetor de B.

Teste 8 Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [1 + t, 1 - t^2] \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [1 + t + t^2],$$

em que $\mathrm{I} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ denota a transformação identidade. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se

$$[T^{333}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então $a + d$ será igual a:

- A -2^{333}.
- B $1 - 2^{333}$.
- C 2^{334}.
- ■ $2 - 2^{333}$.
- E $1 + 2^{334}$.

Teste 9 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes diagonalizáveis e os polinômios característicos de A e B forem iguais, então A e B serão semelhantes;

(II) se n for um inteiro positivo, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes semelhantes e A for simétrica, então B será simétrica;

(III) se V for um espaço vetorial munido de um produto interno e se $T : V \to V$ e $S : V \to V$ forem operadores lineares simétricos, então o operador $T \circ S + S \circ T$ será simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- ■ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- C todas as afirmações são verdadeiras.
- D apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- E todas as afirmações são falsas.

Teste 10 Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 77, 45), (0, 9, 33), (0, 0, 877)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- ■ T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
- C T é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 5.
- D T é diagonalizável e os autovalores de T são 2, $\sqrt{17}$ e $-\sqrt{17}$.
- E T não é diagonalizável e os autovalores de T são 2 e 1.

Teste 11 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear sobrejetora, $\mathcal{B}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$, então as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ serão linearmente independentes;

(II) se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{988}\}$ for uma base de $\mathbb{R}^{988}$ e $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for a transformação linear tal que $T(e_1) = e_2$ e $T(e_j) = 0$ para todo $j = 2, 3, \ldots, 988$, então $\big([T]_{\mathcal{B}}\big)^2 = 0$;

(III) se $T : \mathbb{R}^{988} \to \mathbb{R}^{988}$ for uma transformação linear diagonalizável, então a matriz que representa T na base canônica terá determinante não nulo.

Assinale a alternativa correta:

- A todas as afirmações são verdadeiras.
- B todas as afirmações são falsas.
- ■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- D apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- E apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Teste 12 Seja $S : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$S(1,2) = 1 + t + t^2 \quad \text{e} \quad S(2,3) = -t + t^2$$

e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a - b, b - c),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

A $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(3,-2)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(2,3)]$.

B $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(0,0)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(0,1),(0,-2)]$.

■ $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(1,2)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

D $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(-3,-4)]$.

E $\operatorname{Ker}(T \circ S) = [(1,0)]$ e $\operatorname{Im}(T \circ S) = [(1,-2)]$.

Teste 13 Considere as seguintes afirmações:

(I) se n for um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ forem matrizes com o mesmo determinante, então A e B serão semelhantes;

(II) se V for um espaço vetorial tal que $\dim(V) = 1777$, $\mathrm{I} : V \to V$ denotar a transformação identidade e $T : V \to V$ for uma transformação linear tal que 55 e 99 sejam autovalores de T e tal que $\dim\big(\operatorname{Ker}(T - 55\mathrm{I})\big) = 1776$, então T será diagonalizável;

(III) a matriz

$$\begin{pmatrix} 77 & 43 & 0 \\ 0 & 77 & 43 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

■ apenas a afirmação (II) é verdadeira.

B todas as afirmações são verdadeiras.

C apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

D apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

E apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 14 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares tais que

$$(1,2) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S - 2\mathrm{I}\big), \quad (-1,-3) \in \operatorname{Ker}\big(\tfrac{1}{2}T + S + \mathrm{I}\big)$$

e $S(x,y) = (x+y, x+2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $\mathrm{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota a transformação identidade. Dados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y)$ é igual a:

- [A] $(14x - 20y, 10x - 18y)$.
- [B] $(7x - 4y, 17x - 9y)$.
- [C] $(7x - 10y, 5x - 9y)$.
- [D] $(28x - 16y, 20x - 36y)$.
- ■ $(14x - 8y, 34x - 18y)$.

Teste 15 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(5,3,4)$ é igual a:

- [A] $(5,11,13)$.
- [B] $(8,5,9)$.
- [C] $(10,6,8)$.
- ■ $(9,8,5)$.
- [E] $(7,7,6)$.

Teste 16 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^{754}$ e considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é nulo;

(II) $\dim(V) = 754$;

(III) existem infinitas bases $\mathcal{B}$ de V tais que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal.

Assinale a alternativa correta:

- [A] apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- ■ todas as afirmações são verdadeiras.
- [C] apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- [D] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- [E] apenas a afirmação (II) é verdadeira.