Q1. Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P(\mathbb{R})$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a+bt$ seja o elemento do subespaço $[1, t]$ mais próximo de t^4, então $a + b$ será igual a:

(a) $\frac{3}{5}$;
(b) $\frac{1}{5}$;
(c) $\frac{1}{2}$;
(d) 0;
(e) $-\frac{1}{5}$.

Q2. Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-\sqrt{2}\,)q(-\sqrt{2}\,) + p(0)q(0) + p(\sqrt{3}\,)q(\sqrt{3}\,),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' + 2yy',$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são falsas;
(b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q3. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$v_1 = (1, -1, 2, -3), \quad v_2 = (1, 1, 3, 2),$$
$$v_3 = (1, -5, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

obtemos os vetores ortogonais $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Se $w_4 = (a, b, c, 0)$, então $a + b + c$ será igual a:

(a) $\frac{8}{15}$;
(b) $\frac{1}{15}$;
(c) $\frac{4}{15}$;
(d) 0;
(e) $-\frac{2}{15}$.

Q4. Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que os vetores x e y serão linearmente dependentes se, e somente se, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$;
(II) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\|x + y\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y\|$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = -y$;
(III) para quaisquer $x, v, w \in V$, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então:

$$\mathrm{proj}_{[v,w]}\, x = \mathrm{proj}_v\, x + \mathrm{proj}_w\, x.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q5. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } -a + 2b + c = 0\}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ forem tais que $S^\perp = [4 + \alpha t + \beta t^2]$, então $\alpha + \beta$ será igual a:

(a) -7;
(b) -3;
(c) 3;
(d) 7;
(e) 5.

Q6. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T : V \to V$ uma transformação linear não nula tal que $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\text{Im}(T)\big) = 2$;
(II) $\dim\big(\text{Ker}(T)\big) = \dim\big(\text{Im}(T)\big)$;
(III) $\dim\big(\text{Im}(T)\big) = 1$;

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(c) todas as afirmações são falsas;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q7. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = 1 - t^2, \quad T\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = t, \quad T\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Big) = -1 + t^2,$$

$$\text{e} \qquad T\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big) = 1 + t - t^2.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\big(\text{Ker}(T)\big) = 2$;
(b) $\dim\big(\text{Ker}(T)\big) = 1$;
(c) $\dim\big(\text{Ker}(T)\big) = 3$;
(d) T é injetora;
(e) $\dim\big(\text{Im}(T)\big) < \dim\big(\text{Ker}(T)\big)$.

Q8. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Se

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

então uma base para $S^{\perp}$ será:

(a) $\left\{\left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$;

(b) $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$;

(c) $\left\{\left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$;

(d) $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)\right\}$;

(e) $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)\right\}$.

Q9. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote por n a dimensão de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Pode-se afirmar que:

(a) $\mathrm{Im}(T) = \big\{x \in V : T(x) = x\big\}$;

(b) T é injetora;

(c) T é sobrejetora;

(d) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$;

(e) n é par.

Q10. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de V com $S \neq V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in S$, então $x - y \in S^{\perp}$;

(II) para qualquer base $\mathcal{B}$ de V e qualquer $x \in V$, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotarem as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$, então:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ;$$

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $\langle x, y \rangle = 0$ e $y \in S^{\perp}$, então $x \in S$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q11. Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $S^{\perp} \subset W^{\perp}$;

(b) para quaisquer subespaços S e W de V, se $S \subset W$, então $W^{\perp} \subset S^{\perp}$;

(c) para qualquer subespaço S de V, qualquer $x \in S$ e qualquer $y \in S^{\perp}$, se $x + y = 0$, então $x = y = 0$;

(d) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $A \cup B$ é linearmente independente;

(e) se a dimensão de V for finita e igual a n, então para qualquer base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V e para qualquer $x \in V$ valerá que $x = \operatorname{proj}_{e_1} x + \operatorname{proj}_{e_2} x + \cdots + \operatorname{proj}_{e_n} x$.

Q12. Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $x, y \in V$, vale que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$;

(II) para quaisquer $x, y \in V$, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então o conjunto $\{x, y, x + y\}$ será linearmente dependente;

(III) para quaisquer $x, y \in V$, se $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q13. Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}\big([-\pi, \pi]\big)$ formado por todas as funções contínuas de $[-\pi, \pi]$ em $\mathbb{R}$ munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}\big([-\pi, \pi]\big)$. Sejam $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}\big([-\pi, \pi]\big)$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g_1(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g_2(x) = \cos x,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que o valor da expressão

$$\|f - ag_1 - bg_2\|$$

seja mínimo, então $a + b$ será igual a:

(a) 2;

(b) π;

(c) 1;

(d) $-\pi$;

(e) -1.

Q14. Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, e a transformação linear $T : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(X) = \mathrm{tr}(X),$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço da matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

(a) 1;
(b) 2;
(c) 3;
(d) 4;
(e) 5.

Q15. Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, em que $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Seja $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(X) = X + X^{\mathrm{t}},$$

para qualquer $X \in M_3(\mathbb{R})$. Temos que a dimensão de $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$ é igual a:

(a) 3;
(b) 2;
(c) 4;
(d) 1;
(e) 6.

Q16. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e maior do que 3 munido de um produto interno e considere as seguintes afirmações:

(I) para qualquer subespaço S de V, qualquer subconjunto linearmente independente A de S e qualquer subconjunto linearmente independente B de $S^{\perp}$, vale que o conjunto $\{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ é linearmente independente;

(II) para qualquer subespaço S de V, vale que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$;

(III) para qualquer subespaço S de V, vale que $V = S + S^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;

(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.