CORRECTED

MAT–3458 — Álgebra Linear para Engenharia II — EP–USP — Prova Sub. — 05/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando a última coluna em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A A é semelhante a C e B não é semelhante a C.
- B não há duas matrizes distintas semelhantes em $\{A, B, C\}$.
- ■ A é semelhante a B e B não é semelhante a C.
- D A é semelhante a B e B é semelhante a C.
- E B é semelhante a C e A não é semelhante a C.

Teste 2 Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que o polinômio característico de A é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Temos que A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se:

- A $a = 1$.
- B $a = -1$.
- C $a \neq 0$.
- D $a \neq 1$.
- ■ $a = 0$.

Teste 3 Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $v \in V$, $w \in W$ e $z \in W^{\perp}$, se $v = w + z$, então w será igual à projeção ortogonal de v em W;

(II) se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de W e se aplicarmos o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à base $\mathcal{B}$, então o resultado obtido será a própria base $\mathcal{B}$;

(III) se $\dim(V) = 555$ e se $T : V \to V$ for um operador linear tal que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 450$, então $\mathrm{Im}(T)$ estará contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- $\boxed{\text{A}}$ apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{B}}$ apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- $\boxed{\text{C}}$ todas as afirmações são verdadeiras.
- ■ apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- $\boxed{\text{E}}$ apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Teste 4 Sejam a e b números reais, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que T será injetora se, e somente se:

- $\boxed{\text{A}}$ $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
- $\boxed{\text{B}}$ $a \neq 1$ e $b = 2$.
- $\boxed{\text{C}}$ $a \neq 0$ e $b = 1$.
- ■ $a \neq 0$ ou $b \neq 1$.
- $\boxed{\text{E}}$ $a \neq 1$ ou $b \neq 2$.

Teste 5 Assinale a alternativa correta:

[redacted] existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições é diagonalizável.

B existe um único operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, o único operador T satisfazendo essas duas condições não é diagonalizável.

C existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, nenhum desses operadores é diagonalizável.

D existem infinitos operadores lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$ e, além do mais, apenas um desses operadores é diagonalizável.

E existem infinitos operadores lineares diagonalizáveis $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tais que $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a $[t, t^2]$ e $T(1 + t + t^2) = 2 + 3t + 99t^2$.

Teste 6 Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial real de dimensão 2 munido de um produto interno, $T : V \to V$ for um operador linear simétrico, $v \neq 0$ for um autovetor de T e $w \in V$ for um vetor não nulo ortogonal a v, então w será um autovetor de T;

(II) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 2 + i)$ for um autovetor de T, então $(1 - i, 2 - i)$ também será um autovetor de T;

(III) se $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for um operador linear e $(1 + i, 1 + i)$ for um autovetor de T, então $(1, 1)$ também será um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta:

A todas as afirmações são verdadeiras.

B apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

[redacted] apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

E apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Teste 7 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que a projeção ortogonal de (x, y, z) no subespaço $[(1, 1, 2), (2, 0, 2)]$ é igual a:

A $\frac{1}{3}(4x + y - z, -x + 2y + z, 2x + 2y + z)$.

[redacted] $\frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$.

C (x, y, z).

D $\frac{1}{3}(x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

E $\frac{1}{3}(4x + y - z, x + 4y - z, -x - y + 4z)$.

Teste 8 Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $P_3(\mathbb{R})$ dadas por:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}.$$

Assinale a alternativa correta:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t, t^3]$.

$\boxed{\text{B}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1-t+t^2-t^3, 1+t-t^2-t^3]$.

[redacted] $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$.

$\boxed{\text{D}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [t-t^2+t^3, -t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$.

$\boxed{\text{E}}$ $\mathrm{Ker}(T) = [1+t, 1+t+t^2+t^3]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1+t+t^2, t-t^3]$.

Teste 9 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Assuma que

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

e que zero seja uma raiz do polinômio característico de T de multiplicidade 2. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

$\boxed{\text{A}}$ $(3,3,3)$.

$\boxed{\text{B}}$ $(1,1,1)$.

[redacted] $(6,6,6)$.

$\boxed{\text{D}}$ $(3,6,9)$.

$\boxed{\text{E}}$ $(4,4,4)$.

Teste 10 Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\mathcal{C} = \{798 + 991t, 11 + 7777t\}$$

de $P_1(\mathbb{R})$. Sejam $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ as transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{EC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{E}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se $H = T \circ (2S)$, então:

- [A] $H(x,y) = (-4y, 8x + 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [B] $H(x,y) = (-4y, 8x - 16y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [C] $H(x,y) = (-16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- [D] $H(x,y) = (8x - 16y, -16x - 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- ■ $H(x,y) = (16x - 4y, 8x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Teste 11 Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $x(t) + y(t)$ será igual a:

- [A] $2e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [B] $2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$.
- [C] $2e^{t}\cos(3t) + 2e^{t}\operatorname{sen}(3t)$.
- ■ $2e^{2t}\cos(3t)$.
- [E] $2\cos(3t) + 2\operatorname{sen}(3t)$.

Teste 12 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, -2y - 2z, x + 2y + 3z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que os autovalores de T são:

[A] $1, 2$ e -3.

[B] 1, $\frac{1+\sqrt{27}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{27}}{2}$.

[C] 1, $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

[D] $1, 4$ e 5.

■ 1, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Teste 13 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2), (1, -1)\}.$$

Temos que o operador T será simétrico se, e somente se:

[A] $a = \frac{1}{5}$.

[B] $a = 2$.

[C] $a \neq -1$.

■ $a = \frac{4}{5}$.

[E] $a = 1$.

Teste 14 Sabe-se que $(1,3)$ é um autovetor da matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$2x^2 + 10y^2 + 6xy + \frac{\sqrt{10}}{5}(3x - y) = 3.$$

Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para essa cônica:

■ $11t^2 + s^2 = 4.$
B $11t^2 + s^2 = 11.$
C $11t^2 + s^2 = 3.$
D $11t^2 + s^2 = 7.$
E $11t^2 + s^2 = 1.$

Teste 15 Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}})$, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de X. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt aos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos os vetores ortogonais $B_1, B_2, B_3 \in M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

A $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
B $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
■ $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
D $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
E $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Teste 16 Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ um operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ por uma matriz real. Assuma que $T(1,1,1) = (2,1,5)$ e que $T(0,1,1+i) = (0,1,1+i)$. Se $T(1,2,3) = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

- A 3.
- B 1.
- C 6.
- D 13.
- ■ 11.

2019 – MAT-3458 – Prova Substitutiva– Folha de Respostas

Identificação

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** ______

Preencha seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha só 7 dígitos, deixa a última coluna em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas

Teste 1: A B ■ D E

Teste 2: A B C D ■

Teste 3: A B C ■ E

Teste 4: A B C ■ E

Teste 5: ■ B C D E

Teste 6: A B C ■ E

Teste 7: A ■ C D E

Teste 8: A B ■ D E

Teste 9: A B ■ D E

Teste 10: A B C D ■

Teste 11: A B C ■ E

Teste 12: A B C D ■

Teste 13: A B C ■ E

Teste 14: ■ B C D E

Teste 15: A B ■ D E

Teste 16: A B C D ■