

**Q1.** Seja fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  no espaço, com  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal, e considere a quádrlica de equação:

$$x^2 + y^2 + 2xy + 4xz + 4yz + 3x - y + z + 1 = 0.$$

Sabendo-se que  $P^{-1}AP = D$ , em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que uma equação reduzida para essa quádrlica é:

- (a)  $2u^2 - v^2 + \frac{13}{16} = 0$ ;
- (b)  $4u^2 - 2v^2 + \sqrt{2}w = 0$ ;
- (c)  $4u^2 - 2v^2 + \frac{13}{16} = 0$ ;
- (d)  $2u^2 - v^2 - 2\sqrt{2}w = 0$ ;
- (e)  $2u^2 - v^2 + \sqrt{2}w = 0$ .

**Q2.** Considere o espaço vetorial  $M_2(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2,$$

para quaisquer  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Se  $x, y, z \in \mathbb{R}$  forem tais que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

seja a matriz simétrica mais próxima da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

então  $y + z$  será igual a:

- (a)  $\frac{11}{2}$ ;
- (b) 8;
- (c) 4;
- (d)  $\frac{9}{2}$ ;
- (e)  $\frac{13}{2}$ .

**Q3.** Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{1 + t, 1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dos espaços vetoriais  $P_1(\mathbb{R})$  e  $M_2(\mathbb{R})$ , respectivamente. Se

$$T : P_1(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

for a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

então  $T(t)$  será igual a:

- (a)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ ;
- (b)  $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;
- (c)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ ;
- (d)  $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ;
- (e)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Q4.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b^2 & a \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a) se  $b \neq 0$ , então  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (b) se  $a = b$ , então  $A$  não é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (c)  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$  se, e somente se,  $a \neq 2$  e  $b \neq 2$ ;
- (d) se  $b \neq 0$ , então  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (e)  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Q5.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  denota a base

$$\mathcal{B} = \{(2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

de  $\mathbb{R}^3$ . Assinale a alternativa correta:

- (a)  $T$  é diagonalizável e não é simétrico;
- (b)  $T$  não é diagonalizável;
- (c)  $T$  é simétrico;
- (d) existe uma base ortonormal  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que a matriz  $[T]_{\mathcal{C}}$  é diagonal;
- (e)  $T$  é diagonalizável e não é inversível.

**Q6.** Sejam  $V$  um espaço vetorial real de dimensão 13 e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear cujo polinômio característico seja:

$$p_T(t) = -t^8(t-1)^3(t-2)^2.$$

Denote por  $I$  o operador identidade de  $V$ . Assinale a alternativa contendo uma igualdade que **NÃO** implique que  $T$  seja diagonalizável:

- (a)  $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Ker}(T - I)) - \dim(\text{Im}(T - 2I)) = 0$ ;
- (b)  $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T - I)) + \dim(\text{Im}(T - 2I)) = 24$ ;
- (c)  $\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Im}(T - I)) + \dim(\text{Im}(T - 2I)) = 26$ ;
- (d)  $\dim(\text{Im}(T - I)) + \dim(\text{Im}(T - 2I)) - \dim(\text{Ker}(T)) = 13$ ;
- (e)  $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Ker}(T - I)) + \dim(\text{Ker}(T - 2I)) = 13$ .

**Q7.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e os vetores:

$$v_1 = (1, -1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1, -2), \quad v_3 = (2, 1, -1, 1) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 1, 1, 1).$$

Aplicando-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt ao conjunto  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , obtemos o conjunto ortogonal  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ . Temos que a soma das coordenadas do vetor  $w_4$  é igual a:

- (a)  $\frac{6}{7}$ ;
- (b)  $\frac{12}{7}$ ;
- (c)  $\frac{9}{7}$ ;
- (d) 3;
- (e) 4.

**Q8.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do seu produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -3x - 2y + z = 0 \text{ e } -5x - 3y + t = 0\}.$$

Temos que  $S^\perp$  é igual a:

- (a)  $[(-3, -2, 1, 0)]$ ;
- (b)  $[(-3, -2, 1, 0), (-5, -3, 0, 1)]$ ;
- (c)  $[(2, 0, 0, -1), (1, 0, 0, 1)]$ ;
- (d)  $[(1, 1, 0, 0), (2, 1, 1, 0)]$ ;
- (e)  $[(-5, -3, 0, 1)]$ .

**Q9.** Se

$$A = \begin{pmatrix} -3i & -4i \\ 2i & 3i \end{pmatrix},$$

então  $A^{80}$  é igual a:

- (a)  $\begin{pmatrix} 3^{80} & 4^{80} \\ 2^{80} & 3^{80} \end{pmatrix}$ ;
- (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- (c)  $\begin{pmatrix} i2^{80} & -i \\ 1 & i3^{80} \end{pmatrix}$ ;
- (d)  $\begin{pmatrix} 2^{80} & 0 \\ 0 & 3^{80} \end{pmatrix}$ ;
- (e)  $\begin{pmatrix} 0 & i2^{80} \\ -i2^{80} & 0 \end{pmatrix}$ .

**Q10.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}.$$

Se o polinômio característico de  $A$  for  $p_A(t) = -t^3 + 4t + 1$ , então:

- (a)  $a = 1$  e  $b = -1$ ;
- (b)  $a = -1$  e  $b = 0$ ;
- (c)  $a = 1$  e  $b = 0$ ;
- (d)  $a = 2$  e  $b = 1$ ;
- (e)  $a = 0$  e  $b = 1$ .

**Q11.** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno,  $T : V \rightarrow V$  for um operador linear e existir uma base ortonormal  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que a matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$  seja diagonal, então o operador  $T$  será simétrico;
- (II) para qualquer inteiro positivo  $n$  e qualquer matriz  $P \in M_n(\mathbb{R})$ , se as colunas de  $P$  formarem uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  com respeito ao produto interno usual, então  $P^t P$  será igual à matriz identidade, em que  $P^t$  denota a transposta da matriz  $P$ ;
- (III) se  $V$  for um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e se  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  forem bases ortonormais de  $V$ , então a matriz  $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  será simétrica, em que  $I$  denota o operador identidade de  $V$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Q12.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear tal que  $[T]_{\text{can}} = A$ , em que  $\text{can}$  denota a base canônica de  $\mathbb{R}^3$  e:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(T - 5I) &= [(1, 1, 1)], & \text{Ker}(T - 3I) &= [(-1, 4, 3)] \\ \text{e } \text{Ker}(T + 2I) &= [(3, 3, -4)], \end{aligned}$$

em que  $I$  denota o operador identidade de  $\mathbb{R}^3$ . Se  $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$  denota a solução do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$  satisfazendo a condição  $X(0) = (-1, 4, -4)$ , então  $x(t) + y(t) + z(t)$  é igual a:

- (a)  $3e^{5t} + 2e^{3t} - 6e^{-2t}$ ;
- (b)  $9e^{5t} - 6e^{3t} - 4e^{-2t}$ ;
- (c)  $-9e^{5t} + 6e^{3t} + 2e^{-2t}$ ;
- (d)  $-3e^{5t} + 5e^{3t} - 3e^{-2t}$ ;
- (e)  $-9e^{5t} + e^{3t} + 7e^{-2t}$ .

**Q13.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e que a matriz  $P^{-1}AP$  é diagonal, temos que a soma das duas entradas na primeira coluna da matriz  $A^{47}$  é igual a:

- (a)  $-2^{48} + 2 \cdot 3^{49}$ ;
- (b)  $2^{49} - 3^{48}$ ;
- (c)  $2^{47} + 3^{47}$ ;
- (d)  $3 \cdot 2^{49} + 2 \cdot 3^{48}$ ;
- (e)  $2^{48} - 3^{49}$ .

**Q14.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e considere a transformação linear  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & a & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -a & b & -2 \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{B}$  é a base de  $P_3(\mathbb{R})$  dada por  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ . Pode-se afirmar que:

- (a) se  $b \neq -\frac{1}{3}(4a^2 + 5a + 1)$ , então  $T$  é inversível;
- (b) se  $a = -1$  e  $b \neq 0$ , então  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ ;
- (c) se  $a = -\frac{1}{4}$  e  $b \neq 0$ , então  $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$ ;
- (d) se  $a \neq -1$  e  $b = -\frac{1}{3}(4a^2 + 5a + 1)$ , então  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ ;
- (e) se  $a = -1$  e  $b = 0$ , então  $T$  é inversível.

**Q15.** Seja  $(x(t), y(t))$  a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t), \end{cases}$$

satisfazendo as condições  $x(0) = 0$  e  $y(0) = 1$ . Temos que  $x(t) + y(t)$  é igual a:

- (a)  $e^{2t}(\cos t - \text{sen } t)$ ;
- (b)  $e^{2t}(3 \text{sen } t + \cos t)$ ;
- (c)  $e^{2t}(\text{sen } t + \cos t)$ ;
- (d)  $e^{2t}$ ;
- (e)  $\cos t + \text{sen } t$ .

**Q16.** Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(2, 3), (1, 2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1, 1), (0, 1)\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  e seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma dos dois autovalores de  $T$  é igual a:

- (a) 6;
- (b) 7;
- (c) 5;
- (d) 4;
- (e) 8.