Q1. Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B},\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Dados $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se

$$T^{-1}(a,b) = (\alpha, \beta),$$

então $\alpha + \beta$ é igual a:

(a) $-3a - b$;
(b) $-7a + 3b$;
(c) $-4a - 4b$;
(d) $-3a + 3b$;
(e) $10a - 4b$.

Q2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que o valor da integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(a \operatorname{sen} t + b \cos t - e^t\big)^2 \, \mathrm{d}t$$

seja mínimo. Temos que $a + b$ é igual a:

(a) $\frac{1}{2}(e^{\pi} - e^{-\pi})$;
(b) $e^{\pi} + e^{-\pi}$;
(c) $\frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{-\pi})$;
(d) $e^{\pi} - e^{-\pi}$;
(e) 0.

Q3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 2 & 3 \\ -2 & a & a \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que T não é injetora se, e somente se, a é igual a:

(a) 2;
(b) -2;
(c) -4;
(d) 0;
(e) 4.

Q4. Seja n um inteiro positivo e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma das quatro entradas da matriz A^n é igual a:

(a) 2^{2n-1};
(b) 2^{2n+1};
(c) 2^{n-1};
(d) $2^{n-1} + 2^{2n-1}$;
(e) 4^n.

Q5. Considere o espaço vetorial $C\big([0,1]\big)$ munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t, \quad f, g \in C\big([0,1]\big).$$

Seja p o polinômio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima $f(t) = t^3$. Se $p(t) = a + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a + b$ é igual a:

(a) $\frac{7}{20}$;
(b) $\frac{17}{20}$;
(c) $\frac{7}{10}$;
(d) $\frac{17}{10}$;
(e) $\frac{4}{5}$.

Q6. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ e suponha que

$$(0,1,1), \quad (0,1,-1) \quad \text{e} \quad (1,0,-1)$$

sejam autovetores de A associados, respectivamente, aos autovalores 1, -1 e 0. Temos que A é igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q7. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 6 munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico cujo polinômio característico seja $p_T(t) = t^5(t-1)$. Dado um polinômio

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, denotamos por $q(T)$ o operador linear em V definido por:

$$q(T) = a_0 \mathrm{I} + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n,$$

onde I denota o operador identidade de V. Seja q um polinômio não nulo de grau mínimo tal que $q(T) = 0$. Se o coeficiente dominante de q é igual a 1, então q é igual a:

(a) $t^2 - t$;
(b) $t^6 - t^5$;
(c) $t^5 - t^4$;
(d) $t^3 - t^2$;
(e) $t^4 - t^3$.

Q8. Temos que vale a seguinte igualdade:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Suponha que uma equação reduzida para a quádrica

$$4x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - x - y - z - \frac{25}{28} = 0$$

seja

$$u^2 + 3v^2 + 7w^2 + d = 0,$$

onde $d \in \mathbb{R}$. Temos que d é igual a:

(a) $-\frac{25}{28}$;
(b) $-\frac{11}{14}$;
(c) $-\frac{17}{14}$;
(d) $-\frac{13}{14}$;
(e) -1.

Q9. Considere as seguintes afirmações:

(I) as matrizes
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
são equivalentes;

(II) as matrizes
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
são equivalentes;

(III) as matrizes
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
são equivalentes.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(c) todas as afirmações são falsas;
(d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q10. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Suponha que 3 seja um autovalor de T e que:
$$\mathrm{Ker}(T) = [(-1, 1, 1), (1, 2, 2)].$$
Dados $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$, se $T(\alpha, \beta, \gamma) = (a, b, c)$, então $a + b - c$ é igual a:

(a) $-3(\alpha + \beta)$;
(b) $\frac{3}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$;
(c) $3(\beta - \gamma)$;
(d) $\frac{3}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta - \gamma)$;
(e) 0.

Q11. Suponha que o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ esteja munido do seu produto interno usual. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\mathcal{B}$ denota a base de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathcal{B} = \big\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,2)\big\},$$

então o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

é simétrico;

(II) se $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o operador linear tal que

$$T(1,2,3) = (-2,-4,-6),\ T(-3,0,1) = (-6,0,2),\ T(-2,1,0) = (-6,3,0),$$

então T é simétrico;

(III) se $\mathcal{B} = \{u_1,u_2,u_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ satisfazendo as condições:

$$\langle u_1,u_2\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle u_1,u_3\rangle = 0,$$

então o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(e) todas as afirmações são falsas.

Q12. Considere a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$$

e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathrm{can},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Pode-se afirmar que:

(a) T não é diagonalizável e seus autovalores são 3 e -1;
(b) T não é diagonalizável pois seu polinômio característico possui raízes complexas não reais;
(c) T não é diagonalizável e seus autovalores são $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ e -1;
(d) T é diagonalizável e seus autovalores são $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ e -1;
(e) T é diagonalizável e seus autovalores são 3 e -1.

Q13. Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t, t + t^2\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathrm{can},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Dados $a, b, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, se

$$T(a, b) = \alpha + \beta t + \gamma t^2,$$

então $\alpha + \beta + \gamma$ é igual a:

(a) $2a + 3b$;
(b) $4a + 2b$;
(c) $2a + 2b$;
(d) $-a + 2b$;
(e) $4a + 3b$.

Q14. Temos que o polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

é $p_A(t) = -(t+3)^2(t-2)$. Seja X a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (1,-1,2)$. Se $X(t) = \big(X_1(t), X_2(t), X_3(t)\big)$, então $X_1(t) + X_2(t)$ é igual a:

(a) $6e^{-2t} - 6e^{2t}$;
(b) $e^{2t} - e^{-3t}$;
(c) 0;
(d) $e^{-2t} + e^{2t}$;
(e) $3e^{2t} - 3e^{-3t}$.

Q15. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \big\{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\big\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, t\}$$

dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^3$ e $P_1(\mathbb{R})$, respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to P_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $\mathrm{Ker}(T) = [(a,b,1)]$, então $a+b$ é igual a:

(a) -3;
(b) -5;
(c) 1;
(d) 7;
(e) -8.

Q16. Sejam $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Pode-se afirmar que:

(a) se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, então T é diagonalizável;
(b) se $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3$, então T é diagonalizável;
(c) se $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, então T é diagonalizável;
(d) se λ_1, λ_2 e λ_3 são dois a dois distintos, então T é diagonalizável;
(e) se $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, então T é diagonalizável.