Q1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que 2 e 4 sejam os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

e seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a elipse de equação:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = 1.$$

Uma equação reduzida para essa elipse é:

(a) $\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{4} = 1$;
(b) $2u^2 + \sqrt{2}\,v^2 = 1$;
(c) $\frac{u^2}{\sqrt{2}} + \frac{v^2}{2} = 1$;
(d) $2u^2 + v^2 = 1$;
(e) $4u^2 + 2v^2 = 1$.

Q2. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e seja dado $k \in \mathbb{R}$. Temos que a equação

$$5x^2 + 6xy - 3y^2 + \frac{1}{\sqrt{10}}(44x - 12y) = k$$

representa uma hipérbole se, e somente se:

(a) $k = -2$;
(b) $k \neq 1$;
(c) $k \neq -2$;
(d) $k \neq 0$;
(e) $k = 1$.

Q3. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear simétrico cujo polinômio característico é $p_T(t) = (t-3)^2(t-4)^2$. Se

$$T(1,0,1,0) = (4,0,4,0), \quad T(0,1,0,1) = (0,3,0,3) \quad \text{e}$$
$$T(1,-1,-1,1) = (4,-4,-4,4),$$

então $T(2,0,-2,0)$ é igual a:

(a) $(7,1,-1,-7)$;
(b) $(1,7,-7,-1)$;
(c) $(-7,1,7,-1)$;
(d) $(1,-7,7,-1)$;
(e) $(7,-1,-7,1)$.

Q4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix},$$

em que can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que o subespaço

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\big\}$$

é invariante por T se, e somente se:

(a) $a = 1$ e $b = 2$;
(b) $a = 2$ e $b = 3$;
(c) $a = 2$ e $b = 0$;
(d) $a = 0$ e $b = -1$;
(e) $a = -1$ e $b = 0$.

Q5. Recorde que o *traço* de uma matriz quadrada é definido como sendo a soma das entradas na sua diagonal principal. Se A denota a matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

então o traço de A^{200} é igual a:

(a) $1 + (\sqrt{2} + 1)^{102}$;
(b) $1 + 2^{102}$;
(c) $1 + 2^{101}$;
(d) $1 + (\sqrt{2} + 1)^{101}$;
(e) $1 + (\sqrt{2}\,)^{101}$.

Q6. Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) se existir uma base $\mathcal{B}$ de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja real, então o polinômio característico de T terá coeficientes reais;

(II) se existirem $b, c \in \mathbb{C}$ tais que $b^2 \neq 4c$ e o polinômio característico de T seja $p_T(t) = t^2 + bt + c$, então T será diagonalizável;

(III) se $1+i$ for um autovalor de T, então $1-i$ também será um autovalor de T.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q7. Sejam n um inteiro positivo e V um espaço vetorial real de dimensão n munido de um produto interno. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de V e $M \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz tal que

$$M[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}},$$

para todo $v \in V$. Pode-se afirmar que:

(a) se as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem ortogonais, então a transposta da matriz M será igual a $-M$;

(b) se as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem ortonormais, então a transposta da matriz M será igual a M;

(c) se as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem ortonormais, então a transposta da matriz M será igual à inversa de M;

(d) se as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem ortogonais, então a transposta da matriz M será igual à inversa de M;

(e) se as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ forem ortonormais, então a transposta da matriz M será igual a $-M$.

Q8. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz real e seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ o operador linear tal que $[T]_{\text{can}} = A$, em que can denota a base canônica de $\mathbb{C}^3$. Suponha que o polinômio característico de T seja

$$p_T(t) = -(t-2)(t^2+t+1)$$

e que

$$\operatorname{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [(1,0,1)] \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathrm{I}) = [(i,1,0)],$$

em que $\lambda \in \mathbb{C}$ denota o autovalor de T que tem a parte imaginária positiva e I denota o operador identidade de $\mathbb{C}^3$. Temos que a solução geral real $X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ é dada por:

(a) $\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2}\operatorname{sen}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_2 e^{-t/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_3 e^{2t}, \\ z(t) = -C_1 e^{-t/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_2 e^{-t/2}\operatorname{sen}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2}\operatorname{sen}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_2 e^{-t/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) - C_2 e^{-t/2}\operatorname{sen}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big), \\ z(t) = C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2}\operatorname{sen}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_2 e^{-t/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_3 e^{2t}, \\ z(t) = C_1 e^{-t/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_2 e^{-t/2}\operatorname{sen}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t/2}\operatorname{sen}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_2 e^{-t/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) - C_2 e^{-t/2}\operatorname{sen}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big), \\ z(t) = C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t/2}\operatorname{sen}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_2 e^{-t/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big) + C_2 e^{-t/2}\operatorname{sen}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\big), \\ z(t) = C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Q9. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz real e seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\text{can}} = A,$$

em que can denota a base canônica de $\mathbb{C}^2$. Denote por $\mathrm{I} \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz identidade. Se $-i$ for um autovalor de T, então A^{38} será igual a:

(a) $-\mathrm{I}$;
(b) $-iA$;
(c) $-A$;
(d) iA;
(e) I.

Q10. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que exista uma base $\mathcal{B}$ de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja simétrica. Considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é simétrico;
(II) o operador T é diagonalizável;
(III) existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(c) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q11. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a quádrica de equação

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + \sqrt{2}\,x + 2y + \sqrt{2}\,z = 3$$

e suponha que uma equação reduzida para essa quádrica seja

$$3u^2 + v^2 + w^2 = k,$$

para um certo $k \in \mathbb{R}$. Sabe-se que 3 é um autovalor da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e que:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O valor de k é:

(a) 2;
(b) 1;
(c) 3;
(d) 0;
(e) 5.

Q12. Sejam $A \in M_6(\mathbb{R})$ uma matriz real e $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ o operador linear tal que $[T]_{\text{can}} = A$, em que can denota a base canônica de $\mathbb{R}^6$. Se o polinômio característico de T for

$$p_T(t) = (t^2 + t + 1)(t - 2)^2(t + 1)t,$$

então poderemos afirmar que:

(a) A não será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ e A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se, e somente se, existirem vetores linearmente independentes v e w em $\mathbb{R}^6$ tais que $T(v) = 2v$ e $T(w) = 2w$;
(b) A será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;
(c) A não será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ e A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se, e somente se, existirem vetores linearmente independentes v e w em $\mathbb{R}^6$ tais que $T(v) = 2v$ e $T(w) = 2w$;
(d) A será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, mas não será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$;
(e) A não será diagonalizável nem sobre $\mathbb{R}$, nem sobre $\mathbb{C}$.

Q13. Considere as seguintes afirmações:

(I) se V for um espaço vetorial complexo de dimensão finita, $T : V \to V$ for um operador linear e $\lambda \in \mathbb{C}$ for um autovalor de T, então o conjugado de λ também será um autovalor de T;

(II) se uma matriz real $A \in M_n(\mathbb{R})$ for diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, então ela também será diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;

(III) se uma matriz real $A \in M_n(\mathbb{R})$ for diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então ela também será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q14. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear simétrico cujos autovalores são 1 e -2 e que satisfaz

$$\mathrm{Ker}(T + 2\mathrm{I}) = [(1, 0, 1), (0, 1, 0)],$$

em que I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Se $T(2, 1, 0) = (x, y, z)$, então $x + y + z$ é igual a:

(a) -4;
(b) -5;
(c) -3;
(d) 0;
(e) -6.

Q15. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no espaço, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal, e considere o elipsóide de equação:

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy + 3z^2 + 2x - 6y + 12z = 42.$$

Assinale a alternativa contendo três vetores que sejam paralelos aos eixos de simetria desse elipsóide:

(a) $(1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$, $(2, -1, -1)_{\mathcal{B}}$ e $(0, 1, -1)_{\mathcal{B}}$;
(b) $(1, 0, 2)_{\mathcal{B}}$, $(2, 0, -1)_{\mathcal{B}}$ e $(0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$;
(c) $(1, 2, 0)_{\mathcal{B}}$, $(2, -1, 0)_{\mathcal{B}}$ e $(0, 0, 2)_{\mathcal{B}}$;
(d) $(1, -1, 0)_{\mathcal{B}}$, $(1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ e $(0, 0, 1)_{\mathcal{B}}$;
(e) $(2, 1, 0)_{\mathcal{B}}$, $(1, -2, 0)_{\mathcal{B}}$ e $(0, 0, 2)_{\mathcal{B}}$.

Q16. O polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

é $p_A(t) = -(t-5)(t+1)^2$. Temos que a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 3, 3)$ é dada por:

(a) $X(t) = (e^{5t} - e^{-t}, e^{5t} + 2e^{-t}, 2e^{5t} + e^{-t})$;
(b) $X(t) = (e^{-t} - e^{5t}, e^{-t} + 2e^{5t}, 3e^{-t})$;
(c) $X(t) = \left(e^{-t} - e^{5t}, \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{5t}, e^{-t} + 2e^{5t}\right)$;
(d) $X(t) = (e^{5t} - e^{-t}, e^{5t} + 2e^{-t}, e^{5t} + 2e^{-t})$;
(e) $X(t) = (e^{-t} - e^{5t}, e^{-t} + 2e^{5t}, 2e^{-t} + e^{5t})$.