

Q1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se o operador T é simétrico, então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, para qualquer base \mathcal{B} de V ;
- (II) se existe uma base ortogonal de V formada por autovetores de T , então o operador T é simétrico;
- (III) se $\langle T(v), w \rangle = \langle v, w \rangle$, para todos $v, w \in V$, então o operador T é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q2. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno usual e sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaz

$$T(1, 1, 0) = (1, a, b), \quad T(1, -1, 0) = (2, 4, c) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = (3, 5, 6)$$

for simétrico, então $a + b + c$ é igual a:

- (a) 8;
- (b) $2 + 8\sqrt{2}$;
- (c) 1;
- (d) $10\sqrt{2}$;
- (e) 10.

Q3. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se que a inversa da matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

é

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

então a soma das duas entradas na primeira linha da matriz A^{79} é igual a:

- (a) $\frac{1}{6}(1 + 5 \cdot 2^{-79})$;
- (b) $\frac{1}{6}(1 - 2 \cdot 2^{-79})$;
- (c) $\frac{1}{6}(5 + 5 \cdot 2^{-79})$;
- (d) $\frac{1}{6}(5 - 2^{-79})$;
- (e) $\frac{1}{6}(1 - 2^{-79})$.

Q4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear e denote por $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de \mathbb{R}^3 . Suponha que

$\text{Ker}(T - I) = [(2, 4, 0)]$, $\text{Ker}(T - 2I) = [(0, 1, -1)]$ e $(1, 0, 1) \in \text{Ker}(T + I)$,

onde I denota o operador identidade de \mathbb{R}^3 . Assinale a alternativa correta:

- (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$;
- (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Q5. Denote por I o operador identidade de \mathbb{R}^4 e seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(T) &= [(1, 2, 0, 0), (0, -1, 0, 1)], & \text{Ker}(T - 2I) &= [(0, 0, 0, 1)] \quad \text{e} \\ & & \text{Ker}(T - 3I) &= [(1, 0, 1, 1)]. \end{aligned}$$

Temos que $T(2, 1, 2, 0)$ é igual a:

- (a) $(1, 3, 0, -1)$;
- (b) $(0, -1, -1, 2)$;
- (c) $(-3, 0, -3, -3)$;
- (d) $(6, 0, 6, 4)$;
- (e) $(2, 0, 2, 1)$.

Q6. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^2 munido do seu produto interno usual e as bases

$$\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1, -1), (0, 2)\}$$

de \mathbb{R}^2 . Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são os operadores lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [U]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

então:

- (a) T e U são ambos simétricos e têm o mesmo polinômio característico;
- (b) nem T nem U são simétricos;
- (c) T e U são ambos simétricos e têm polinômios característicos diferentes;
- (d) T é simétrico e U não é simétrico;
- (e) T não é simétrico e U é simétrico.

Q7. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \rightarrow V$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = -t^3(t - 2)^2$. Denote por I o operador identidade de V . Temos que T é diagonalizável se, e somente se:

- (a) $\dim(\text{Im}(T)) - \dim(\text{Ker}(T - 2I)) = 0$;
- (b) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (c) $\dim(\text{Im}(T - 2I)) - \dim(\text{Im}(T)) = 1$;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T - 2I)) = 2$;
- (e) $\dim(\text{Im}(T - 2I)) + \dim(\text{Ker}(T)) = 5$.

Q8. Sejam $A_1, A_2 \in M_5(\mathbb{R})$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) se A_1 e A_2 são semelhantes, então qualquer autovalor de A_1 também é um autovalor de A_2 ;
- (II) se $T_1 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ e $T_2 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ são operadores lineares, \mathcal{B} é uma base de \mathbb{R}^5 , $[T_1]_{\mathcal{B}} = A_1$, $[T_2]_{\mathcal{B}} = A_2$ e se as matrizes A_1 e A_2 são semelhantes, então qualquer autovetor de T_1 também é um autovetor de T_2 ;
- (III) se A_1 e A_2 possuem exatamente os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades algébricas, então A_1 e A_2 são semelhantes.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q9. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(3, 2), (2, 1)\}$$

de \mathbb{R}^2 e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Se λ e μ denotam os dois autovalores de T , então $\lambda + \mu$ é igual a:

- (a) -4 ;
- (b) -8 ;
- (c) 8 ;
- (d) 0 ;
- (e) 4 .

Q10. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, t + t^2, t^2, t^2 + t^3\}$$

dos espaços vetoriais \mathbb{R}^2 e $P_3(\mathbb{R})$, respectivamente. Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ é a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

então $T(0, 1)$ é igual a:

- (a) $3 + t - t^2 - 3t^3$;
- (b) $t + 2t^2 + 3t^3$;
- (c) $-3 - t + t^2 + 3t^3$;
- (d) $3 + t - 3t^2 - 3t^3$;
- (e) $-3 - t + 3t^2 + 3t^3$.

Q11. Sejam $n \geq 4$ um inteiro, \mathcal{B} uma base de \mathbb{R}^n , $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear e $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Denote por I o operador identidade de \mathbb{R}^n e considere as seguintes afirmações:

- (I) se alguma coluna de A é uma combinação linear das outras colunas de A , então T não é sobrejetor;
- (II) se alguma linha de A é uma combinação linear das outras linhas de A , então 0 é um autovalor de T ;
- (III) se $\text{Ker}(T)$ tem dimensão 2, então não existe um autovalor λ de T tal que $\text{Ker}(T - \lambda I)$ tenha dimensão $n - 1$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q12. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 24 e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Denote por I o operador identidade de V . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se 1 é um autovalor de T , então a dimensão de $\text{Im}(T - I)$ é menor ou igual a 23;
- (II) T tem pelo menos um autovalor;
- (III) T tem no máximo 24 autovalores.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q13. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ o operador linear definido por

$$T(a + bt + ct^2) = a + (2a - b)t + (b + c)t^2,$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere a base $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e seja $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ a base de $P_2(\mathbb{R})$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)$ é igual a:

- (a) $2t + 3t^2$;
- (b) $\frac{1}{6}(9 + 4t + 3t^2)$;
- (c) $1 + t + 2t^2$;
- (d) $-2t + 5t^2$;
- (e) $1 + 3t - t^2$.

Q14. Seja $T : M_4(\mathbb{R}) \rightarrow M_4(\mathbb{R})$ um operador linear e considere as seguintes afirmações:

- (I) T é diagonalizável se, e somente se, a soma das dimensões dos auto-espacos de T é igual a 16;
- (II) se A é a matriz que representa T com respeito a alguma base de $M_4(\mathbb{R})$, então $\det(2A) = 16 \det(A)$;
- (III) se T é diagonalizável e 4, -4 , 16 e -16 pertencem ao conjunto dos autovalores de T , então a matriz que representa T com respeito a qualquer base de $M_4(\mathbb{R})$ é inversível.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (b) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q15. Seja $T : M_{3 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = t^3(t-1)^2(t+1)$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $\dim(\text{Im}(T)) \in \{3, 4, 5\}$;
- (II) T é diagonalizável se, e somente se, existem cinco vetores distintos e linearmente independentes $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ tais que $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = v_2$ e $v_3, v_4, v_5 \in \text{Ker}(T)$;
- (III) se $A \in M_6(\mathbb{R})$ é uma matriz cujo polinômio característico é igual ao polinômio característico de T , então existe uma base \mathcal{B} de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = A$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q16. Sejam n um inteiro positivo, V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Considere as seguintes condições:

- (I) T é inversível;
- (II) T tem n autovalores não nulos distintos;
- (III) T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) (I) implica (II) e (III) implica (I);
- (b) (II) implica (I) e (II) implica (III);
- (c) (I) implica (II) e (III) implica (II);
- (d) (II) implica (III) e (III) implica (I);
- (e) (II) implica (I) e (III) implica (I).