Q1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (0,0,1) \quad \text{e} \quad v_3 = (1,1,0)$$

sejam autovetores de T associados, respectivamente, aos autovalores:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 0.$$

Denote por can a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que a soma das entradas na primeira linha da matriz $[T]_{\text{can}}$ é igual a:

(a) -2;
(b) 2;
(c) -1;
(d) 1;
(e) 0.

Q2. Sejam $n \geq 1$ um inteiro e $A \in M_n(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se a matriz A for diagonalizável, então a transposta da matriz A também será diagonalizável;
(II) se o polinômio característico de A tiver n raízes reais distintas, então a matriz A será diagonalizável;
(III) se a matriz A for inversível e diagonalizável, então a matriz A^{-1} também será diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q3. Sejam $n \geq 1$ um inteiro e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se A e B forem semelhantes, então A e B terão o mesmo polinômio característico;

(II) se A e B tiverem o mesmo polinômio característico, então A e B terão os mesmos autovalores;

(III) se A e B tiverem os mesmos autovalores, então A e B serão semelhantes.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q4. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ forem tais que

$$A^{10} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então $a + b$ será igual a:

(a) 1024;

(b) 2056;

(c) 956;

(d) 1025;

(e) 683.

Q5. Sejam V um espaço vetorial, $T : V \to V$ um operador linear, $v, w \in V$ vetores não nulos e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ autovalores de T. Assuma que v seja um autovetor de T associado ao autovalor λ e que w seja um autovetor de T associado ao autovalor μ. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $v + w$ for um autovetor de T, então $\lambda = \mu$;

(II) se T for bijetor, então $\lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}$ será um autovalor de T^{-1};

(III) o operador $T \circ T + \mathrm{I}$ não tem autovalores, em que I denota o operador identidade de V.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Q6. Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

em que can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que T será diagonalizável se, e somente se:

(a) $k > 0$;

(b) $k \in \,]-1, 1[$;

(c) $k \geq 1$;

(d) $k \leq -1$;

(e) $k \leq -2$.

Q7. Seja V um espaço vetorial de dimensão maior ou igual a 2 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e denote por $\| \cdot \|$ a norma correspondente. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) para quaisquer $v, w \in V$, se v e w forem ortogonais e $\|v\| = \|w\|$, então $\|v + w\| = 2\|v\|$;

(b) para quaisquer $v, w \in V$, se $v \neq 0$, $w \neq 0$ e v e w forem ortogonais, então v e w serão linearmente independentes;

(c) para quaisquer $v, w \in V$, se $v + w$ e $v - w$ forem ortogonais, então $\|v\| = \|w\|$;

(d) para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$;

(e) para quaisquer $v, w \in V$, se $v - w$ for ortogonal a v e se v e w forem linearmente dependentes, então $v = w$ ou $v = 0$.

Q8. Seja $T : V \to V$ um operador linear, em que V é um espaço vetorial de dimensão 7. Considere as seguintes afirmações:

(I) se 4 for um autovalor de T com multiplicidade algébrica igual a 3, então existirá um subconjunto linearmente independente $\{v, w, z\}$ de V com três elementos tal que $T(v) = 4v$, $T(w) = 4w$ e $T(z) = 4z$;

(II) se todas as raízes complexas do polinômio característico de T forem reais, então a soma das multiplicidades geométricas dos autovalores de T será igual a 7;

(III) se 20, 30 e 40 forem autovalores de T, a multiplicidade geométrica do autovalor 20 for igual a 3 e a multiplicidade algébrica do autovalor 30 for igual a 3, então a multiplicidade geométrica do autovalor 40 será igual a 1.

Assinale a alternativa correta:

(a) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q9. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 4 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja dado por:

$$p_T(t) = t(t-1)^2(t+2).$$

Denote por I o operador identidade de V e considere as seguintes afirmações:

(I) se $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})\big) = 3$, então o operador T será diagonalizável;

(II) se $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) + \mathrm{Ker}(T + 2\mathrm{I}) + \mathrm{Ker}(T) = V$, então o operador T será diagonalizável;

(III) se o operador T for diagonalizável, então T será bijetor.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q10. Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^5 p(t)q(t)\, \mathrm{d}t,$$

para quaisquer $p, q \in P_4(\mathbb{R})$, é um produto interno em $P_4(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle a + bt + ct^2, a' + b't + c't^2 \rangle = aa' - bb' + 3cc',$$

para quaisquer $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$, é um produto interno em $P_2(\mathbb{R})$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$\mathrm{Ker}(T) = [(1, 0, -1)]$, $\quad \mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [(1, 0, 1)]$ $\quad$ e $\quad \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}) = [(0, 1, 1)]$,

em que I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Sejam $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz que representa T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$ e D a matriz dada por:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes matrizes inversíveis:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Dentre P_1, P_2 e P_3, as matrizes P tais que $A = PDP^{-1}$ são:

(a) apenas P_2 e P_3;
(b) apenas P_2;
(c) apenas P_1;
(d) apenas P_1 e P_2;
(e) apenas P_3.

Q12. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $S_1 \subset S_2$, então $S_2^{\perp} \subset S_1^{\perp}$;

(II) $S_1^{\perp} + S_2^{\perp} \subset (S_1 \cap S_2)^{\perp}$;

(III) se $\{w_1, \ldots, w_k\}$ for um conjunto de geradores para S_1, então para qualquer $v \in V$ valerá que $v \in S_1^{\perp}$ se, e somente se, $\langle v, w_i \rangle = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.

Q13. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Seja W o subespaço vetorial de $P_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) + p'(0) = 0\}.$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $p(t) = t^2 + at + b$ esteja em $W^{\perp}$, então $a + b$ será igual a:

(a) -2;

(b) 1;

(c) -1;

(d) 2;

(e) 0.

Q14. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em $\mathbb{R}^n$ (possivelmente diferente do produto interno usual) e denote por $\| \cdot \|$ a norma correspondente. Considere as seguintes afirmações:

(I) se a base canônica de $\mathbb{R}^n$ for ortogonal com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

para qualquer $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

(II) se para qualquer $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ for o caso que

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

então a base canônica de $\mathbb{R}^n$ será ortonormal com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

(III) a desigualdade

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

será satisfeita para quaisquer $v, w \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se, a base canônica de $\mathbb{R}^n$ for ortonormal com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(e) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.

Q15. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right\rangle = aa' + bb' + cc' + dd',$$

para quaisquer $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$. Se S for o subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$ dado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-c & 2a-c \\ 5a-3b-c & -a-3b+2c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

então $S^{\perp}$ será igual a:

(a) $\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$;

(b) $\left[\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]$;

(c) $\left[\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$;

(d) $\left[\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$;

(e) $\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$.

Q16. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com respeito ao qual a base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,1,0)\}$$

seja ortonormal. Temos que $\langle (1,2,3), (1,2,3) \rangle$ é igual a:

(a) 6;
(b) 35;
(c) 1;
(d) 5;
(e) 14.