Álgebra Linear

Versão 07/04/2021

Vitor de Oliveira Ferreira

Prefácio

Estas notas compreendem todo o conteúdo da sequência de Álgebra Linear para os alunos do primeiro ano dos cursos de Engenharia na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

A sequência de Álgebra Linear é constituída de duas disciplinas semestrais: MAT3457 - Álgebra Linear I e MAT3458 - Álgebra Linear II. Aqui, encontra-se o conteúdo unificado delas.

São parte integrante destas notas as listas de exercícios elaboradas pelos docentes responsáveis pelas turmas e disponibilizadas aos alunos.

O símbolo $\square$ marca o final da demonstração de um teorema, proposição, lema ou corolário; o símbolo $\lozenge$ marca o final de uma observação, de um exemplo, ou da solução de um exercício.

Sumário

Parte 1

Vetores e Geometria Analítica

1

Sistemas lineares, matrizes e determinantes

Este capítulo será dedicado à sistematização do conhecimento sobre sistemas lineares, matrizes e determinantes, usualmente coberto no Ensino Médio. Porém, nosso ponto de vista será mais conceitual, com especial atenção dada à investigação das razões por trás das técnicas que o leitor provavelmente já conhece, isto é, faremos demonstrações completas dos resultados enunciados. Uma exceção é a Seção 1.3, que trata de determinantes, em que, exclusivamente por falta de tempo, muito pouco será demonstrado.

Nos dois capítulos seguintes, que tratam de vetores e geometria analítica, e na segunda parte destas notas, a respeito de espaços vetoriais, faremos extenso uso dos métodos utilizados no estudo de sistemas lineares e da conexão destes com matrizes e determinantes.

Neste capítulo, e em todos os capítulos subsequentes, o conjunto dos números reais será denotado por $\mathbb{R}$.

1.1 Sistemas lineares

Iniciamos, nesta seção, o estudo de sistemas de equações lineares. Será preciso, primeiramente, termos claro o que entendemos por uma equação linear.

Uma equação como

$$2x = -4 \tag{1.1}$$

é o que chamamos uma equação linear na incógnita (ou variável) x.

Quando se diz que iremos determinar uma solução para essa equação, se quer dizer que desejamos encontrar um número real que, ao ocupar o lugar da incógnita, dá origem a uma afirmação verdadeira. Assim, o número -2 é solução da equação (1.1) porque $2 \cdot (-2)$ é, de fato, igual a -4. E o número 3 não é solução da equação (1.1) porque $2 \cdot 3$ não é igual a -4. Como, além do número -2, nenhum outro número real é solução da equação (1.1), costuma-se dizer que -2 é sua *única* solução.

De maneira geral, uma equação linear na incógnita x é uma equação da forma

$$ax = b, \tag{1.2}$$

em que a e b são números reais dados. Uma solução da equação (1.2) é um número real s que satisfaça $as = b$. É fácil ver que se $a \neq 0$, então o número $a^{-1}b$ é a única solução de (1.2). (Se $a = b = 0$, então qualquer número real será solução de (1.2), e se $a = 0$ e $b \neq 0$, (1.2) não terá solução.)

Equações lineares podem ter mais do que uma incógnita, como é o caso, por exemplo, da equação

$$3x - 4y = 1, \tag{1.3}$$

na qual x e y são incógnitas. O par de números reais $(3, 2)$ é uma solução de (1.3), no sentido de que ao substituirmos a primeira incógnita, que chamamos de x, por 3 e a segunda, y, por 2, obtemos uma afirmação verdadeira, já que vale $3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 1$. Aqui, porém, diferentemente do que ocorreu em (1.1), a equação tem mais do que uma única solução; o leitor pode verificar que para qualquer número real s o par $\left(s, -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}s\right)$ é solução de (1.3). Essas são, de fato, todas as soluções de (1.3). Isso seguirá da teoria mais geral de sistemas lineares, tema desta seção.

Também é possível investigar o problema de se tentar encontrar soluções simultâneas de equações lineares. Por exemplo, poderíamos tentar descobrir quais são as soluções da equação (1.3) que também são soluções da equação

$$-2x + 3y = 0. \tag{1.4}$$

Procurar as soluções simultâneas dessas duas equações é tratar do que se costuma chamar de resolução de um sistema linear. Em termos de notação e nomenclatura, listamos sequencialmente as equações,

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -2x + 3y = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

e chamamos as soluções simultâneas delas de soluções do sistema linear (1.5).

Uma abordagem possível (e que é a mais frequentemente utilizada no Ensino Médio) é usar o fato (conhecido — e já mencionado acima —, mas ainda não totalmente esclarecido) que toda solução da primeira equação que compõe esse sistema, a equação (1.3), é da forma $\left(s, -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}s\right)$ e "substituí-la" na segunda equação do sistema, ou seja, procurar os números reais s que satifazem

$$-2s + 3\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}s\right) = 0.$$

Isso, na realidade, resulta em uma nova equação linear (agora na incógnita s), cuja solução é $s = 3$, como o leitor pode ele mesmo verificar. Concluímos que $(3, 2)$ é a única solução do sistema de equações lineares (1.5).

Nesta seção, veremos um método bastante mais eficiente do que o utilizado acima e que se aplica a situações mais gerais. Trata-se do *método do escalonamento*. Para introduzi-lo, precisamos, antes, proceder à formalização adequada ao estudo de sistema lineares, começando por fixar a notação e a nomenclatura que utilizaremos deste ponto em diante.

Uma *equação linear* nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1.6}$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são números reais, chamados *coeficientes* da equação linear. Uma sequência $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ formada por n números reais é dita uma *solução* para a equação linear (1.6) se a igualdade numérica

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

for verdadeira.

Um *sistema linear* de m equações nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma sequência de m equações lineares nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.7}$$

Uma *solução* para o sistema linear (1.7) é uma sequência $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de números reais que é solução para cada uma das m equações que compõem (1.7).

Exemplo 1.1.1. O sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + (-2)x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6, \end{cases} \tag{1.8}$$

é formado por duas equações e tem duas incógnitas: x_1 e x_2.

O par $(2, 1)$ é uma solução de (1.8), como pode ser diretamente verificado. Ainda, $(2, 1)$ é a única solução desse sistema linear. Vejamos uma demonstração desse fato. Se (s_1, s_2) for uma solução qualquer, então da primeira equação obteremos $2s_1 + (-2)s_2 = 2$, o que, por sua vez, implicará

$s_1 = s_2 + 1$. Como (s_1, s_2) deve ser também solução da segunda equação, e sabemos que, necessariamente, $s_1 = s_2 + 1$, teremos $2(s_2 + 1) + 2s_2 = 6$, donde concluímos que $s_2 = 1$ e, portanto, $s_1 = 2$. Em resumo, $(2, 1)$ é a única solução de (1.8). $\diamondsuit$

Exemplo 1.1.2. O sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \tag{1.9}$$

não tem soluções, uma vez que se (s_1, s_2) é uma solução da primeira equação do sistema, então $2s_1 + 2s_2 = 4 \neq 2$; assim, (s_1, s_2) não pode ser uma solução da segunda equação do sistema. $\diamondsuit$

Exemplo 1.1.3. O sistema linear

$$\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 = -8 \\ \frac{3}{2}x_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x_2 = 2 \end{cases} \tag{1.10}$$

tem infinitas soluções. De fato, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, o par $(t, 3t - 4)$ é uma solução do sistema, como pode ser diretamente verificado. $\diamondsuit$

Adiante, veremos um método para concluir, dado um sistema linear, se ele possui solução ou não e, no caso de possuir, uma maneira de encontrar todas as suas soluções.

Observação. Adotaremos algumas simplificações na notação para sistemas lineares:

- Equações que envolvem coeficientes negativos terão um termo da forma
  $$\cdots + (-a)x_i + \ldots,$$
  com $a > 0$, reescritos na forma
  $$\cdots - ax_i + \ldots.$$
  Por exemplo, o sistema (1.8) pode ser reescrito na forma
  $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$
- Quando o número de incógnitas é pequeno, podemos rotulá-las por $x, y, z, \ldots$. Assim, o sistema (1.8) pode ser escrito, ainda, como
  $$\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ 2x + 2y = 6. \end{cases}$$

- Quando o número 1 aparecer como coeficiente de alguma incógnita, esse coeficiente será omitido, e quando o número 0 aparecer como coeficiente de alguma incógnita, o termo correspondente será omitido. Por exemplo, será mais comum denotarmos o sistema linear
$$\begin{cases} 2x - 1y = 3 \\ 0x + 2y = 1 \end{cases}$$
por
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2y = 1. \end{cases}$$

Também vale registrar que os termos *variável* ou *indeterminada* são utilizados como sinônimo de incógnita. ◊

Sistemas lineares serão categorizados em três classes. Dizemos que um sistema linear é

- *impossível* (ou *incompatível*, ou, ainda, *inconsistente*) se não possuir nenhuma solução;
- *possível* (ou *compatível*, ou, ainda, *consistente*) *determinado* se possuir apenas uma solução;
- *possível* (ou *compatível*, ou, ainda, *consistente*) *indeterminado* se possuir pelo menos duas soluções.

Assim, nos três exemplos acima, o sistema (1.8) é possível determinado, o sistema (1.9), impossível, e o sistema (1.10), possível indeterminado.

Veremos que todo sistema linear possível indeterminado possui, de fato, infinitas soluções.

Operações elementares. Para obter um método de resolução de sistemas lineares, dado um sistema linear
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{$\mathcal{S}$}$$
consideraremos as seguintes operações sobre as equações que o compõem:

I. Permutar duas equações de $(\mathcal{S})$.

II. Multiplicar todos os coeficientes de uma equação de $(\mathcal{S})$ por um mesmo número real não nulo.

III. Somar a uma das equações de $(\mathcal{S})$ uma outra equação cujos coeficientes foram todos multiplicados por um mesmo número real.

As operações I, II e III são chamadas *operações elementares* sobre as equações de $(\mathcal{S})$.

Uma operação elementar do tipo I altera apenas duas das equações que compõem o sistema, as demais permanecem inalteradas. A rigor, na realidade, nem as duas equações envolvidas são alteradas, apenas as posições que elas ocupavam no sistema é que são alteradas.

Operações elementares do tipo II e III alteram apenas uma das equações que compõem o sistema, preservando as demais. Especialmente no caso de operações elementares do tipo III, observe que o que se faz é substituir uma equação, a j-ésima, digamos, por uma nova equação: a j-ésima equação original somada a uma outra equação, digamos, a i-ésima, multiplicada, por sua vez, por um número real. Com exceção da j-ésima, todas as demais equações do sistema, incluindo a i-ésima, permanecem inalteradas.

Assim, quando se efetua uma operação elementar sobre as equações de um sistema linear, obtém-se um novo sistema linear com o mesmo número de equações e, evidentemente, o mesmo número de incógnitas.

Exemplo 1.1.4. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Vamos exemplificar o efeito de cada um dos tipos de operações elementares sobre as equações do sistema (1.11)

Se aplicarmos ao sistema (1.11) uma operação elementar do tipo I, por exemplo, a que permuta a segunda e terceira equações, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Se aplicarmos ao sistema (1.11) uma operação elementar do tipo II, por exemplo, a que multiplica a terceira equação por 3, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ -3x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Se aplicarmos ao sistema (1.11) uma operação elementar do tipo III, por exemplo, a que soma à segunda equação a primeira multiplicada por -1, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 4x_3 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Veja que, de fato, cada um dos novos sistemas têm o mesmo número de equações que (1.11), isto é, 3, e o mesmo número de incógnitas, 4. $\Diamond$

Operações elementares sobre as equações de um sistema linear não alteram suas soluções. Dizendo de modo mais preciso, se $(\mathcal{S}_1)$ é um sistema linear obtido a partir de $(\mathcal{S})$ pela aplicação de uma operação elementar sobre suas equações, então, dada uma sequência de números reais $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, ela será solução de $(\mathcal{S})$ se, e somente se, for solução de $(\mathcal{S}_1)$. Vejamos por quê.

Por um lado, é fácil ver que toda solução de $(\mathcal{S})$ é também uma solução de $(\mathcal{S}_1)$. Isso pode ser verificado considerando, um por vez, cada um dos três tipos de operações elementares sobre equações.

Por outro lado, o mesmo argumento mostra que toda solução de $(\mathcal{S}_1)$ é solução de $(\mathcal{S})$. Isso decorre do fato de que operações elementares sobre equações podem ser "desfeitas" e, assim, $(\mathcal{S})$ pode ser obtido a partir de $(\mathcal{S}_1)$ por meio da aplicação de uma operação elementar sobre as equações de $(\mathcal{S}_1)$. Por exemplo, digamos que $(\mathcal{S}_1)$ tenha sido obtido a partir de $(\mathcal{S})$ por meio de uma operação elementar do tipo III, em que a j-ésima equação de $(\mathcal{S}_1)$ é o resultado da soma da j-ésima equação de $(\mathcal{S})$ com a i-ésima equação de $(\mathcal{S})$ multiplicada pelo número λ. Então, $(\mathcal{S})$ também pode ser obtido a partir de $(\mathcal{S}_1)$ por meio de uma operação elementar do tipo III: a j-ésima equação de $(\mathcal{S})$ é o resultado da soma da j-ésima equação de $(\mathcal{S}_1)$ com a i-ésima equação de $(\mathcal{S}_1)$ multiplicada por $(-\lambda)$. Deixamos a cargo do leitor verificar que um raciocínio similar se aplica a operações elementares dos tipos I e II.

Dizemos que dois sistemas lineares com o mesmo número de incógnitas são *equivalentes* se tiverem exatamente as mesmas soluções.

Assim, o que acabamos de ver é que se $(\mathcal{S}_1)$ é um sistema obtido por meio da aplicação de uma operação elementar sobre as equações do sistema $(\mathcal{S})$, então $(\mathcal{S})$ e $(\mathcal{S}_1)$ são equivalentes.

Nosso objetivo será, dado um sistema linear $(\mathcal{S})$, obter um sistema linear $(\mathcal{S}')$ que é equivalente a ele, cujas soluções são fáceis (num sentido a ser tornado preciso adiante) de ser encontradas. Esse sistema $(\mathcal{S}')$ será obtido por meio de uma sequência finita de operações elementares sobre equações a começar pelo sistema $(\mathcal{S})$.

Antes, porém, de descrever o método geral, consideremos um exemplo.

Exemplo 1.1.5. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - 6y + 6z = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

de três equações e três incógnitas, quais sejam, x, y e z.

Aplicando a operação elementar de tipo I que permuta a primeira e a segunda equações, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ 3x - 6y + 6z = 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

que é equivalente a (1.12), pois como vimos, operações elementares sobre as equações de um sistema linear não alteram suas soluções.

Agora, aplique ao sistema (1.13) a operação elementar do tipo III dada pela soma à segunda equação da primeira multiplicada por -2:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ 3x - 6y + 6z = 0. \end{cases}$$

Esse novo sistema é equivalente a (1.13), que, por sua vez, era equivalente a (1.12); portanto ele é, também, equivalente a (1.12).

Agora, a esse último sistema aplicamos uma operação elementar do tipo III, somando à terceira equação a primeira multiplicada por -3:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ -3y + 3z = -3. \end{cases}$$

Mais uma vez, obtemos um sistema que é equivalente a (1.12).

Finalmente, aplique ao último sistema obtido a operação elementar do tipo III que soma à terceira equação a segunda multiplicada por 3 e obtenha o sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ 0 = 3. \end{cases} \tag{1.14}$$

O sistema (1.14) encontra-se em um formato no qual fica evidente que ele é impossível, uma vez que sua terceira equação não tem solução. Como ele é equivalente a (1.12), pois foi obtido a partir dele por uma sequência de operações elementares sobre equações, segue que o sistema (1.12) é, também, impossível, um fato que não era fácil de se concluir no início, antes de realizarmos as operações elementares que produziram (1.14) a partir de (1.12). $\Diamond$

Nesse exemplo, fomos capazes de trocar um sistema linear sobre o qual não era evidente afirmar se tratar de um sistema impossível por um sistema equivalente, isto é, um sistema que tem as mesmas soluções que o original, este último, sim, obviamente impossível.

Procuraremos sistematizar o procedimento que adotamos nesse exemplo de modo a sermos capazes de tratar qualquer sistema linear e de também poder tirar conclusões sobre suas soluções quando ele for um sistema possível.

Porém, antes, observemos que é possível trabalhar apenas com os coeficientes das equações que compõem um sistema linear: eles codificam a informação completa contida em um sistema linear. Para tanto, introduziremos um objeto que reúne todos os coeficientes de um sistema linear, sua matriz aumentada.

Notação matricial. O sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

pode ser mais compactamente denotado por

$$AX = B,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é o que chamaremos de uma *matriz* de tamanho $m \times n$ (ou, de m linhas e n colunas) — o que será doravante denotado por $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ —,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é uma matriz $m \times 1$ (ou $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$), e

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é uma "matriz" $n \times 1$ cujas entradas são incógnitas.

A matriz

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

é chamada *matriz aumentada* do sistema linear. A barra vertical que está presente na matriz aumentada de um sistema linear, separando a última coluna das precedentes, é apenas um recurso notacional, para nos lembrar de como essa matriz foi construída, não acrescentando a ela nenhum atributo novo; trata-se de uma matriz $m \times (n+1)$ como todas as demais.

A cada operação elementar sobre as equações de um sistema linear, em notação matricial, $AX = B$ corresponde uma operação elementar sobre as linhas da matriz aumentada $[A \mid B]$ dele:

I. Permutar duas linhas de $[A \mid B]$.

II. Multiplicar todas as entradas de uma linha de $[A \mid B]$ por um mesmo número real não nulo.

III. Somar a uma das linhas de $[A \mid B]$ uma outra linha cujas entradas foram todas multiplicadas por um mesmo número real.

A sequência de operações elementares realizada no Exemplo 1.1.5 pode ser registrada como uma sequência de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada de (1.12):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \tag{1.15}$$

Note que a última matriz nessa sequência é precisamente a matriz aumentada do sistema linear (1.14).

Para descrever o método que aplicamos no exemplo acima, vamos introduzir uma nova definição.

Definição. Uma matriz é dita ser *escalonada* se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

(i) todas suas linhas nulas (se existirem) estão abaixo das linhas não nulas, e

(ii) em cada linha não nula, o primeiro elemento não nulo (lendo da esquerda para a direita), chamado *pivô*, ocorre mais à direita do que o pivô da linha imediatamente acima dela.

Por exemplo, as matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

não são escalonadas (você sabe dizer por quê?), e a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é. Um outro exemplo de matriz escalonada é a última matriz obtida na sequência (1.15). (Não é demais lembrar que barra vertical separando a última coluna das demais designa apenas uma marcação, devendo, assim, ser ignorada ao se verificar se a matriz é escalonada ou não.)

A observação a seguir, apesar de simples, é crucial no que veremos adiante.

Observação. Se $R \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz escalonada e R tem p pivôs, então $p \leq m$ e $p \leq n$.

A primeira desigualdade segue do fato de que o número de pivôs em uma matriz escalonada é igual ao número de linhas não nulas dela. A segunda desigualdade é consequência do fato de que em cada coluna de uma matriz escalonada, há, no máximo, um pivô. $\Diamond$

O processo de escalonamento. Apresentamos , agora, o resultado que está por trás do método de resolução de sistemas lineares que adotaremos nestas notas. Esse resultado garante que o método se aplica a qualquer sistema linear. Sua demonstração é algorítmica, isto é, é apresentada em forma de uma sequência de passos que, uma vez seguidos, conduzem à conclusão desejada.

O procedimento a ser apresentado na demonstração desse resultado (enunciado como um teorema) é conhecido como *algoritmo de eliminação gaussiana* ou *processo de escalonamento*.

Teorema 1.1.6. *Para toda matriz, existe uma sequência de operações elementares sobre linhas que resulta em uma matriz escalonada.*

Demonstração. Dada uma matriz A, submeta-a ao seguinte procedimento, composto de uma sequência finita de operações elementares sobre linhas:

1. Se A é a matriz nula, pare. (Ela já é escalonada.)

2. Se não, encontre a primeira coluna (da esquerda para a direita) de A que contém uma entrada não nula e permute a linha que contém essa entrada com a primeira linha, se necessário. O primeiro elemento não nulo dessa nova primeira linha é chamado *pivô* da linha. (Neste passo, realiza-se uma operação elementar do tipo I.)

3. Por adição de múltiplos adequados da primeira linha nas linhas abaixo dela, zere todas as entradas abaixo do pivô. (Neste passo, são realizadas operações elementares do tipo III.)

4. Volte ao passo 1 e repita o procedimento na matriz que consiste das linhas abaixo da primeira.

O processo termina quando não houver mais linhas no passo 4 ou quando as linhas restantes forem nulas. Em qualquer dos casos, a matriz resultante será escalonada. $\square$

Note que a sequência de operações elementares utilizadas em (1.15) segue os passos do procedimento descrito acima.

Vejamos mais um exemplo do processo de escalonamento.

Para facilitar o registro de cada um dos passos, no que segue, adotaremos a seguinte notação:

- uma operação elementar do tipo I que permuta as linha i e j será denotada por $L_i \leftrightarrow L_j$;

- uma operação elementar do tipo II que multiplica a linha i por $\lambda \neq 0$ será denotada por $L_i \leftarrow \lambda L_i$; e

- uma operação elementar do tipo III que soma à linha j a linha i multiplicada por λ será denotada por $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$.

Os pivôs serão destacados em vermelho para facilitar sua identificação.

Exemplo 1.1.7. Aplique o processo de escalonamento à matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{bmatrix}.$$

Solução.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & \color{red}{-2} & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{bmatrix} 0 & \color{red}{-2} & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{2} L_1} \begin{bmatrix} 0 & \color{red}{-2} & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{2} & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + (-\frac{5}{2}) L_2} \begin{bmatrix} 0 & \color{red}{-2} & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{2} & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{4} L_3} \begin{bmatrix} 0 & \color{red}{-2} & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{2} & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A última matriz na sequência acima é uma matriz escalonada. ◊

Observação. No processo de escalonamento de uma matriz, é comum haver escolhas diferentes que podem ser feitas no passo 2. No exemplo acima, poderíamos ter realizado a operação $L_1 \leftrightarrow L_3$ ou $L_1 \leftrightarrow L_4$ no lugar de $L_1 \leftrightarrow L_2$, logo na primeira etapa. Essas escolhas diferentes conduziriam, ao final do processo, a uma matriz escalonada diferente da que obtivemos.

Em resumo, a matriz escalonada obtida ao final do processo de escalonamento não está univocamente determinada pela matriz com que começamos. ◊

Vale destacar, neste ponto, que no algoritmo de escalonamento descrito na demonstração do Teorema 1.1.6 podemos dispensar operações elementares do tipo II. Elas terão, entretanto, papel fundamental nas próximas duas seções.

Método para resolução de sistemas lineares. Podemos aplicar o Teorema 1.1.6 para desenvolver um método de resolução de sistemas lineares.

Seja $(\mathcal{S})$ um sistema linear de m equações e n incógnitas, com matriz aumentada $M \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$. Pelo Teorema 1.1.6, existe uma matriz escalonada R que pode ser obtida a partir de M por meio de operações elementares sobre linhas. Chamemos de $(\mathcal{S}')$ o sistema linear que tem R como matriz aumentada. Como $(\mathcal{S}')$ foi obtido a partir de $(\mathcal{S})$ por meio de operações elementares sobre suas equações (exatamente a mesma sequência que produziu R a partir de M), esses sistemas são equivalentes. Vejamos como encontrar as soluções de $(\mathcal{S}')$.

Há duas possibilidades:

(1) A matriz R tem um pivô na coluna $n+1$. Neste caso, $(\mathcal{S}')$ tem uma equação da forma $0 = b$, com $b \neq 0$. Logo $(\mathcal{S}')$, e, portanto, também, $(\mathcal{S})$, não tem solução.

(2) A matriz R não tem pivô na coluna $n+1$. Neste caso, se p denota o número de pivôs de R, então $p \leq n$ (pois, como vimos, em uma matriz escalonada há, no máximo um pivô por coluna). Há dois subcasos a considerar:

    (a) Se $p = n$, então $(\mathcal{S}')$, e, portanto, também, $(\mathcal{S})$, tem uma única solução, que é obtida resolvendo a primeira equação não nula, de baixo para cima, de $(\mathcal{S}')$, determinando-se, assim, o único valor possível para a variável x_n. Esse valor é substituído na equação exatamente acima dela, da qual resultará o único valor possível para x_{n-1}, e, assim, por diante, sempre substituindo-se em uma equação os únicos valores obtidos para as variáveis nas equações abaixo dela.

    (b) Se $p < n$, então $(\mathcal{S}')$, e, portanto, também, $(\mathcal{S})$, tem infinitas soluções. Neste caso, a variáveis de $(\mathcal{S}')$ correspondentes às colunas de R, exceto a última, que não têm pivô são chamadas *variáveis livres*. As variáveis livres de $(\mathcal{S}')$ são em número de $n - p$. Para cada escolha independente de valores reais para as variáveis livres, uma solução para $(\mathcal{S}')$ pode ser obtida pelo mesmo método utilizado no caso (a). Assim, atribuem-se parâmetros independentes às variáveis livres e escrevem-se as demais (chamadas *variáveis pivô*) em termos das livres.

O método para encontrar soluções descrito no caso (2), acima, começando pela primeira equação não nula, de baixo para cima, e substituindo os valores encontrados nas equações acima dela é chamado *retrossubstituição*.

Observação. Segue da análise acima que se um sistema é possível e indeterminado, isto é, se tem pelo menos duas soluções, então, necessariamente, ele está no caso (2-b) e, portanto, tem, de fato, infinitas soluções. $\Diamond$

No próximo exemplo, ilustramos não apenas o processo de escalonamento da matriz aumentada de um sistema, como, também, aplicamos o método de retrossubstituição para encontrar todas as suas soluções.

Exemplo 1.1.8. Encontre todas as soluções do sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 7y = 3. \end{cases}$$

Solução. Vamos escalonar a matriz aumentada do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \color{red}{5} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Estamos no caso (2-b), em que não há pivô na última coluna e existem 2 pivôs, destacados em vermelho.

Os pivôs ocorrem nas colunas correspondentes às variáveis x e y, que são, portanto, variáveis pivô. A coluna correspondente à variável z não contém pivô; assim, z é uma variável livre. Atribuímos um parâmetro a ela, digamos $z = t$, e resolvemos o sistema resultante,

$$\begin{cases} x - 2y - t = 1 \\ 5y - t = -2, \end{cases}$$

por retrossubstituição. Da última equação, resolvendo para y, obtemos $y = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}t$. Substituindo esse valor na primeira equação e resolvendo para x, obtemos $x = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}t$. Logo, as soluções do sistema original são dadas por

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{7}{5}t,\ -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}t,\ t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soluções particulares são obtidas escolhendo valores para o parâmetro t. Por exemplo, tomando $t = 1$, encontramos a solução $(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}, 1)$; tomando $t = 2$, encontramos a solução $(3, 0, 2)$; etc. ◊

Sistemas lineares homogêneos. Um sistema linear da forma $AX = 0$, em que 0 denota uma matriz de uma única coluna cujas entradas são todas iguais ao número 0, é dito *homogêneo*.

Todo sistema homogêneo é possível, uma vez que tem, pelo menos, a chamada *solução trivial*: $(0, 0, \dots, 0)$.

Teorema 1.1.9. *Todo sistema linear homogêneo com mais incógnitas do que equações é possível indeterminado.*

Demonstração. Se p denota o número de pivôs da matriz escalonada obtida pelo processo de escalonamento a partir da matriz aumentada de um sistema homogêneo com m equações e n incógnitas, então, como vimos $p \leq m$. Mas, por hipótese, $m < n$. Isso resulta em $p < n$; logo, estamos no caso (2-b), já que, como o sistema é homogêneo, a última coluna dessa matriz escalonada é formada exclusivamente por zeros, sem pivô, portanto. □

É importante observar que o teorema nada afirma sobre sistemas homogêneos com número de incógnitas menor ou igual ao número de equações. Um sistema desses pode ser ou determinado ou indeterminado. (Você consegue produzir exemplos para os dois casos?)

Outra ressalva é a de que o teorema apenas se aplica a sistemas homogêneos. É muito fácil dar exemplos de sistemas não homogêneos com mais incógnitas do que equações e que são impossíveis.

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear I: Exs. 1–11.

1.2 Matrizes

Vimos, na seção anterior, que matrizes podem ser utilizadas para denotar sistemas lineares de modo mais compacto e, mais importante, podem ser sujeitadas ao processo de escalonamento.

Nesta seção, veremos que existem operações que nos permitirão falar na álgebra de matrizes.

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, escreveremos, a título de abreviação, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, ou, simplesmente, $A = (a_{ij})$, quando não houver dúvida a respeito do tamanho de A.

Dizemos que duas matrizes são iguais se tiverem o mesmo tamanho e suas entradas correspondentes forem iguais. Mais detalhadamente, dadas $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{r \times s}(\mathbb{R})$, então $A = B$ se, e somente se, $m = r, n = s$ e, para cada $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, tivermos $a_{ij} = b_{ij}$.

Dadas matrizes $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, a *soma* $A + B$ é definida como sendo a matriz dada por $A + B = (c_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todos $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots n$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e dado um número real λ, define-se a *multiplicação* de λ por A como sendo a matriz dada por $\lambda A = (d_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, em que $d_{ij} = \lambda a_{ij}$, para todos $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots n$.

Por exemplo,

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 3 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

O produto de duas matrizes, a ser definido em seguida, não envolve matrizes de mesmo tamanho. Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e uma matriz $B = (b_{ij}) \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$, define-se o *produto* $AB \in M_{m\times r}(\mathbb{R})$, como sendo a matriz dada por $AB = (e_{ij})$, em que

$$e_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

para todos $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, r$. Em poucas palavras, o produto de uma matrix $m \times n$ por uma matriz $n \times r$ é uma matriz $m \times r$ cuja entrada na posição (i, j) é dada pelo "produto da linha i de A pela coluna j de B". Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 10 & 8 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Não está definido o produto de uma matriz de n colunas por uma matriz de m linhas caso $n \neq m$.

As operações definidas entre matrizes satisfazem as seguintes propriedades, que podem ser diretamente demonstradas a partir das definições.

Proposição 1.2.1. *Sejam A, B, C, M, N, L matrizes e sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Então, se estão definidas as matrizes no lado esquerdo das igualdades, as matrizes do lado direito também estão definidas, e elas são iguais:*

(i) $A + B = B + A$;

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(iii) $(AM)N = A(MN)$;

(iv) $A(M + L) = AM + AL$;

(v) $(A + B)M = AM + BM$;

(vi) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

(vii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;

(viii) $\lambda(AM) = (\lambda A)M = A(\lambda M)$;

(ix) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

Ou seja, muitas das propriedades das operações entre números reais continuam válidas para matrizes. Porém, ao contrário do produto entre números, o produto entre matrizes não é comutativo. Isto é, se A e B são matrizes e ambos os produtos AB e BA estão definidos, nem sempre eles são iguais. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz que tem o mesmo número de linhas que o númereo de colunas é chamada *matriz quadrada*. O conjunto de todas as matrizes quadradas $n \times n$ será denotado, simplesmente, por $M_n(\mathbb{R})$.

A *matriz identidade* de tamanho $n \times n$ é definida como sendo a matriz quadrada $I_n = (e_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, em que $e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Por exemplo,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

É fácil concluir que para qualquer matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ vale $I_m A = A = AI_n$.

Definição. Dizemos que uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$ é *inversível* se existir uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = I_n$ e $BA = I_n$.

Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ é inversível, pois tomando-se $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, vale $AB = BA = I_2$. Já a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é inversível, pois se $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ é uma matriz arbitrária, temos $CD = \begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, que não é a matriz identidade, quaisquer que sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.2.2. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz inversível. Então, existe uma única matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = I_n$. Essa matriz será denominada* matriz inversa *de A e será denotada por A^{-1}.*

Demonstração. Sejam $B, C \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $AB = BA = I_n$ e $AC = CA = I_n$. Então, $B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_n = C$. $\square$

As demonstrações das propriedades enunciadas na próxima proposição são simples e ficam a cargo do leitor.

Proposição 1.2.3. *Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes inversíveis. Então,*

(i) *a matriz AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;*

(ii) *a matriz* A^{-1} *é inversível e* $(A^{-1})^{-1} = A$*;*

(iii) *a matriz* I_n *é inversível e* $I_n^{-1} = I_n$*.*

Veremos, na próxima seção, que se uma matriz tiver um inverso de um lado, então ela será automaticamente inversível. Mais precisamente, veremos, após a demonstração do Teorema 1.3.8, que se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são tais que $AB = I_n$, então, A é inversível e $B = A^{-1}$. (Em particular, $BA = I_n$.)

Observação. Vale ressaltar que o conceito de invertibilidade só se aplica a matrizes quadradas. Para matrizes não quadradas, fenômenos "patológicos" podem ocorrer; por exemplo, considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Então, $AB = I_1$, mas $BA \neq I_2$. $\Diamond$

Método prático para inversão de matrizes. Uma matriz $n \times n$ é chamada *matriz elementar* se pode ser obtida a partir da matriz identidade I_n por meio de uma operação elementar sobre as linhas de I_n. Vejamos alguns exemplos:

- A matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar, pois foi obtida a partir de I_3 pela permutação das linhas 2 e 3.
- A matriz $F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar, pois foi obtida a partir de I_3 por meio da multiplicação da primeira linha por -2.
- A matriz $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar, pois foi obtida a partir de I_3 por meio da soma da primeira linha multiplicada por 3 à terceira linha.

O efeito da multiplicação de uma matriz elementar pela esquerda é bem familiar:

Proposição 1.2.4. *Seja* $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ *e seja* $E \in M_m(\mathbb{R})$ *uma matriz elementar. Então* EA *é a matriz obtida a partir de* A *pela mesma aplicação da operação elementar sobre linhas que produziu* E *a partir de* I_m*.*

Demonstração. Conside, um por vez, cada um dos três tipos de operação elementar sobre linhas de uma matriz e compare a matriz resultante com o produto pela uma matriz elementar correspondente. $\square$

Por exemplo, considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-\frac{1}{2}) L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Então, $B = EA$ e E é a matriz obtida por

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-\frac{1}{2}) L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Vimos que toda operação elementar sobre as linhas de uma matriz pode ser desfeita por uma operação elementar do mesmo tipo. Logo, toda matriz elementar é inversível, e sua inversa é também elementar: se E é obtida a partir de I_n por uma operação elementar, seja F a matriz obtida a partir de I_n pela operação elementar que a desfaz. Então $FE = I_n = EF$.

A seguir, introduziremos um resultado que dará origem a um método prático para encontrar a inversa de uma matriz, quando existir.

Teorema 1.2.5. *Se existe uma sequência de operações elementares sobre linhas que a partir de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ produz a matriz identidade I_n, então A é inversível. Além disso, a mesma sequência de operações elementares sobre linhas que produziu I_n a partir de A produz A^{-1} a partir de I_n.*

Demonstração. Como toda operação elementar sobre linhas pode ser realizada por multiplicação à esquerda por matrizes elementares, dizer que existe uma sequência de operações elementares que produz I_n a partir de A é dizer que existem matrizes elementares $E_1, E_2, \dots, E_r \in M_n(\mathbb{R})$ tais que

$$E_r E_{r-1} \dots E_2 E_1 A = I_n. \tag{1.16}$$

Como, pelo item (i) da Proposição 1.2.3, o produto de matrizes inversíveis é uma matriz inversível, a matriz $M = E_r E_{r-1} \dots E_2 E_1$ é inversível. Agora,

$$A = I_n A = (M^{-1} M) A = M^{-1} (MA) = M^{-1} I_n = M^{-1},$$

em que (1.16) foi utilizada na penúltima igualdade. Portanto, A, sendo a inversa de uma matriz inversível, pela parte (ii) da Proposição 1.2.3, é também inversível e vale

$$A^{-1} = (M^{-1})^{-1} = M = M I_n = E_r E_{r-1} \dots E_2 E_1 I_n,$$

que é a matriz obtida a partir de I_n pela aplicação da mesma sequência de operações elementares que produziu I_n a partir de A. □

Costumamos registrar o método obtido na demonstração do teorema acima da seguinte maneira:

$$[A \mid I_n] \longrightarrow [I_n \mid A^{-1}].$$

Essa notação quer dizer que a concatenação, à direita, da matriz identidade I_n à matriz A origina uma matriz $n \times 2n$ que, após ser sido submetida a uma sequência (apropriada) de operações elementares sobre linhas, produz uma matrix $n \times 2n$ que tem, na sua metade esquerda, a matriz identidade I_n e na direita, precisamente a matriz inversa de A. Ou seja, ao se realizar simultaneamente na matriz identidade I_n a sequência de operações elementares sobre linhas que produz I_n a partir de A, obtém-se A^{-1}. É esse o conteúdo do Teorema 1.2.5. Em breve, veremos exemplos. É preciso, porém, fazer alguns comentários preliminares.

Quando se vai aplicar o Teorema 1.2.5 é relevante notar que se existe uma sequência de operações elementares sobre linhas que conduz uma matriz quadrada A a uma matriz escalonada R com pivôs em todas suas linhas, então essa sequência pode ser estendida a uma que termina na matriz identidade. Para tanto, basta transformar todos os pivôs de R em 1 (por meio de operações elementares do tipo II) e, em seguida, proceder a um "retroescalonamento", isto é, "escalonamento de baixo para cima", a fim de se zerar todas as entradas acima dos pivôs.

Em resumo, o Teorema 1.2.5 se aplica a qualquer matriz quadrada A que, após o processo de escalonamento, origina uma matriz escalonada com pivôs em todas suas linhas. E, assim, a sequência de operações elementares à qual a matriz A deve ser submetida a fim de produzir a matriz identidade pode, sempre, ser realizada na seguinte ordem:

1. Por escalonamento, produz-se uma matriz escalonada a partir de A.

2. Em seguida, por operações elementares do tipo II, transformam-se todos os pivôs em 1.

3. Finalmente, por "retroescalonamento", zeram-se todas as entradas acima dos pivôs.

Realizando-se exatamente essa mesma sequência de operações elementares mas começando pela matriz identidade, obtemos, segundo o Teorema 1.2.5, a matriz inversa de A.

Vejamos dois exemplos. O primeiro é de uma matriz 2×2.

Exemplo 1.2.6. Encontre a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução. Realizaremos operações elementares simultâneas sobre as linhas de A e da matriz identidade I_2 com o intuito de obter, a partir de A, a matriz identidade I_2.

Para manter controle do processo, concatenamos a matriz identidade I_2 à direita da matriz A, obtendo, assim, a matriz 2×4

$$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

e realizamos operações elementares sobre linhas tendo em mente o objetivo de obter na metade da esquerda dessa matriz 2×4 a matriz identidade. Procedendo dessa maneira, as operações elementares utilizadas estarão, automaticamente, sendo realizadas na metade da direita, que iniciou o processo sendo ocupada pela matriz I_2.

A sequência de operações elementares sobre linhas será aquela descrita acima, qual seja, começamos por escalonar A, em seguida transformamos os pivôs da escalonada em 1 e, finalmente, por retroescalonamento, zeramos as entradas acima dos pivôs.

Para a matriz em questão, uma única operação elementar já produz uma matriz escalonada:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

A matriz da metade esquerda é escalonada; tem um pivô na primeira linha e um na segunda. Passemos, agora, à transformação de seus pivôs em 1, realizando duas operações elementares do tipo II:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftarrow (\frac{1}{4})L_2]{L_1 \leftarrow (\frac{1}{2})L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Finalmente, trabalhando de baixo para cima, zeramos a entradas acima do pivô da segunda linha, por meio de uma operação elementar do tipo III:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + (\frac{3}{2})L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

A matriz da metade esquerda é a matriz identidade I_2. A matriz da metade direita foi obtida a partir da matriz identidade I_2 por meio da mesma sequência de operações elementares sobre linhas que produziu I_2 a partir de A. Segue, do Teorema 1.2.5, que a matriz da metade direita é a inversa de A. Ou seja, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. ◊

Nosso próximo exemplo é de uma matriz 3×3.

Exemplo 1.2.7. Encontre a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Solução. Procederemos como acima: primeiramente, escalonamos A, em seguida, transformamos os pivôs da matriz escalonda em 1, e, finalmente, zeramos as entradas acima dos pivôs por retroescalonamento.

Uma sequência completa de operações elementares sobre linhas que realiza esse procedimento é:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow (-1)L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + (-3)L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + (-2)L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Note que, neste exemplo, na terceira etapa do processo (retroescalonamento), é preciso, primeiramente, zerar as entradas acima do pivô da terceira linha e, em seguida, zerar a entrada acima do pivô da segunda. O retroescalonamento procede de baixo para cima e da direita para a esquerda.

A matriz na metade da direita ao final da sequência acima foi obtida a partir da matriz identidade I_3 pela mesma sequência de operações elementares sobre linhas que produziu I_3 a partir de A. Segue que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Neste ponto, um comentário é devido. Veja que só se pode aplicar esse método de inversão de matrizes se se sabe, *de antemão*, que existe uma sequência de operações elementares sobre linhas que produz a matriz identidade a partir da matriz A (ou, equivalentemente, como acabamos de ver, que existe uma sequência de operações elementares sobre linhas que produz uma matriz escalonada com pivôs em todas suas linhas).

Veremos, na próxima seção, que uma matriz A será inversível se, e somente se, o processo de escalonamento conduzi-la a uma matriz escalonada com pivôs em todas as linhas. Isso garantirá que o procedimento descrito no Teorema 1.2.5 pode ser aplicado a qualquer matriz. Mais precisamente, dada uma matriz quadrada A, produz-se, a partir dela, por meio do processo de escalonamento, uma matriz escalonada R. Se R tiver pivôs em todas suas linhas, continuamos operando com linhas até obter a matriz identidade e a inversa de A; se não, A não é inversível.

Na próxima seção veremos, também, um outro critério simples para determinar se uma matriz é inversível ou não e que independe do processo de escalonamento.

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear I: Exs. 12–16.

1.3 Determinantes

Nesta seção, seremos menos rigorosos em nossos argumentos. Muitos dos resultados serão enunciados sem demonstração. Recomendamos, ao leitor interessado em maiores detalhes, a leitura de [**7**, Seções 2.1 e 2.2] ou [**1**, Capítulo 2]. Para um tratamento rigoroso da teoria de determinantes, recomendamos [**5**, Capítulo 7].

O determinante de uma matriz quadrada A é um número real associado a ela que contém informação relevante a respeito de sua invertibilidade. Antes de defini-lo, porém, vamos introduzir um conceito que será utilizado no que segue.

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ é chamada *triangular superior* se $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$, ou seja, se a matriz tiver o formato

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Também faremos uso da seguinte definição.

Definição. Dada uma matriz $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (não necessariamente quadrada), define-se a matriz *transposta* de B como sendo a matriz $B^{\mathrm{t}} = (c_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, em que $c_{ji} = b_{ij}$, para todos $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Ou seja, para cada $j = 1, \dots, n$, a j-ésima linha de B^{t} é a j-ésima coluna de B. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

A respeito da operação de transposição de matrizes, não é difícil demonstrar que

(i) ${I_n}^{\mathrm{t}} = I_n$, para todo $n \geq 1$;

(ii) se A e B são matrizes tais que o produto AB esteja definido, então o produto $B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$ está definido e vale $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$;

(iii) se D é uma matriz inversível, então D^{t} também é inversível e vale $(D^{\mathrm{t}})^{-1} = (D^{-1})^{\mathrm{t}}$.

Dada uma matriz quadrada A, vamos assumir, sem demonstração, que sempre existe um número real, chamado *determinante* de A e denotado por $\det(A)$, que goza das seguintes propriedades:

(1) Para qualquer inteiro positivo n, vale

$$\det(I_n) = 1.$$

(2) Os efeitos das operações elementares sobre linhas de uma matriz quadrada A em seu determinante são os seguintes:

I. Se B é obtida de A por meio da permutação de duas linhas de A, então

$$\det(B) = -\det(A).$$

II. Se B é obtida a partir de A por meio da multiplicação de uma das linhas de A pelo número $\lambda \neq 0$, então

$$\det(B) = \lambda \det(A).$$

III. Se B é obtida a partir de A por meio da adição de uma linha multiplicada por um número a uma outra linha, então

$$\det(B) = \det(A).$$

(3) Para qualquer matriz quadrada A, vale

$$\det(A) = \det(A^{\mathrm{t}}).$$

Segue, imediatamente, das propriedades (1) e (2-II), que se $A = [a]$ é uma matriz 1×1, com $a \neq 0$, então $\det(A) = a$. Seguirá da parte (i) da Proposição 1.3.1, que veremos a seguir, que isso também vale se $a = 0$.

Algumas consequências imediatas dessas propriedades são enunciadas a seguir.

Proposição 1.3.1. *Seja A uma matriz quadrada.*

(i) *Se A tem uma linha (ou coluna) nula, então* $\det(A) = 0$.

(ii) *Se A tem duas linhas (ou colunas) iguais, então* $\det(A) = 0$.

(iii) *Se A tem tamanho $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Demonstração. Para (i), suponha que A tenha uma linha nula. Então, A pode ser obtida a partir de si mesma pela multiplicação de sua linha nula por 2. Logo, da propriedade (2-II), obtemos $\det(A) = 2\det(A)$. Daí, obtém-se $\det(A) = 0$.

Para (ii), suponha que A tenha duas linhas iguais. Utilizamos essas linhas para produzir, por meio de uma operação elementar do tipo III, uma nova matriz B que tem uma linha nula. Segue de (i) que $\det(B) = 0$. Mas, como, pela propriedade (2-III), $\det(A) = \det(B)$, obtemos $\det(A) = 0$.

Para as versões de (i) e (ii) em termos de colunas, basta, agora, utilizar a propriedade (3), uma vez que as colunas de A são as linhas de A^t.

Finalmente, (iii) é obviamente verdadeiro se $\lambda = 0$. Se $\lambda \neq 0$, o resultado segue da propriedade (2-II), uma vez que λA nada mais é do que a matriz obtida a partir de A pela multiplicação de cada uma de suas n linhas por λ. □

Uma outra consequência das propriedades (1)–(3), e da proposição que acabamos de ver, permitirá que utilizemos o processo de escalonamento para calcular determinantes:

Proposição 1.3.2. *Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular superior, digamos*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Demonstração. Se todas as entradas a_{ii} da diagonal principal de A forem não nulas, então pode-se obter, a partir de A, por meio de uma sequência de operações elementares do tipo III, a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para tanto, basta proceder de baixo para cima, utilizando, primeiramente, a entrada a_{nn} para zerar todas as entradas acima dela na n-ésima coluna; em seguida, utilizar $a_{n-1,n-1}$ para zerar as entradas acima dela na $n-1$-ésima coluna; e assim por diante. (Dito de outra forma, basta realizar "retroescalonamento", como vínhamos chamando, na matriz D.)

Como apenas operações elementares do tipo III foram utilizadas, segue, da propriedade (2-III), que $\det(D) = \det(A)$.

Agora, utilizando a propriedade (2-II) em cada uma das linhas de D, obtemos

$$\det(D) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}\det(I_n) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

Nessa última igualdade, utilizamos a propriedade (1). Logo, no caso de todas as entradas na diagonal principal de A serem não nula, obtemos $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Vejamos, agora, como argumentar no caso em que alguma das entradas na diagonal principal de A é nula. Nesse caso, considere, de baixo para cima, a primeira linha de A que contém uma entrada nula na diagonal principal, digamos que essa linha seja a i-ésima. O mesmo processo descrito acima resultará em uma matriz B (agora não necessariamente diagonal) com a i-ésima linha nula. Pela parte (i) da Proposição 1.3.1, $\det(B) = 0$. Como $\det(A) = \det(B)$, teremos, também, $\det(A) = 0$, coincidindo, portanto, com o produto das entradas em sua diagonal principal. □

Essa proposição, conjugada com a propriedade (3), acarreta o fato de que o determinante de uma matriz triangular inferior (ou seja, uma matriz cujas entradas acima da diagonal principal são todas nulas) também é dado pelo produto dos elementos ao longo da diagonal principal, já que a transposta de uma matriz triangular inferior é uma matriz triangular superior com a mesma diagonal.

Além disso, a propriedade (3) também nos proporciona um método de cálculo do determinante fazendo uso de "operações elementares sobre colunas" (ou seja, valem as afirmações da propriedade (2) com cada ocorrência de "linha" trocada por "coluna").

De posse da propriedade (2) e da Proposição 1.3.2, obtemos um método para calcular o determinante de qualquer matriz quadrada fazendo uso do processo de escalonamento, uma vez que toda matriz quadrada escalonada é triangular superior, desde que, em cada aplicação de uma operação elementar sobre linhas, se registre o efeito acarretado no determinante.

Vejamos dois exemplos, um, primeiro, numérico, e outro contendo uma fórmula familiar.

Exemplo 1.3.3. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução. Vamos escalonar A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Aqui, fizemos uso de operações elementares do tipo III utilizando a segunda linha para zerar três entradas na primeira coluna. Como foram usadas apenas operações do tipo III, segue $\det(B) = \det(A)$. Agora,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} = C.$$

Nessa passagem, realizamos uma operação elementar do tipo I, permutando a primeira e segunda linhas. Assim, $\det(C) = -\det(B)$; portanto, como $\det(B) = \det(A)$, segue que $\det(A) = -\det(C)$. Aplicando mais uma operação elementar do tipo III, que não altera o determinante, obtemos:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{bmatrix} = D.$$

Logo, $\det(A) = -\det(C) = -\det(D)$. Finalmente, um último uso de uma operação elementar do tipo III:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = E.$$

Como $\det(E) = 1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-6) = 18$, uma vez que E é triangular superior, concluímos que $\det(A) = -\det(D) = -\det(E) = -18$. ♢

Exemplo 1.3.4. Mostre, usando o que vimos sobre o efeito no determiante de operações elementares sobre linhas de uma matriz, que

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Solução. Consideremos, primeiramente, o caso em que $a = 0$. Temos

$$\det \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix} = -cb,$$

o que comprova a fórmula neste caso. Suponha, agora, que $a \neq 0$. Neste caso,

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Ou seja, a fórmula vale quaisquer que sejam a, b, c, d. ♢

Uma das propriedades mais importantes do determinante de uma matriz será enunciada no resultado a seguir, apresentado sem demonstração.

Teorema 1.3.5. *Sejam A e B matrizes quadradas de mesmo tamanho. Então,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Esse teorema tem a seguinte consequência imediata.

Corolário 1.3.6. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz inversível. Então,* $\det(A) \neq 0$ *e* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Demonstração. A aplicação da fórmula no Teorema 1.3.5 à igualdade matricial $AA^{-1} = I_n$ fornece

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

Em particular, $\det(A) \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. □

Veremos, a seguir, que vale a recíproca: toda matriz quadrada de determinante não nulo é inversível. Para isso, precisaremos, antes, de um lema.

Lema 1.3.7. *Seja A uma matriz quadrada e seja R uma matriz obtida a partir de A por meio da aplicação de uma sequência de operações elementares sobre linhas. Então,* $\det(A) \neq 0$ *se, e somente se,* $\det(R) \neq 0$.

Demonstração. Suponha que R seja uma matriz obtida a partir de A pela aplicação de uma única operação elementar sobre as linhas de A. Vimos, na página 27, qual é o efeito, no determinante, de operações elementares sobre linhas. Lembremos que operações elementares do tipo II só podem ser realizadas utilizando-se constantes não nulas. Assim, se $\det(A) \neq 0$, o determinante de R também será não nulo. Como A pode ser obtida a partir de R pela aplicação da operação elementar "inversa", vale a equivalência.

O argumento para uma sequência (finita) de operações elementares sobre linhas é indutivo: a condição sobre o determinante passa de uma matriz para a seguinte na sequência. □

Finalmente, podemos enunciar um resultado que relaciona invertibilidade de matrizes com sistemas lineares. Para tanto, observemos, primeiramente, que se $AX = B$ é um sistema linear (em notação matricial) com n variáveis e se $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ é uma sequência de n números reais, então $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ é solução do sistema $AX = B$ se, e somente se, $AS = B$, em que $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ e AS denota o produto matricial. (É esse fato, aliás, que justifica a adoção da notação matricial para sistemas lineares.) Se, de fato, ocorrer $AS = B$, será comum, deste ponto em diante, referirmo-nos à matriz S também como uma solução do sistema linear $AX = B$.

O próximo resultado é extremamente útil e será utilizado diversas vezes nessas notas como parte da argumentação em demonstrações de outros resultados e em resoluções de exercícios.

Teorema 1.3.8. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. São equivalentes:*

(a) *A é inversível.*

(b) *Para qualquer $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, o sistema linear $AX = B$ é possível determinado.*

(c) *O sistema linear homogêneo $AX = 0$ é possível determinado.*

(d) $\det(A) \neq 0$.

Antes de dar início à demonstração, é preciso esclarecer o que se entende por dizer que as afirmações (a)–(d) são equivalentes. O que se deve entender de enunciados desse tipo é que tomando-se qualquer uma das quatro afirmações como hipótese pode se obter qualquer uma das outras três como consequência dela. Na demonstração que veremos abaixo, trataremos de mostrar que existe uma sequência de implicações

$$\text{(a)} \implies \text{(b)} \implies \text{(c)} \implies \text{(d)} \implies \text{(a)},$$

o que, por certo, estabelecerá a equivalência entre as quatro afirmações.

Demonstração. Para ver que (a) implica (b), suponha que A é inversível, tome $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e considere o sistema linear $AX = B$. Para mostrar que esse sistema é possível determinado, precisamos mostrar que ele tem uma única solução. Considere a matriz $S = A^{-1}B$. Mostremos que S é a única solução de $AX = B$. Por um lado, S é, de fato, solução de $AX = B$, uma vez que

$$AS = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_nB = B.$$

Vejamos por que S é a única solução de $AX = B$. Suponha que $S' \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ seja uma solução de $AX = B$, isto é, que S' satisfaça $AS' = B$. Multiplicando essa igualdade por A^{-1} à esquerda em ambos os lados, obtemos

$$A^{-1}(AS') = A^{-1}B.$$

O lado esquerdo dessa igualdade é igual a S', ao passo que o direito, a S. Ou seja, $S' = S$, o que prova que S é a única solução do sistema linear $AX = B$. Isso quer dizer que ele é possível determinado.

É claro que (b) implica (c), pois (c) é apenas o caso particular de (b) em que a matriz B é a matriz nula.

Vejamos, agora, por que (c) implica (d). Se o sistema $AX = 0$ é possível determinado e $T \in M_{n\times(n+1)}(\mathbb{R})$ é uma matriz obtida no processo de escalonamento da matriz aumentada $[A \mid 0]$ do sistema $AX = 0$, então T tem exatamente n pivôs, ou seja, T é da forma $T = [R \mid 0]$, em que R é uma matriz quadrada de tamanho $n \times n$ que é triangular superior e cujas entradas na diagonal principal — seus pivôs — são todas não nulas. Assim, $\det(R) \neq 0$. Como R foi obtida a partir de A por meio de operações elementares sobre linhas, segue, do Lema 1.3.7 que $\det(A) \neq 0$.

Finalmente, tratemos de mostrar que (d) implica (a). Suponha que A tenha determinante não nulo e seja R uma matriz escalonada obtida a partir de A por operações elementares sobre linhas. Pelo Lema 1.3.7, $\det(R) \neq 0$. Como R é triangular superior — toda matriz quadrada escalonada é triangular superior —, R tem que ter pivôs em todas as entradas ao longo de sua diagonal principal. Multiplicando cada uma das linhas de R pelo inverso do pivô correspondente, que é uma operação elementar do tipo II, e, em seguida, fazendo retroescalonamento, obteremos a matriz identidade a partir de R, e, portanto, também a partir de A, por meio de operações elementares sobre linhas. Mas isso implica, pelo Teorema 1.2.5, que A é inversível.

Logo, as quatro condições são equivalentes. □

Em particular, da equivalência entre (a) e (d), temos, agora um critério de invertibilidade de matrizes em termos de determinantes: dada uma matriz quadrada A,

$$A \textit{ é inversível se, e somente se, } \det(A) \neq 0.$$

Esse critério será utilizado diversas vezes ao longo destas notas.

Note que segue, também, do resultado acima que se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz para a qual existe uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = I_n$, então A é inversível e $A^{-1} = B$. Isso, pois de $AB = I_n$, segue que $\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(I_n) = 1$. Portanto, $\det(A) \neq 0$, o que implica, como vimos, que A é inversível. Multiplicando a igualdade $AB = I_n$ por A^{-1} à esquerda, obtemos $B = A^{-1}$. Ou seja, para demonstrar que uma matriz é inversível, basta exibir uma inversa à direita. Um argumento análogo mostra que uma matriz quadrada que tem uma inversa à esquerda é inversível.

Um outro comentário relevante retoma um tema deixado incompleto na seção anterior. No Teorema 1.2.5, havíamos visto que se há uma sequência de operações elementares sobre linhas que produz a partir de uma matriz quadrada A uma matriz escalonada com pivôs em todas suas linhas, então a matriz A será inversível.

Com o que temos, agora, nesta seção, é possível mostrar que vale também a recíproca, e, portanto, essas duas condições são, de fato, equivalentes. Vejamos por quê. Seja A uma matriz quadrada e seja R uma matriz escalonada obtida a partir de A por meio de uma sequência de operações elementares sobre linhas. Sabemos, pelo Teorema 1.3.8, que A é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. Mas, pelo Lema 1.3.7, isso é equivalente a termos $\det(R) \neq 0$. Assim, A será inversível se, e só se, $\det(R) \neq 0$. Como R é triangular superior, essa condição ocorrerá se, e somente se, R tiver pivôs em todas as suas linhas (já que, pela Proposição 1.3.2, seu determinante é dado pelo produto dos elementos na diagonal principal).

Concluindo, o procedimento, visto no Teorema 1.2.5, de construção da inversa de uma matriz quadrada A por meio de operações elementares sobre linhas só resultará na matriz identidade se A for inversível.

Terminamos esta seção com uma ressalva importante. Apesar de a função determinante ser multiplicativa, de acordo com o Teorema 1.3.5, ela não é uma função aditiva, ou seja se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então não vale sempre que $\det(A+B)$ será igual à soma dos números $\det(A)$ e $\det(B)$, como mostra, por exemplo, a conta a seguir:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2,$$

ao passo que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1 + 1 = 0.$$

Observação. Há outros métodos conhecidos para o cálculo de determinantes, como, por exemplo, as fórmulas de Sarrus (para determinantes de matrizes 3×3) e de Laplace (também conhecida como expansão em cofatores). No Apêndice A, o leitor interessado encontra uma descrição, não acompanhada de demonstrações, dessas fórmulas.

Ainda, no que tange ao uso de determinates para resolução de sistemas lineares, deve-se mencionar a fórmula de Cramer (que não será tratada nessas notas, mas que é apresentada com detalhes, por exemplo, em [**5**].) $\Diamond$

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear I: Exs. 17–34.

2

Vetores

Neste capítulo, será definido o conjunto dos vetores no espaço tridimensional e serão introduzidas operações envolvendo os elementos desse conjunto.

Será preciso assumir, no que segue, alguns conhecimentos de geometria euclidiana no plano e no espaço, usualmente vistos nas disciplinas de matemática no Ensino Médio.

O conjunto formado por todos os pontos do espaço tridimensional, ambiente familiar aos alunos de Ensino Médio, onde se dá o estudo da geometria espacial, será denotado por $\mathbb{E}^3$.

A referência principal para este capítulo e o próximo é o livro [**3**].

2.1 Vetores e operações entre vetores

Dados dois pontos $A, B \in \mathbb{E}^3$, o par ordenado (A, B) será denominado *segmento orientado* de extremidade inicial A e extremidade final B.

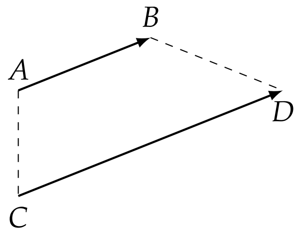
Ao segmento orientado (A, B) de $\mathbb{E}^3$ associamos um vetor, denotado por $\overrightarrow{AB}$. No conjunto dos vetores, está definida a seguinte relação de igualdade: se $A, B, C, D \in \mathbb{E}^3$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, as seguinte três condições estiverem satisfeitas:

(i) Os segmentos de reta AB e CD têm o mesmo comprimento.

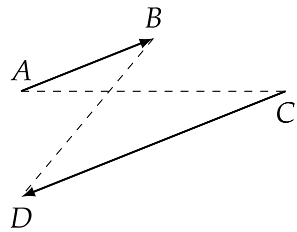
(ii) Os segmentos de reta AB e CD são paralelos.

(iii) Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm o mesmo sentido.

Sejam (A, B) e (C, D) segmentos orientados tais que os segmentos de reta AB e CD sejam pararelos. Dizemos que (A, B) e (C, D) têm o *mesmo sentido* se $AC \cap BD = \varnothing$. Caso contrário, dizemos que (A, B) e (C, D) têm *sentidos opostos*.[1]



mesmo sentido



sentidos opostos

Por convenção, os segmentos de reta de comprimento nulo, isto é, aqueles da forma AA, são paralelos a qualquer outro segmento de reta. Ainda, convenciona-se também que os segmentos orientados (A, A) e (C, D) têm o mesmo sentido, quaisquer que sejam $A, C, D \in \mathbb{E}^3$.

Se $\vec{v}$ é um vetor e $A, B \in \mathbb{E}^3$ são tais que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, dizemos que o segmento orientado (A, B) é um *representante* do vetor $\vec{v}$.

Para todos $A, B \in \mathbb{E}^3$, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$. Esse vetor será chamado *vetor nulo* e será denotado por $\vec{0}$.

O conjunto de todos os vetores será denotado por $\mathbb{V}^3$.

Dado $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$, sejam $A, B \in \mathbb{E}^3$ tais que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Define-se o *comprimento* (ou *norma*) de $\vec{v}$ como sendo o comprimento do segmento de reta AB. O comprimento de $\vec{v}$ será denotado por $\|\vec{v}\|$. É claro que $\left\|\vec{0}\right\| = 0$ e que o vetor nulo é o único vetor de $\mathbb{V}^3$ com comprimento igual a 0.

Dado $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, com $A, B \in \mathbb{E}^3$, define-se o *vetor oposto* de $\vec{v}$, denotado por $-\vec{v}$, como sendo o vetor $\overrightarrow{BA}$. (Isto é, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$).

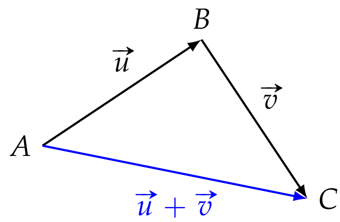
Dados dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$, dizemos que eles são *paralelos* se tiverem representantes paralelos, isto é, se, escrevendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, com $A, B, C, D \in \mathbb{E}^3$, os segmentos de reta AB e CD forem paralelos. Por convenção, o vetor nulo é paralelo a qualquer vetor.

A próxima observação será crucial no que segue.

Observação. Dados $A \in \mathbb{E}^3$ e $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$, existe um único $B \in \mathbb{E}^3$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. (Ou seja, fixado um ponto e um vetor, existe um representante desse vetor com extremidade inicial naquele ponto.) $\lozenge$

[1] Essa é a definição de segmentos orientados de mesmo sentido quando os segmentos de reta suporte são paralelos, mas não estão contidos em uma mesma reta. Se (A, B) e (C, D) são segmentos orientados com AB e CD contidos em uma mesma reta, tome pontos C', D' fora dessa reta de forma que CD e $C'D'$ sejam segmentos de reta paralelos e (C, D) e (C', D') sejam segmentos orientados de mesmo sentido. Assim (A, B) e (C, D) terão mesmo sentido se (A, B) e (C', D') tiverem mesmo sentido.

Soma de vetores. Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$, se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, com $A, B \in \mathbb{E}^3$, seja $C \in \mathbb{E}^3$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Define-se a *soma* $\vec{u} + \vec{v}$ como sendo o vetor dado por $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



A proprosição a seguir reúne propriedades da soma entre vetores, que podem ser verificadas por meio de argumentos geométricos no plano.

Proposição 2.1.1. *Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, valem:*

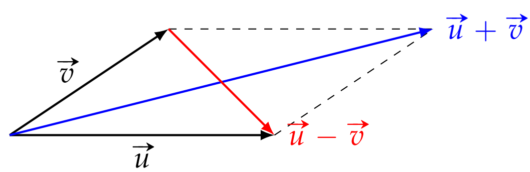
(i) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;

(ii) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

(iii) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;

(iv) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

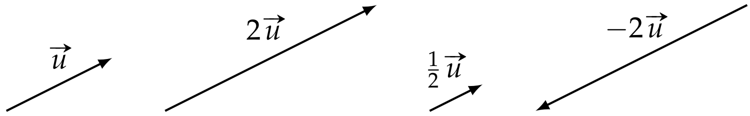
Uma questão notacional: se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$, utilizaremos a abreviação $\vec{u} - \vec{v}$ para significar o vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$. Assim, dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, podemos identificar os vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ como as diagonais do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, como na figura:



Para ver isso, chame de $\vec{x}$ o vetor destacado em vermelho. Esse vetor satistaz $\vec{v} + \vec{x} = \vec{u}$. Somando $-\vec{v}$ a ambos os lados dessa igualdade, obtemos $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v}$.

Multiplicação de um escalar por um vetor. A partir deste ponto, usaremos o termo *escalar* para nos referirmos a um número real.

Dados um vetor $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se a *multiplicação do escalar λ pelo vetor $\vec{u}$* como sendo o vetor $\lambda\vec{u}$ que tem comprimento $|\lambda| \, \|\vec{u}\|$, é pararelo a $\vec{u}$ e é tal que $\vec{u}$ e $\lambda\vec{u}$ têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$. Se $\lambda = 0$, define-se $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.



Segue, imediatamente da definição, que para qualquer vetor $\vec{u}$, temos $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

Aqui, também, argumentos de natureza geométrica permitem a demonstração das seguintes propriedades.

Proposição 2.1.2. *Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, valem:*

(i) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$;

(ii) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$;

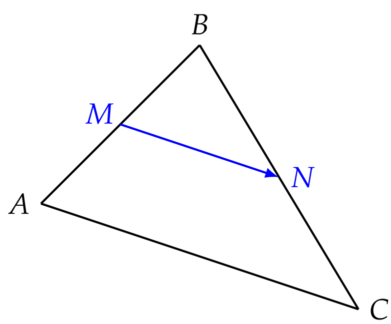
(iii) $1\vec{u} = \vec{u}$;

(iv) $(\lambda\mu)\vec{u} = \lambda(\mu\vec{u})$.

Vejamos, em um exemplo, como utilizar a linguagem de vetores para fazer argumentos sobre problemas geométricos.

Exemplo 2.1.3. (Lista 1 - Álgebra Linear I, ex. 38) Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de sua medida.

Solução. Sejam A, B, C os vértices do triângulo. Seja M o ponto médio do lado AB e seja N o ponto médio do lado BC. Consideremos o vetor $\overrightarrow{MN}$.



Como M é o ponto médio de AB, segue que $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, e, como N é o ponto médio de BC, segue que $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Assim,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Segue, portanto, que o segmento MN é paralelo ao segmento AC (uma vez que, por definição, o vetor $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{AC}$) e a medida do segmento MN é igual a $\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right\| = |\frac{1}{2}|\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$, que é a metade da medida do segmento AC. $\Diamond$

Observação. Podemos utilizar o conceito de multiplicação de um escalar por um vetor para representar a noção de paralelismo entre vetores. Mais precisamente, dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão paralelos se, e somente se, existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Com efeito, se $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, então $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{u}$, por definição. Para a recíproca, suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam vetores paralelos. Então, $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, com $\lambda = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tiverem o mesmo sentido, e $\lambda = -\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tiverem sentidos opostos, como o leitor pode facilmente verificar. $\Diamond$

A construção do conjunto $\mathbb{V}^3$ e a definição das operações de soma e multiplicação por escalar pode ser replicada para dar origem ao conjunto $\mathbb{V}^2$, dos vetores *bidimensionais*, partindo de segmentos orientados cujas extermidades são elementos do conjunto $\mathbb{E}^2$, formado por todos os pontos do espaço bidimensional.

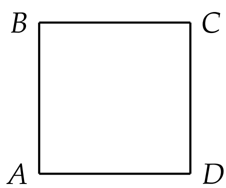
Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear I: Exs. 35–39.

2.2 Dependência linear

Dizemos que um vetor $\vec{u}$ é *combinação linear* dos vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ se existirem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tais que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n}.$$

Por exemplo, se A, B, C, D são os vértices de um quadrado, conforme a figura



então o vetor $\overrightarrow{AC}$ é combinação linear de $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{DC}$, uma vez que

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = (-1)\overrightarrow{CB} + 1\overrightarrow{DC}.$$

Por outro lado, $\overrightarrow{AC}$ não é combinação linear de $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{AD}$, pois qualquer combinação linear de $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{AD}$ será um vetor paralelo a $\overrightarrow{AD}$, mas $\overrightarrow{AC}$ não é paralelo a $\overrightarrow{AD}$.

A definição central nesta seção utiliza o conceito de combinação linear.

Definição. Um conjunto de vetores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$ é dito *linearmente dependente* (doravante abreviado por *LD*) se algum $\vec{u_i}$ for combinação dos demais vetores do conjunto. Caso contrário, dizemos que o conjunto é *linearmente independente* (ou, simplesmente, *LI*).

No exemplo do quadrado acima, $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DC}\}$ é LD, e $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\}$ é LI.

Observação. Seguem imediatamente da definição:

- Qualquer conjunto que contenha o vetor nulo é LD. (Pois o vetor nulo se escreve como combinação linear dos demais utilizando-se apenas o número 0 como coeficiente em cada termo da combinação linear.)
- Qualquer subconjunto de um conjunto LI é LI. (Isso segue do fato de que se o conjunto $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ é LD, então, qualquer que seja $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$, o conjunto $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}, \vec{v}\}$ será também LD, bastando usar o escalar 0 como coeficiente de $\vec{v}$.) $\Diamond$

Interpretação geométrica da dependência linear. Vejamos, geometricamente, o significa dizer que um conjunto de vetores é LD. Vamos fazer um tratamento em casos por tamanho do conjunto.

Comecemos lembrando que dois vetores são paralelos se tiverem representantes paralelos. Diremos que três vetores são coplanares se tiverem representantes coplanares. Mais precisamente, dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, dizemos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são *coplanares* se existirem $P, A, B, C \in \mathbb{E}^3$ em um mesmo plano tais que $\vec{u} = \overrightarrow{PA}, \vec{v} = \overrightarrow{PB}, \vec{w} = \overrightarrow{PC}$.

A interpretação geométrica da dependência linear segue abaixo.

(1) *Por convenção, um conjunto com um único vetor $\{\vec{u}\}$ é LD se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$.*

(2) *$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD se, e somente se, $\vec{u}, \vec{v}$ são paralelos.*

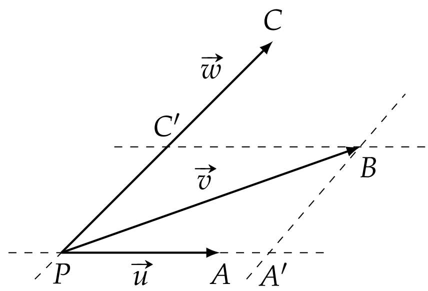
Com efeito, se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD, então, um deles é um múltiplo escalar do outro e, portanto, eles são paralelos. Reciprocamente, se são paralelos e $\vec{u} \neq \vec{0}$, por exemplo, então, como vimos, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, o que garante que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD. Se $\vec{u} = \vec{0}$, o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é trivialmente LD: $\vec{u} = 0\vec{v}$.

(3) *$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD se, e somente se, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares.*

Com efeito, suponha, por exemplo, que existem escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$. Tome $P, A, B, C \in \mathbb{E}^3$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{PA}, \vec{v} = \overrightarrow{PB}, \vec{w} = \overrightarrow{PC}$. Se são P, B, C colineares, P, A, B, C estão em um mesmo plano e, portanto, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares. Resta considerar o caso em que P, B, C não são colineares. Neste caso, seja $M \in \mathbb{E}^3$ tal que $\lambda\vec{v} = \overrightarrow{PM}$ e seja $N \in \mathbb{E}^3$ tal que $\mu\vec{w} = \overrightarrow{PN}$. Então, M está na reta PB e N está na reta PC. Como $\overrightarrow{PA} = \vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$, segue que P, A, B, C estão no plano definido por P, B, C. Logo, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares.

Reciprocamente, suponha que $\vec{u} = \overrightarrow{PA}, \vec{v} = \overrightarrow{PB}, \vec{w} = \overrightarrow{PC}$, em que os pontos P, A, B e C estão em um mesmo plano. Podemos supor que

$\vec{u}, \vec{w}$ não são paralelos, pois se são, $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ é LD e, *a fortiori*, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD. Considere o ponto A' dado pela interseção da reta paralela a PC que passa por B com a reta PA e o ponto C' dado pela interseção da reta paralela a PA que passa por B com a reta PC, como na figura



Como $\overrightarrow{PA'}$ é paralelo a $\overrightarrow{PA}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{PA'} = \lambda\overrightarrow{PA} = \lambda\vec{u}$. Como $\overrightarrow{PC'}$ é paralelo a $\overrightarrow{PC}$, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{PC'} = \mu\overrightarrow{PC} = \mu\vec{w}$. Assim, $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PC'} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{w}$, e $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD.

(4) *Qualquer conjunto com quatro ou mais vetores é LD.*

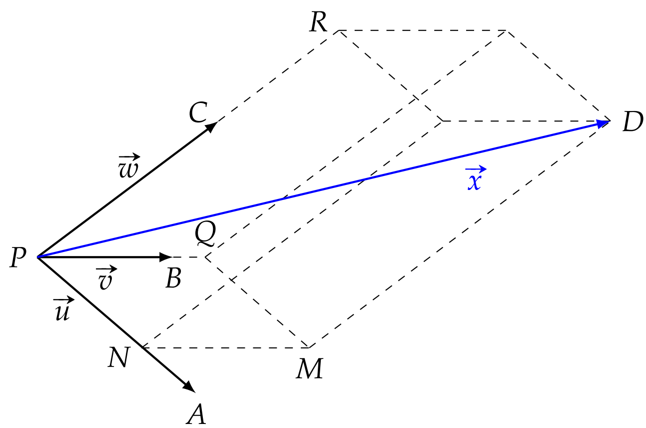
Isso é consequência do resultado a seguir.

Teorema 2.2.1. *Seja $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ um conjunto LI contendo três vetores. Seja $\vec{x} \in \mathbb{V}^3$. Então $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.*

Demonstração. Tome $P, A, B, C \in \mathbb{E}^3$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{PA}, \vec{v} = \overrightarrow{PB}, \vec{w} = \overrightarrow{PC}$. Como $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, esses quatro pontos não estão em um mesmo plano. Seja $D \in \mathbb{E}^3$ tal que $\vec{x} = \overrightarrow{PD}$. Considere os seguintes quatro pontos:

- M, dado pela interseção do plano PAB com a reta paralela a PC que passa por D;
- N, dado pela interseção da reta PA com a reta paralela a PB que passa por M;
- Q, dado pela interseção da reta PB com a reta paralela a PA que passa por M;
- R, dado pela interseção da reta PC com o plano paralelo ao plano PAB que contém D;

conforme o paralelepípedo na figura.



Como $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PN}$ são paralelos, $\overrightarrow{PN} = \alpha\overrightarrow{PA} = \alpha\vec{u}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Similarmente, $\overrightarrow{PQ} = \beta\overrightarrow{PB} = \beta\vec{v}$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$, e $\overrightarrow{PR} = \gamma\overrightarrow{PC} = \gamma\vec{w}$, para algum $\gamma \in \mathbb{R}$.

Logo, $\vec{x} = \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$. □

Corolário 2.2.2. *Qualquer conjunto com quatro ou mais vetores é LD.*

Demonstração. Seja $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}, \dots\}$ um conjunto com pelo menos quatro vetores. Se $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ é LD, então o conjunto maior é LD. Se $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ é LI, então pelo Teorema 2.2.1, $\vec{u_4}$ é combinação linear de $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ e, portanto, também é combinação linear de todos os outros vetores do conjunto, utilizando o escalar 0, se necessário, como coeficiente dos demais. □

Resumindo, podemos caracterizar a dependência linear em termos geométricos por:

(1) $\{\vec{u}\}$ é LD se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$.

(2) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD se, e somente se, $\vec{u}, \vec{v}$ são paralelos.

(3) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD se, e somente se, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são coplanares.

(4) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}, \dots\}$ é sempre LD.

Dependência e independência linear podem ser caracterizadas por uma condição equivalente à da definição e que é frequentemente conveniente.

Proposição 2.2.3. *Sejam $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n} \in \mathbb{V}^3$. Então, $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$ é LD se, e somente se, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R$, não todos nulos, tais que*

$$\lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + \cdots + \lambda_n\vec{u_n} = \vec{0}. \tag{2.1}$$

Demonstração. Se $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ é LD, então, digamos (para efeito da argumentação), $\vec{u_1}$ é combinação linear de $\vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$; isso que dizer que existem $\beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{u_1} = \beta_2 \vec{u_2} + \cdots + \beta_n \vec{u_n}.$$

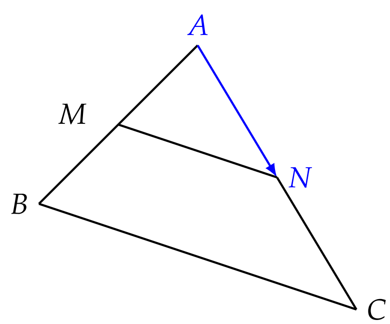
Isso implica que vale a igualdade (2.1), em que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_i = -\beta_i$, para todo $i = 2, \ldots, n$. Em particular, o coeficiente λ_1 não é nulo.

Reciprocamente, suponha que existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$, não todos nulos, tais que (2.1) seja válida. Suponha, para efeitos da argumentação, que $\lambda_1 \neq 0$. Então, $\vec{u_1} = \beta_2 \vec{u_2} + \cdots + \beta_n \vec{u_n}$, em que $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$, para todo $i = 2, \ldots, n$. Portanto, $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ é LD. □

Essa condição equivalente para dependência linear implica a seguinte condição equivalente para a independência linear: um conjunto de vetores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ é LI se, e somente se, a única combinação linear de $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ que resulta no vetor nulo é aquela em que todos os escalares aparecendo como coeficientes são nulos.

Exemplo 2.2.4. No triângulo de vértices A, B, C, seja M o ponto médio do lado AB e seja N o ponto no lado AC tal que o segmento MN seja paralelo ao lado BC. Mostre que N é o ponto médio do lado AC.

Solução. Para mostrar que N é o ponto médio de AC, é suficiente mostrar que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



Como $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AC}$. Precisamos mostrar que $\lambda = \frac{1}{2}$. Como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, temos, por um lado,

$$\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \lambda\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{BC}. \quad (2.2)$$

Por outro lado, sabemos que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$. Como M é o ponto médio de AB, temos $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Ainda, como $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{BC}$ são paralelos (por hipótese), existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{MN} = \mu\overrightarrow{BC}$. Logo,

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC}. \quad (2.3)$$

Comparando (2.2) com (2.3), obtemos

$$\lambda\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC},$$

que, por sua vez, implica

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + (\lambda - \mu)\overrightarrow{BC} = \vec{0}.$$

Como $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$ é LI, pois $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ não são paralelos, segue que $\lambda - \frac{1}{2} = 0$ e que $\lambda - \mu = 0$. Em particular, $\lambda = \frac{1}{2}$, que é o que desejávamos provar. (Observe que obtemos, também, a informação de que $\mu = \frac{1}{2}$, ou seja, de que a medida do segmento MN é a metade da medida do lado BC.) $\diamondsuit$

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear I: Exs. 40–44.

2.3 Bases e coordenadas

Vimos, na seção anterior, que dado um conjunto LI de três vetores, qualquer vetor se decompõe como combinação linear desses três vetores (Teorema 2.2.1). Nesta seção, usaremos esse fato para definir bases e coordenadas em $\mathbb{V}^3$.

Definição. Um conjunto LI ordenado formado por três vetores em $\mathbb{V}^3$ será chamado *base*.

Dada uma base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ de $\mathbb{V}^3$ e dado um vetor qualquer $\vec{u}$, pelo Teorema 2.2.1, existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tais que

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}. \tag{2.4}$$

Mostremos que os escalares na decomposição (2.4) estão univocamente determinados por $\vec{u}$. Com efeito, suponha que $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ sejam tais que $\vec{u} = \mu_1\vec{e_1} + \mu_2\vec{e_2} + \mu_3\vec{e_3}$. Comparando as duas decomposições de $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, obtemos

$$\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3} = \mu_1\vec{e_1} + \mu_2\vec{e_2} + \mu_3\vec{e_3},$$

donde segue que

$$(\lambda_1 - \mu_1)\vec{e_1} + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{e_2} + (\lambda_3 - \mu_3)\vec{e_3} = \vec{0}.$$

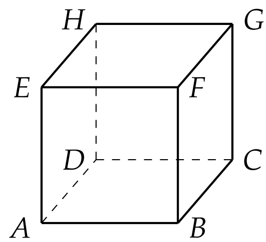
Como o conjunto $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é LI (pois é uma base), segue que $\lambda_1 - \mu_1 = 0$, $\lambda_2 - \mu_2 = 0$ e $\lambda_3 - \mu_3 = 0$, ou, ainda, que

$$\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_2, \quad \lambda_3 = \mu_3.$$

Por causa da unicidade dos escalares utilizados na decomposição (2.4) de $\vec{u}$ como combinação linear de $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, podemos introduzir a definição seguinte.

Definição. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ uma base de $\mathbb{V}^3$ e seja $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$. Os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}$ são chamados *coordenadas* de $\vec{u}$ em relação à base $\mathcal{B}$. Usamos a notação $\vec{u} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{\mathcal{B}}$.

Exemplo 2.3.1. Considere, em $\mathbb{E}^3$, o cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H, conforme a figura.



Os vetores $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{EF}$ são LI, uma vez que não são coplanares. Então, o conjunto ordenado $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{EF}\}$ é uma base de $\mathbb{V}^3$. Encontre as coordenadas de $\overrightarrow{AF}$ em relação à base $\mathcal{B}$.

Solução. Precisamos encontrar a decomposição de $\overrightarrow{AF}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{EF}$. Temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} \\
&= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF} \\
&= (-1)\overrightarrow{AC} + 1\overrightarrow{AH} + 2\overrightarrow{EF}.
\end{aligned}$$

Assim, $\overrightarrow{AF} = (-1, 1, 2)_{\mathcal{B}}$. $\diamondsuit$

Observação. O Exemplo 2.3.1 nos será útil para algumas observações:

- A ordem em que os vetores de uma base são exibidos é fundamental. Por exemplo, em relação à base $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}\}$, que é formada pelos mesmos vetores que formam $\mathcal{B}$, mas em outra ordem, as coordenadas de $\overrightarrow{AF}$ são outras: $\overrightarrow{AF} = (1, 2, -1)_{\mathcal{C}}$.

- A unicidade dos escalares na decomposição de um vetor como combinação de vetores não está garantida se os vetores utilizados na decomposição não forem LI. Por exemplo, o conjunto $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{HE}\}$ não é LI e o vetor $\overrightarrow{DB}$ pode ser decomposto como combinação linear de $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{HE}\}$, por exemplo, das seguintes duas maneiras:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AB} \\
&= 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{EG} + 1\overrightarrow{HE}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HE} \\ &= 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{HE}.\end{aligned}$$

(Há uma infinidade de outras decomposições de $\overrightarrow{DB}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{HE}$, uma vez que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EG}$. Assim, por exemplo, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $\overrightarrow{DB} = (1+\lambda)\overrightarrow{AB} + (-\lambda)\overrightarrow{EG} + (1-\lambda)\overrightarrow{HE}$.) $\lozenge$

Se $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{V}^3$, como os vetores que a compõem formam um conjunto LI, segue que $\vec{0} = (0,0,0)_{\mathcal{B}}$. Além disso, $\vec{0}$ é o único vetor de $\mathbb{V}^3$ cujas coordenadas são todas nulas.

A principal vantagem de se trabalhar com coordenadas é que elas se comportam bem com respeito às operações de soma e de multiplicação por escalar definidas em $\mathbb{V}^3$, como mostra próximo resultado.

Proposição 2.3.2. *Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{V}^3$ e sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$, com*

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{B}} \quad e \quad \vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{B}}.$$

Então,

(i) $\vec{u} + \vec{v} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)_{\mathcal{B}}$*;*

(ii) $\lambda\vec{u} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)_{\mathcal{B}}$*, qualquer que seja* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Se $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, então, por hipótese,

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2} + \beta_3\vec{e_3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (\alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}) + (\beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2} + \beta_3\vec{e_3}) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e_3}\end{aligned}$$

e

$$\lambda\vec{u} = \lambda(\alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}) = (\lambda\alpha_1)\vec{e_1} + (\lambda\alpha_2)\vec{e_2} + (\lambda\alpha_3)\vec{e_3},$$

provando o que se queria. $\square$

Exemplo 2.3.3. Considerando coordenadas em relação a uma base fixada de $\mathbb{V}^3$, em cada um dos itens abaixo, verifique se os dois vetores apresentados formam um conjunto LD ou LI.

(i) $\vec{u} = (3, 10, 11)$ e $\vec{v} = (4, 7, -1)$

(ii) $\vec{u} = (1, -7, 2)$ e $\vec{v} = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -1)$

Solução. (i) Como $\vec{u} \neq \vec{0}$, segue que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD se, e somente se, existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Isso implicaria, pela Proposição 2.3.2, que $(4, 7, -1) = (3\lambda, 10\lambda, 11\lambda)$. Como estamos comparando coordenadas em relação a uma base, isso só seria possível se $4 = 3\lambda$, $7 = 10\lambda$ e $-1 = 11\lambda$. Claramente, não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfaça essas três equações. Portanto, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI.

(ii) Como $\vec{u} = (1, -7, 2) = -2(\frac{-1}{2}, \frac{7}{2}, -1) = -2\vec{v}$, segue que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD. $\diamondsuit$

Para verificar dependência linear entre três vetores, coordenadas proporcionam um teste rápido.

Proposição 2.3.4. *Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{V}^3$ e sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, com*

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{B}} \quad e \quad \vec{w} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_{\mathcal{B}}.$$

Então, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD se, e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Demonstração. Um conjunto de vetores ser LD significa não ser LI. Sabemos que o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI se, e somente se, os únicos escalares λ, μ, ρ tais que

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \rho\vec{w} = \vec{0} \tag{2.5}$$

forem $\lambda = \mu = \rho = 0$. Em coordenadas, usando a Proposição 2.3.2, a combinação linear (2.5) lê-se

$$\big(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \rho\gamma_1,\ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \rho\gamma_2,\ \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 + \rho\gamma_3\big) = (0, 0, 0),$$

isto é, (λ, μ, ρ) é solução do sistema linear

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = 0 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, z. Vimos, no Teorema 1.3.8, que esse sistema terá apenas a solução trivial se, e somente se, $\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \neq 0$. Logo, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI se, e somente se, $\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \neq 0$, usando o fato de que o determinante de uma matriz coincide com o de sua transposta. $\square$

Exemplo 2.3.5. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ uma base de $\mathbb{V}^3$ e considere os vetores

$$\vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}, \quad \vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}, \quad \vec{f_3} = \vec{e_1} + 2\vec{e_3}.$$

(i) Mostre que $\mathcal{C} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ é uma base de $\mathbb{V}^3$.

(ii) Encontre as coordenadas de $\vec{v} = (1, 2, -2)_{\mathcal{C}}$ em relação à base $\mathcal{B}$.

(Adiante, na Seção 2.6, veremos um método eficiente para, dadas coordenadas em uma base, encontrá-las em outra.)

Solução. (i) As coordenadas de $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ e $\vec{f_3}$, em relação à base $\mathcal{B}$, são: $\vec{f_1} = (2, -1, 0)_{\mathcal{B}}$, $\vec{f_2} = (1, -1, 2)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{f_3} = (1, 0, 2)_{\mathcal{B}}$. Como $\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$, segue, da Proposição 2.3.4, que $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ é LI, e, portanto, $\mathcal{C}$ é uma base de $\mathbb{V}^3$.

(ii) $\vec{v} = (1, 2, -2)_{\mathcal{C}} = \vec{f_1} + 2\vec{f_2} - 2\vec{f_3} = (2, -1, 0)_{\mathcal{B}} + 2(1, -1, 2)_{\mathcal{B}} - 2(1, 0, 2)_{\mathcal{B}} = (2, -3, 0)_{\mathcal{B}}$. $\Diamond$

Como vimos no Exemplo 2.3.3, a verificação da existência de uma relação de dependência linear entre dois vetores, em termos de coordenadas, é bastante imediata. Apesar disso, há um teste geral que nos será útil no próximo capítulo.

Proposição 2.3.6. *Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{V}^3$ e sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$, com*

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{B}} \quad e \quad \vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{B}}.$$

Então, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD se, e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Demonstração. Se $\vec{u} = \vec{0}$, então $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD e os três determinantes são nulos. Podemos supor, deste ponto em diante, que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, não ambos nulos, tais que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$. Se $\mu = 0$, teríamos $\lambda\vec{u} = \vec{0}$, o que implicaria $\lambda = 0$, uma vez que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Mas isso contradiz o fato de λ e μ não serem ambos nulos. Logo, $\mu \neq 0$ e, portanto, $\vec{v} = -\frac{\lambda}{\mu}\vec{u}$. Daí segue que $\vec{v} = \left(-\frac{\lambda}{\mu}\alpha_1, -\frac{\lambda}{\mu}\alpha_2, -\frac{\lambda}{\mu}\alpha_3\right)_{\mathcal{B}}$, o que implica que os três determinantes são nulos (pois são determinantes de matrizes que têm linhas proporcionais).

Reciprocamente, suponha que os três determinantes sejam nulos. Como $\vec{u} \neq \vec{0}$, alguma de suas coordenadas deve ser necessariamente diferente de zero. Suponha que $\alpha_1 \neq 0$. Assim, do primeiro determinante, obtemos $\beta_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2$, e, do segundo, $\beta_3 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_3$. Portanto, $\vec{v} = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_1, \frac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2, \frac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_3\right)_{\mathcal{B}}$, isto é, $\vec{v} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\vec{u}$, donde segue que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD. Se $\alpha_2 \neq 0$ ou $\alpha_3 \neq 0$, o argumento é análogo. $\square$

Bases ortonormais. Dizemos que dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *ortogonais* se tiverem representantes ortogonais, isto é, se existirem $A, B, C \in \mathbb{E}^3$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ com os segmentos de reta AB e AC sendo ortogonais. Por convenção, o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor. Denotaremos a ortogonalidade entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Definição. Uma base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ de $\mathbb{V}^3$ é *ortonormal* se os vetores $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ forem, dois a dois, ortogonais e satisfizerem $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1$.

Trabalhar com bases ortonormais é conveniente, pois existe, por exemplo, uma maneira simples de expressar norma em termos de coordenadas, como mostra a próxima proposição. Veremos, adiante, que bases ortonormais têm outras propriedades boas.

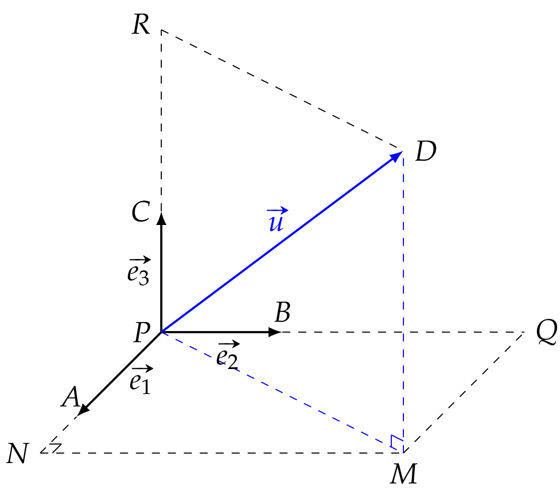
Proposição 2.3.7. *Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$ e seja $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{V}^3$. Então,*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$. Como vimos na demonstração do Teorema 2.2.1, podemos obter as coordenadas de $\vec{u}$ em relação à base $\mathcal{B}$ por meio de uma construção geométrica. Sejam $P, A, B, C, D \in \mathbb{E}^3$ tais que

$$\vec{e_1} = \overrightarrow{PA}, \quad \vec{e_2} = \overrightarrow{PB}, \quad \vec{e_3} = \overrightarrow{PC}, \quad \vec{u} = \overrightarrow{PD}.$$

Sejam N o ponto da reta PA tal que $\overrightarrow{PN} = \alpha\vec{e_1}$; seja Q o ponto da reta PB tal que $\overrightarrow{PQ} = \beta\vec{e_2}$; seja R o ponto da reta PC tal que $\overrightarrow{PR} = \gamma\vec{e_3}$; e seja M o ponto do plano PAB tal que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PQ}$, conforme a figura:



Então, $\vec{u} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PR}$. Como o triângulo PMD é reto, com ângulo reto em M (pois $\vec{e_3}$ é ortogonal a $\vec{e_1}$ e a $\vec{e_2}$), segue, do Teorema de Pitágoras, que

$$\|\vec{u}\|^2 = PD^2 = PM^2 + MD^2. \tag{2.6}$$

Agora, como $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{PR}$, segue

$$MD^2 = \left\|\overrightarrow{PR}\right\|^2 = \|\gamma\vec{e_3}\|^2 = |\gamma|^2 \|\vec{e_1}\|^2. \tag{2.7}$$

Finalmente, a ortogonalidade entre $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ garante que o triângulo PNM é reto com ângulo reto em N. Portanto,

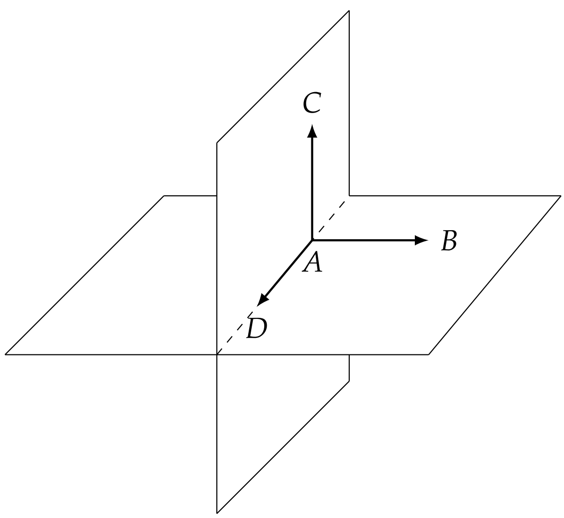
$$\begin{aligned} PM^2 = PN^2 + NM^2 &= \left\|\overrightarrow{PN}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = \|\alpha\vec{e_1}\|^2 + \|\beta\vec{e_2}\|^2 \\ &= |\alpha|^2 \|\vec{e_1}\|^2 + |\beta|^2 \|\vec{e_2}\|^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Substituindo (2.7) e (2.8) em (2.6) e usando que os três vetores da base têm norma 1, obtemos

$$\|\vec{u}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

como desejávamos. □

Observação. Existem infinitas bases ortonormais em $\mathbb{V}^3$. Para escolher uma, basta tomar dois pontos $A, B \in \mathbb{E}^3$ tais que o segmento AB tenha comprimento 1. Agora, no plano perpendicular ao segmento AB que contém A, tome um ponto C de modo que o segmento AC tenha comprimento 1. Finalmente, na reta perpendicular ao plano ABC passando por A, tome um ponto D tal que AD tenha comprimento 1.



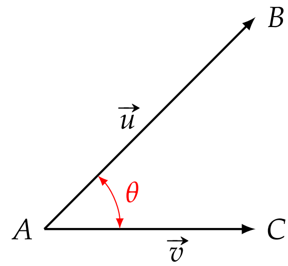
Então, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$. ♢

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear I: Exs. 45–52.

2.4 Produto escalar

Nesta seção, introduziremos uma nova operação no espaço do vetores, o produto escalar. Para tanto, necessitaremos do conceito de ângulo entre vetores.

Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$ não nulos. Tome $A, B, C \in \mathbb{E}^3$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Definimos o *ângulo* entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como sendo o ângulo entre os segmentos de reta AB e AC.



A medida do ângulo entre dois vetores será sempre feita em radianos e é um valor θ satisfazendo $0 \leq \theta \leq \pi$.

Definição. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$. Definimos o *produto escalar* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ como sendo o número real dado por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\theta) & \text{se } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0}, \end{cases}$$

em que θ denota a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

O produto escalar provê um critério rápido para detecção de ortogonalidade. Dados dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$, temos:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \textit{ se, e somente se, } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

De fato, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos e ortogonais se, e somente se, o ângulo entre eles medir $\frac{\pi}{2}$ radianos, o que, por sua vez, é equivalente a $\cos(\theta) = 0$. Essa última condição ocorre precisamente quando $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Quando um dos dois vetores é nulo, a equivalência é imediata.

Lembrando que um ângulo de medida θ é dito *agudo* se $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, e *obtuso* se $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$ não nulos, o ângulo entre eles é agudo se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, e obtuso se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

Observação. Tanto a norma de um vetor quanto a medida do ângulo entre dois vetores não nulos podem ser obtidos por meio do produto escalar:

- Para qualquer $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$, vale $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

- Se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$ são não nulos, então a medida, em radianos, do ângulo entre eles é dada por $\arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)$. $\Diamond$

Em função de coordenadas em relação a uma base ortonormal, o produto escalar adquire uma forma bastante simples.

Proposição 2.4.1. *Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$ e sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$ com*

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{B}} \quad e \quad \vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{B}}.$$

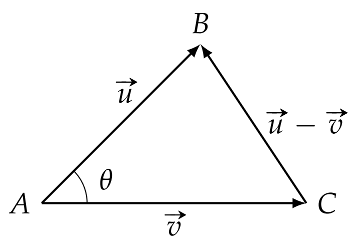
Então,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Demonstração. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então a fórmula é trivialmente válida. Suponha, portanto, que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, e seja θ a medida do ângulo entre eles. Pela Proposição 2.3.2, $\vec{u} - \vec{v} = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_3 - \beta_3)_{\mathcal{B}}$, e, pela Proposição 2.3.7, temos

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \\ \|\vec{v}\|^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 + (\alpha_3 - \beta_3)^2. \end{aligned}$$

Se $A, B, C \in \mathbb{E}^3$ são tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, então $\overrightarrow{CB} = \vec{u} - \vec{v}$. E, pela lei dos cossenos aplicada ao triângulo ABC,



obtemos

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{u}\|\cos(\theta) = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

Substituindo, no lado esquerdo, $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\theta)$ por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e utilizando os valores dos quadrados das normas em termos das coordenadas obtidos acima, segue a igualdade desejada.[2] $\square$

Em relação às operações de soma e multiplicação por escalar, o produto escalar tem as seguintes propriedades.

[2] A rigor, a demonstração que fizemos só se aplica no caso em que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, pois somente neste caso teremos, de fato, um triângulo. Porém, o mesmo argumento se aplica quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, pois, ainda nesse caso, a lei dos cossenos continua válida.

Proposição 2.4.2. *Sejam $\vec{u}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,*

(i) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;

(ii) $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$;

(iii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

(iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, *e* $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ *se, e somente se,* $\vec{u} = \vec{0}$.

Demonstração. (iii) é consequência imediata da definição. (iv) segue de $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Para (i) e (ii), fixe uma base ortonormal em $\mathbb{V}^3$ e tome coordenadas em relação a essa base. Por exemplo, se $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ e $\vec{w} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, em relação a uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$, então

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1) + \alpha_2(\beta_2 + \gamma_2) + \alpha_3(\beta_3 + \gamma_3),$$

ao passo que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) + (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3).$$

A igualdade segue da propriedade distributiva do produto em relação à soma de números reais. □

Exemplo 2.4.3. (Prova 1, Álgebra Linear I, 2015) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$. Considere os vetores $\vec{z} = (1, 0, 1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (-2, 1, 0)_{\mathcal{E}}$, $\vec{w} = (0, -1, 1)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{x} = (a, b, c)_{\mathcal{E}}$. Se $\|\vec{x}\| = 3$, $\vec{x}$ é ortogonal a $\vec{z}$ e $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ é linearmente dependente, então $|a + b + c|$ é igual a

(A) 2 (B) 3 (C) 1 (D) 7 (E) 5

Solução. Como $\vec{z} \perp \vec{x}$, segue $\vec{z} \cdot \vec{x} = 0$. Mas, $\vec{z} \cdot \vec{x} = (1, 0, 1)_{\mathcal{E}} \cdot (a, b, c)_{\mathcal{E}} = 1a + 0b + 1c = a + c$, uma vez que $\mathcal{E}$ é ortonormal. Logo, $a + c = 0$, donde segue que $c = -a$, e, portanto, $\vec{x} = (a, b, -a)_{\mathcal{E}}$. Como $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ é LD, segue da Proposição 2.3.4, que $\det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & b & -a \end{bmatrix} = 0$. Calculando o determinante, obtemos a relação $-a + 2b = 0$. Logo, $a = 2b$. Assim, $\vec{x} = (2b, b, -2b)_{\mathcal{E}}$. Portanto, usando a Proposição 2.3.7, obtemos $\|\vec{x}\|^2 = (2b)^2 + b^2 + (-2b)^2 = 9b^2$. Como, por hipótese, $\|\vec{x}\| = 3$, segue que $b = 1$ ou $b = -1$. Assim, $\vec{x} = (2, 1, -2)_{\mathcal{E}}$ ou $\vec{x} = (-2, -1, 2)_{\mathcal{E}}$. Em ambos os casos, $|a + b + c| = 1$. *Resposta*: (C). ◊

Exemplo 2.4.4. Sejam $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \in \mathbb{V}^3$. Mostre que $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$ se, e somente se,

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Solução. A condição é equivalente ao fato de $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ serem vetores de norma 1 que são, dois a dois, ortogonais. Assim, a única coisa que resta a ser demonstrada é que se $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ satisfizerem $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$ então o conjunto $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ será LI. Sejam, então $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3} = \vec{0}$. Considerando o produto escalar com o vetor $\vec{e_1}$, obtemos

$$\vec{e_1} \cdot (\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}) = \vec{e_1} \cdot \vec{0} = 0.$$

Por outro lado,

$$\vec{e_1} \cdot (\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}) = \alpha\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} + \beta\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + \gamma\vec{e_1} \cdot \vec{e_3} = \alpha + 0 + 0 = \alpha.$$

Logo, $\alpha = 0$. Tomando o produto escalar com $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$, obtemos, analogamente, $\beta = 0$ e $\gamma = 0$. Portanto, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é, de fato, LI. $\diamondsuit$

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear I: Exs. 53–70.

2.5 Projeção ortogonal

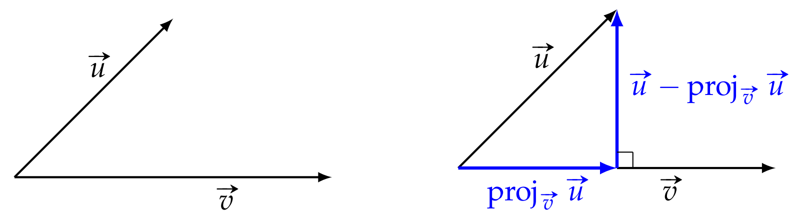
Nesta seção, veremos como utilizar o produto escalar para encontrar a projeção ortogonal de um vetor sobre outro.

Definição. Seja $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Dado $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$, chama-se *projeção ortogonal* de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ o vetor $\vec{w}$ que satisfaz as seguintes duas condições:

(i) $\vec{w}$ é paralelo a $\vec{v}$, e

(ii) $\vec{u} - \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{v}$.

Veremos, em seguida, que a projeção ortogonal sempre existe e é única. Assim, utilizaremos a notação $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ para denotá-la.



Proposição 2.5.1. *Seja $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e seja $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$. Então, a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é dada por*

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

(Mais precisamene, o vetor $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$ satisfaz as condições de projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ e é o único vetor a satisfazê-las.)

Demonstração. Considere o vetor $\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$. Mostremos que esse vetor satisfaz as condições na definição de projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. A condição (i) está claramente satisfeita, uma vez que $\vec{w}$ é um múltiplo escalar de $\vec{v}$. Para a condição (ii), calculemos o produto escalar $(\vec{u}-\vec{w})\cdot\vec{v}$:

$$(\vec{u}-\vec{w})\cdot\vec{v} = \left(\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right)\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\cdot\vec{v} = 0,$$

uma vez que $\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$. Portanto, a condição (ii) também está satisfeita.

Finalmente, verifiquemos que $\vec{w}$ é o único vetor que tem as propriedades (i) e (ii). Seja $\vec{z} \in \mathbb{V}^3$ um vetor que é paralelo a $\vec{v}$ e que satisfaz $(\vec{u}-\vec{z}) \perp \vec{v}$. Como $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{z}$ é paralelo a $\vec{v}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{z} = \lambda\vec{v}$. Agora, de $(\vec{u}-\vec{z}) \perp \vec{v}$ segue que $(\vec{u}-\vec{z})\cdot\vec{v} = 0$. Portanto, $(\vec{u}-\lambda\vec{v})\cdot\vec{v} = 0$. O lado esquerdo dessa última igualdade coincide com $\vec{u}\cdot\vec{v} - \lambda\|\vec{v}\|^2$. Assim, $\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$. Logo, $\vec{z} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \vec{w}$. □

Exemplo 2.5.2. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$. Considere os vetores $\vec{u} = (3,-6,0)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v} = (2,-2,1)_{\mathcal{B}}$.

(i) Encontre a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

(ii) Encontre um vetor $\vec{p}$ paralelo a $\vec{v}$ e um vetor $\vec{q}$ ortogonal a $\vec{v}$ tais que $\vec{u} = \vec{p} + \vec{q}$.

Solução. (i) Sabemos, pela Proposição 2.5.1, que $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$. Como a base $\mathcal{B}$ é ortonormal, podemos utilizar a Proposição 2.4.1 para calcular numerador e denominador do escalar que aparece na fórmula:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (3,-6,0)_{\mathcal{B}}\cdot(2,-2,1)_{\mathcal{B}} = 6+12+0 = 18$$

e

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (2,-2,1)_{\mathcal{B}}\cdot(2,-2,1)_{\mathcal{B}} = 4+4+1 = 9.$$

Logo, $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{18}{9}(2,-2,1)_{\mathcal{B}} = (4,-4,2)_{\mathcal{B}}$.

(ii) Sabemos que $\vec{u} - \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$. Como também vale que $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$, basta tomar $\vec{p} = \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = (4,-2,2)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{q} = \vec{u} - \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = (3,-6,0)_{\mathcal{B}} - (4,-2,2)_{\mathcal{B}} = (-1,-2,-2)_{\mathcal{B}}$. ◊

No exemplo anterior, como $\vec{u} \neq \vec{0}$, também é possível considerar a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. O leitor pode verificar que $\operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\frac{6}{5}, -\frac{12}{5}, 0)_{\mathcal{B}}$. É um comentário óbvio, mas que não custa ser feito: em geral, $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} \neq \operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$, como vimos neste exemplo. Você consegue encontrar condições sobre dois vetores não nulos que impliquem a igualdade entre as duas projeções ortogonais?

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear I: Exs. 71–74.

2.6 Mudança de base

Vimos que, fixada uma base de $\mathbb{V}^3$, podemos associar a cada vetor de $\mathbb{V}^3$ suas coordenadas em relação a essa base. Se tomarmos uma segunda base, um mesmo vetor terá, agora, duas sequências de coordenadas: uma em relação à primeira base e outra, à segunda. Qual é a relação entre elas? Essa será a questão a ser abordada nesta seção.

Sejam $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ e $\mathcal{C} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ bases de $\mathbb{V}^3$ e seja $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$. Suponha que

$$\vec{u} = \left(x_1, x_2, x_3\right)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{u} = \left(y_1, y_2, y_3\right)_{\mathcal{C}}.$$

Como $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{V}^3$, os vetores que compõem a base $\mathcal{C}$ também se escrevem como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, ou seja, existem escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, com $i, j = 1, 2, 3$, tais que

$$\begin{aligned} \vec{f_1} &= \left(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}\right)_{\mathcal{B}} \\ \vec{f_2} &= \left(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}\right)_{\mathcal{B}} \\ \vec{f_3} &= \left(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}\right)_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Vamos procurar uma relação entre as coordenadas de $\vec{u}$ em relação à base $\mathcal{B}$ e à base $\mathcal{C}$.

Usando as coordenadas de $\vec{u}$ em relação à base $\mathcal{C}$ e as coordenadas de $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ em relação à base $\mathcal{B}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{u} &= y_1\vec{f_1} + y_2\vec{f_2} + \vec{f_3} \\ &= y_1(\alpha_{11}\vec{e_1} + \alpha_{21}\vec{e_2} + \alpha_{31}\vec{e_3}) + y_2(\alpha_{12}\vec{e_1} + \alpha_{22}\vec{e_2} + \alpha_{32}\vec{e_3}) \\ &\qquad + y_3(\alpha_{13}\vec{e_1} + \alpha_{23}\vec{e_2} + \alpha_{33}\vec{e_3}) \\ &= (\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3)\vec{e_1} + (\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3)\vec{e_2} \\ &\qquad + (\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3)\vec{e_3}. \end{aligned}$$

Os escalares obtidos, acima, na decomposição de $\vec{u}$ como combinação linear dos elementos da base $\mathcal{B}$, fornecem-nos as coordenadas de $\vec{u}$ em relação à base $\mathcal{B}$, e, portanto, segue que

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3, \end{aligned}$$

ou ainda, de modo mais compacto, usando o produto entre matrizes,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Neste ponto, introduziremos as seguintes notações:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\vec{u}]_{\mathcal{B}}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = [\vec{u}]_{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = M_{\mathcal{CB}}.$$

A matriz 3×1 $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$ (respectivamente, $[\vec{u}]_{\mathcal{C}}$) é chamada *vetor de coordenadas* de $\vec{u}$ em relação à base $\mathcal{B}$ (respectivamente, $\mathcal{C}$).

Assim, demonstramos o seguinte resultado fundamental.

Teorema 2.6.1. *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de $\mathbb{V}^3$ e seja $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$. Então,*

$$[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{CB}}[\vec{u}]_{\mathcal{C}}. \tag{2.9}$$

A matriz $M_{\mathcal{CB}}$ é o que se chama de uma *matriz de mudança de base*.

Observe que na matriz de mudança de base $M_{\mathcal{CB}}$, a primeira coluna é formada pelas coordenadas do primeiro vetor da base $\mathcal{C}$ em relação à base $\mathcal{B}$. Na segunda e terceira colunas estão as coordenadas do segundo e terceiro vetores, respectivamente, da base $\mathcal{C}$ em relação à base $\mathcal{B}$:

$$\text{se} \quad \begin{aligned} \vec{f_1} &= (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})_{\mathcal{B}} \\ \vec{f_2} &= (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})_{\mathcal{B}} \\ \vec{f_3} &= (\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})_{\mathcal{B}} \end{aligned}, \qquad \text{então} \quad M_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix},$$

sendo $\mathcal{C} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$.

Observação. Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases de $\mathbb{V}^3$, então $\det(M_{\mathcal{CB}}) \neq 0$, uma vez que $\mathcal{C}$ é um conjunto LI (veja a Proposição 2.3.4). Portanto, $M_{\mathcal{CB}}$ é uma matriz inversível. Assim, se $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$, a identidade (2.9) lê-se também na forma

$$[\vec{u}]_{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{CB}})^{-1}[\vec{u}]_{\mathcal{B}}. \tag{2.10}$$

Assim, $M_{\mathcal{CB}}$ é o objeto de ligação que permite relacionar coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$ e coordenadas em relação à base $\mathcal{C}$. ♢

Exemplo 2.6.2. No Exemplo 2.3.5, o item (ii) poderia ter sido mais rapidamente resolvido usando a matriz de mudança de base. Lembre que, como $\vec{f_1} = (2, -1, 0)_{\mathcal{B}}$, $\vec{f_2} = (1, -1, 2)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{f_3} = (1, 0, 2)_{\mathcal{B}}$, temos

$$M_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

e, portanto, usando (2.9),

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{CB}}[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, invertendo $M_{\mathcal{CB}}$, obtemos

$$(M_{\mathcal{CB}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Assim, por exemplo, se quiséssemos encontrar as coordenadas do vetor $\vec{w} = (4, 1, 2)_{\mathcal{B}}$ em relação à base $\mathcal{C}$, poderíamos utilizar (2.10) para obter

$$[\vec{w}]_{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{CB}})^{-1}[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

isto é, $\vec{w} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)_{\mathcal{C}}$. $\Diamond$

Proposição 2.6.3. *Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases de $\mathbb{V}^3$. Então, $M_{\mathcal{DB}} = M_{\mathcal{CB}} M_{\mathcal{DC}}$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{D} = \{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$. Então, para todo $j = 1, 2, 3$, segue do Teorema 2.6.1, que

$$[\vec{g_j}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{CB}}[\vec{g_j}]_{\mathcal{C}},$$

isto é, a j-ésima coluna da matriz $M_{\mathcal{DB}}$ coincide com o produto de $M_{\mathcal{CB}}$ pela j-ésima coluna de $M_{\mathcal{DC}}$. Logo, a igualdade desejada segue. $\square$

Corolário 2.6.4. *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de $\mathbb{V}^3$. Então, $M_{\mathcal{BC}} = (M_{\mathcal{CB}})^{-1}$.*

Demonstração. É claro que $M_{\mathcal{BB}} = I_3$. Da Proposição 2.6.3 obtemos $I_3 = M_{\mathcal{BB}} = M_{\mathcal{CB}} M_{\mathcal{BC}}$. Portanto, $M_{\mathcal{BC}} = (M_{\mathcal{CB}})^{-1}$. $\square$

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear I: Exs. 75–79.

2.7 Produto vetorial

Nesta seção, introduziremos uma última operação envolvendo vetores, o produto vetorial. Para tanto, será preciso fixar uma orientação no espaço $\mathbb{V}^3$.

Dadas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $\mathbb{V}^3$, dizemos que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ têm a *mesma orientação*, se $\det(M_{\mathcal{CB}}) > 0$. Caso contrário, isto é, se $\det(M_{\mathcal{CB}}) < 0$, dizemos que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ têm *orientações opostas*.

Observação. É relevante notar as seguintes consequências da definição acima.

- $\det(M_{\mathcal{CB}}) > 0$ se, e somente se, $\det(M_{\mathcal{BC}}) > 0$, uma vez que, segundo o Corolário 2.6.4, $\det(M_{\mathcal{BC}}) = \det(M_{\mathcal{CB}}^{-1}) = \det(M_{\mathcal{CB}})^{-1}$. Ou seja, a noção de bases de mesma orientação, ou de orientações opostas, não depende da ordem em que as bases foram apresentadas.

- A propriedade de ter a mesma orientação é transitiva, no sentido de que se $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são bases de $\mathbb{V}^3$ tais que $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ é um par de bases de mesma orientação e $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ também é um par de bases de mesma orientação, então $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ têm a mesma orientação. Isso segue, imediatamente, da Proposição 2.6.3.

- Também é consequência da Proposição 2.6.3 que se $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são bases de $\mathbb{V}^3$ tais que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ têm orientações opostas, e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ também têm orientações opostas, então $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ têm mesma orientação. $\diamondsuit$

Diremos que $\mathbb{V}^3$ está *orientado* se estiver fixada uma base $\mathcal{B}$ em $\mathbb{V}^3$. Neste caso, dada uma outra base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{V}^3$, diremos que $\mathcal{C}$ é uma *base positiva* se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tiverem a mesma orientação. Caso contrário, diremos que $\mathcal{C}$ é uma *base negativa*.

Por exemplo, se $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é a base que dá a orientação de $\mathbb{V}^3$, então $\mathcal{C} = \{\vec{e_3}, \vec{e_2}, \vec{e_1}\}$ é uma base negativa (pois $M_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, que tem determinante igual a -1), e $\mathcal{D} = \{\vec{e_3}, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ é uma base positiva (pois $M_{\mathcal{DB}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, que tem determinante igual a 1).

Observação. Se o espaço $\mathbb{V}^3$ estiver orientado, existem infinitas bases ortonormais positivas (e infinitas bases ortonormais negativas). De fato, como vimos na Seção 2.3, existem infinitas bases ortonormais em $\mathbb{V}^3$. Se $\mathcal{C} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma delas e $\mathcal{C}$ não é positiva, então $\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}$ será. $\diamondsuit$

Definição. Considere $\mathbb{V}^3$ com uma orientação fixada. Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$, definimos o *produto vetorial* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como sendo o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD, então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;

(ii) se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, então

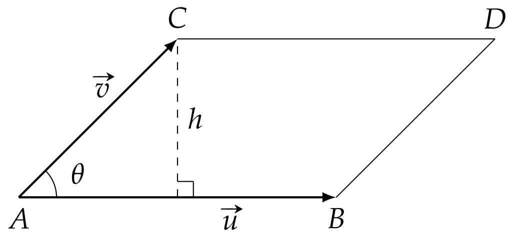
  (a) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \operatorname{sen}(\theta)$, em que θ denota a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

  (b) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$;

  (c) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ é uma base positiva de $\mathbb{V}^3$.

Essa definição do produto vetorial em termos geométricos é difícil de ser aplicada. Veremos, adiante, que, em termos de coordenadas em relação a uma base ortonormal positiva, existe uma fórmula simples para o produto vetorial. No entanto, algumas consequências podem ser obtidas já a partir da definição em termos geométricos:

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ é igual à área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Mais precisamente, suponha $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ LI (caso contrário, eles não definem um paralelogramo) e sejam $A, B, C \in \mathbb{E}^3$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Seja $D \in \mathbb{E}^3$ tal que $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$. Então, A, B, C, D são os vértices de um paralelogramo, como na figura:



  Denote por h a altura do paralelogramo em relação ao lado AB e por θ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então, $h = (AC)\,\mathrm{sen}(\theta)$ e, portanto, a área do paralelogramo é dada por
  $$(AB)h = (AB)(AC)\,\mathrm{sen}(\theta) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\mathrm{sen}(\theta) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$

- No caso em que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ não é o vetor nulo, pois, neste caso, $\|\vec{u}\| \neq 0$, $\|\vec{v}\| \neq 0$ e $\theta \neq 0, \pi$, o que garante que $\mathrm{sen}(\theta) \neq 0$; consequentemente, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \neq 0$. Assim, o produto vetorial fornece um teste de dependência linear:
  $$\{\,\vec{u}, \vec{v}\,\} \textit{ é LD se, e somente se, } \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$
  Em particular, segue que $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$.

Observação. A notação utilizada para o produto vetorial entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, qual seja, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, não é unanimamente adotada. Alguns autores preferem escrever $\vec{u} \times \vec{v}$ para denotar o produto vetorial. Nestas notas, evitaremos o uso dessa segunda notação, preferindo, sempre, a primeira. $\diamondsuit$

Assim, temos, em $\mathbb{V}^3$ dois produtos definidos: o produto escalar, que é um número real, e o produto vetorial, que é um vetor.

Vejamos como encontrar as coordenadas do produto vetorial.

Proposição 2.7.1. *Considere $\mathbb{V}^3$ com uma orientação fixada. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal positiva de $\mathbb{V}^3$ e sejam $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{V}^3$. Então,*
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \big(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2,\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3,\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\big)_{\mathcal{B}}. \tag{2.11}$$

Demonstração. Seja $\vec{w} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{V}^3$, o vetor cujas coordenadas são dadas por
$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Mostremos que $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Primeiramente, note que se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD, então $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Em qualquer caso, teremos $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ e, portanto, $\vec{w} = \vec{0}$.

Suponha, então, que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ seja LI. Por um lado, temos

$$\begin{aligned} \|\vec{w}\|^2 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 \\ &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2(\theta) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\ &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Comparando os lados direitos de (2.12) e (2.13), obtemos $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Agora,

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = 0.$$

A segunda igualdade acima pode ser verificada expandindo-se o determinante em cofatores ao longo da primeira linha. Segue que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são ortogonais. De maneira análoga, prova-se que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também são ortogonais.

Finalmente, mostremos que $\mathcal{C} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base positiva de $\mathbb{V}^3$. Para tanto, basta verificar que esse conjunto é LI e que a matriz de mudança de base $M_{\mathcal{CB}}$ tem determinante positivo. Para mostrar que $\mathcal{C}$ é LI, considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante de A por expansão em cofatores ao longo da terceira linha, obtemos

$$\begin{aligned} \det(A) &= \gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) - \gamma_2(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) + \gamma_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \\ &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \|\vec{w}\|^2. \end{aligned}$$

Como vimos acima que $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{w}\|$ e $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, segue que $\det(A) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 \neq 0$. Assim, $\mathcal{C}$ é, de fato, uma base de $\mathbb{V}^3$. Para ver que $\mathcal{C}$ é positiva, é preciso mostrar que $\det(M_{\mathcal{CB}}) > 0$. Agora, $M_{\mathcal{CB}} = A^{\mathrm{t}}$. Portanto,

$\det(M_{\mathcal{CB}}) = \det(A^t) = \det(A) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 > 0$. Logo, $\mathcal{C}$ é, com efeito, uma base positiva de $\mathbb{V}^3$.

Conclui-se que $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, pois esses dois vetores têm o mesmo comprimento, são paralelos e têm o mesmo sentido. □

Notação para o produto vetorial em forma de determinante. A fim de facilitar a memorização da expressão (2.11), utilizamos a seguinte notação expandida para o determinante. Considere uma orientação fixada em $\mathbb{V}^3$, e seja $\mathcal{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Então, se $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{B}}$, segue que

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix},$$

em que esse "determinante" é calculado por "expansão em cofatores ao longo da primeira linha":

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} \vec{\imath} - \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{bmatrix} \vec{\jmath} + \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \vec{k}.$$

Exemplo 2.7.2. Considere uma orientação fixada em $\mathbb{V}^3$ e coordenadas dadas em relação a uma base ortonormal positiva. Encontre as coordenadas do vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$, em que $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

Solução. Usando a notação em forma de determinante,

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \det \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \vec{\imath} - \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \vec{\jmath} + \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{k} \\ &= \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}, \end{aligned}$$

ou, ainda, $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1, -5, 3)$. ◊

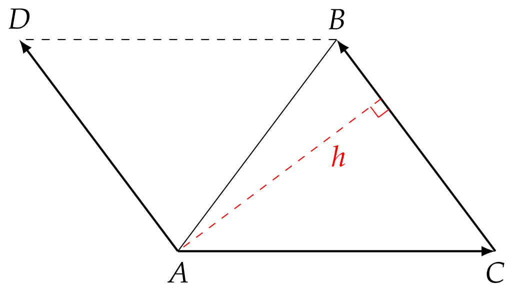
Observação. É fácil verificar, usando, por exemplo, a notação em forma de determinante para o produto vetorial, que se $\mathbb{V}^3$ tem uma orientação fixada e $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal positiva, então

$$\begin{aligned} \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} &= \vec{k}, & \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} &= -\vec{k}, \\ \vec{\jmath} \wedge \vec{k} &= \vec{\imath}, & \vec{k} \wedge \vec{\jmath} &= -\vec{\imath}, \\ \vec{k} \wedge \vec{\imath} &= \vec{\jmath}, & \vec{\imath} \wedge \vec{k} &= -\vec{\jmath}. \end{aligned}$$

As demonstrações dessas ficam a cargo do leitor. ◊

Exemplo 2.7.3. Calcule a área do triângulo ABC, em que $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 3)$ e $\overrightarrow{CB} = (-1, 1, 0)$, e as coordenadas estão dadas em relação a uma base ortonormal positiva de $\mathbb{V}^3$. Determine, também, a altura do triângulo ABC em relação ao lado BC.

Solução. Seja D o ponto tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$, conforme a figura:



Sabemos que a área do paralelogramo $ACBD$ é dada por $\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB}\right\|$. Logo, a área do triângulo ABC é dada por $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB}\right\|$. Agora,

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB} = \det \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-3, -3, 2).$$

Logo, a área do triângulo ABC é igual a

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{22}.$$

Se h denota a altura do triângulo ABC em relação ao lado BC, então a área de ABC também é dada por $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\right\| h$. Como

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

segue que $\frac{1}{2}\sqrt{22} = \frac{1}{2}\sqrt{2}h$. Portanto, $h = \sqrt{11}$. $\Diamond$

A seguir vemos como o produto vetorial comporta-se em relação a outras operações definidas no espaço do vetores.

Proposição 2.7.4. *Considere fixada uma orientação em* $\mathbb{V}^3$. *Seja* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e sejam* $\vec{u}, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v}, \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{V}^3$. *Então,*

(i) $\vec{u} \wedge (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \vec{u} \wedge \vec{v_1} + \vec{u} \wedge \vec{v_2}$;

(ii) $(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \wedge \vec{v} = \vec{u_1} \wedge \vec{v} + \vec{u_2} \wedge \vec{v}$;

(iii) $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$;

(iv) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$.

Demonstração. Para a demonstração dessas propriedades, basta considerar uma base ortonormal positiva $\mathcal{B}$ e coordenadas em relação a essa base. Assim, por exemplo, se

$$\vec{u} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)_{\mathcal{B}},$$

então

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge (\vec{v_1} + \vec{v_2}) &= \big(y(z_1 + z_2) - z(y_1 + y_2),\ z(x_1 + x_2) - x(z_1 + z_2), \\ &\qquad x(y_1 + y_2) - y(x_1 + x_2)\big)_{\mathcal{B}} \\ &= (yz_1 - zy_1, zx_1 - xz_1, xy_1 - yx_1)_{\mathcal{B}} \\ &\qquad + (yz_2 - zy_2, zx_2 - xz_2, xy_2 - yx_2)_{\mathcal{B}} \\ &= \vec{u} \wedge \vec{v_1} + \vec{u} \wedge \vec{v_2}, \end{aligned}$$

o que demonstra (i). As demais propriedades podem ser mostradas de modo análogo. □

Observação. Como vimos, no item (iv) da proposição anterior, o produto vetorial não é comutativo, isto é, a ordem em que os vetores aparecem importa.

Também vale notar que o produto vetorial *não é uma operação associativa*, isto é, em uma sequência de três vetores, distribuições diferentes de parênteses podem resultar em vetores diferentes. Por exemplo, se está fixada uma orientação em $\mathbb{V}^3$ e $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal positiva, então, por um lado, temos

$$(\vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath}) \wedge \vec{\imath} = \vec{0} \wedge \vec{\imath} = \vec{0},$$

já que tanto o par $\{\vec{\jmath}, \vec{\jmath}\}$ quanto o par $\{\vec{0}, \vec{\imath}\}$ são LD. Por outro lado, usando o que vimos na Observação na página 62,

$$\vec{\jmath} \wedge (\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath}) = \vec{\jmath} \wedge (-\vec{k}) = -(\vec{\jmath} \wedge \vec{k}) = -\vec{\imath}.$$

Assim,

$$(\vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath}) \wedge \vec{\imath} \neq \vec{\jmath} \wedge (\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath}).$$

Ou seja, a propriedade associativa não vale para o produto vetorial. É claro que sempre será possível encontrar três vetores de modo que as duas distribuições de parênteses em um produto vetorial entre eles podem resultar em um mesmo vetor. Isso ocorre se tomarmos os três vetores iguais a $\vec{0}$, por exemplo. O que se quis destacar aqui é que a associatividade do produto vetorial não vale sempre. ◊

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear I: Exs. 80–96.

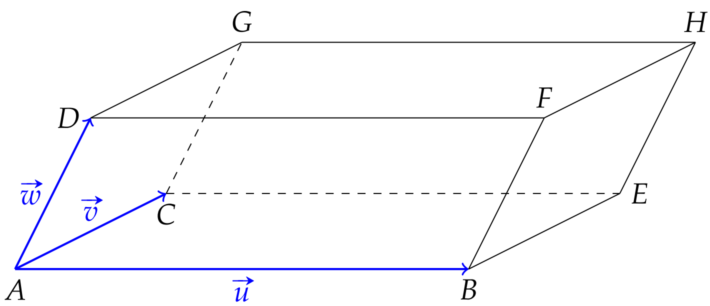
2.8 Produto misto

Nesta seção, veremos que ao procurar calcular o volume de um paralelepípedo, em termos de vetores paralelos a seus lados, deparamo-nos com uma expressão em que aparecem tanto o produto vetorial quando o produto escalar. Essa expressão será denominada produto misto dos vetores envolvidos. Vejamos os detalhes.

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ com $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ LI. Escolha um ponto $A \in \mathbb{E}^3$ e tome $B, C, D \in \mathbb{E}^3$ tais que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \overrightarrow{AD}.$$

Como o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, os pontos A, B, C, D não estão em um mesmo plano e, portanto, são vértices de um paralelepípedo, conforme a figura:



Vamos procurar uma expressão para o volume desse paralelepípedo em termos dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Sabemos que o volume $\mathbf{V}$ do paralelepípedo $ABCDEFGH$ pode ser expresso por

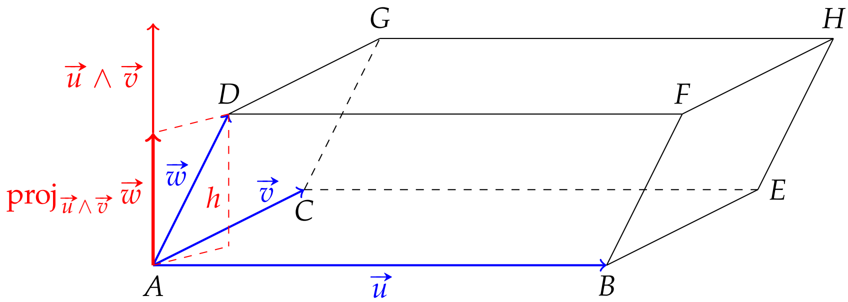
$$\mathbf{V} = \mathbf{A}h,$$

em que $\mathbf{A}$ denota a área do paralelogramo $ABEC$ — a base do paralelepípedo — e h denota a altura do paralelepípedo em relação a essa face.

Já vimos que, se $\mathbb{V}^3$ estiver orientado (e, portanto, o produto vetorial entre quaisquer dois vetores estiver definido), então

$$\mathbf{A} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$

Resta-nos determinar a altura h. Sabemos que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Assim, seu representante com extremidade inicial no ponto A é perpendicular ao plano ABC, que contém o paralelogramo $ABEC$, como na figura.



A altura h é dada pela distância do vértice D ao plano ABC, e, portanto, coincide com a norma da projeção ortogonal de $\vec{w}$ sobre $\vec{u} \wedge \vec{v}$. [3] Logo,

$$\begin{aligned} h = \|\text{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\,\vec{w}\| &= \left\| \frac{\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2} \vec{u} \wedge \vec{v} \right\| \\ &= \frac{|\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}. \end{aligned}$$

Assim, o volume do paralelepípedo $ABCDEFGH$ é dado por

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}h = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = |(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}|.$$

Esse cálculo motiva a seguinte definição.

Definição. Considere uma orientação fixa em $\mathbb{V}^3$. Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, definimos o *produto misto* de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (nesta ordem) como sendo o número real dado por $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ e denotado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Conforme vimos acima, o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ é igual a $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$.

O próximo resultado exibe uma fórmula para o produto misto em termos de coordenadas.

Proposição 2.8.1. *Considere fixada uma orientação em $\mathbb{V}^3$, e seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal positiva de $\mathbb{V}^3$. Se*

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{V}^3,$$

então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}.$$

[3] A figura sugere que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ e $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ sejam bases de mesma orientação. Mesmo que não sejam, a altura do parelelepípedo coincide com $\|\text{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\,\vec{w}\|$.

Demonstração. Sabemos, da Proposição 2.7.1, que

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\det \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{B}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \\
&= \det \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} \gamma_1 - \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{bmatrix} \gamma_2 + \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \gamma_3 \\
&= \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

expandido em cofatores ao longo da terceira linha. □

Assim como o produto vetorial fornecia um teste para dependência linear entre dois vetores, o produto misto fornece um teste para dependência linear entre três vetores:

Corolário 2.8.2. *Considere fixada uma orientação em $\mathbb{V}^3$, e seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal positiva de $\mathbb{V}^3$. Sejam $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{w} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{V}^3$. Então, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.*

Demonstração. Vimos, na Proposição 2.3.4, que o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD se, e somente se, $\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} = 0$. Como vimos na proposição acima, o determinante coincide com o produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. □

Em particular, se há uma repetição de vetores em um produto misto, ele é nulo: $[\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{v}, \vec{u}, \vec{u}] = 0$. Ao final desta seção, veremos como o produto misto se comporta em relação a permutações de vetores e em relação às operações de soma e multiplicação por escalar.

Exemplo 2.8.3. Calcule, usando o produto misto, o volume do tetraedro de vértices A, B, C e D.

Solução. Sabemos que o volume $\mathbf{V}$ do tetraedo de vértices A, B, C, D é dado por

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{A}_\mathrm{b} h,$$

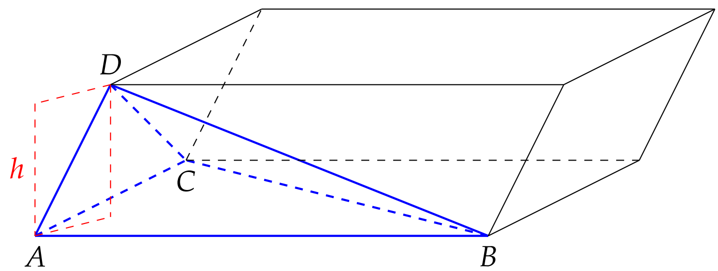
em que $\mathbf{A}_\mathrm{b}$ denota a área da base triangular ABC e h denota a altura do tetraedo em relação a essa face. Como a área do triângulo ABC é metade da área do paralelogramo definido por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, segue

$$\mathbf{A}_\mathrm{b} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|.$$

A altura h pode ser expressa por

$$h = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|},$$

uma vez que ela coincide com a altura do paralelepípedo definido pelos vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

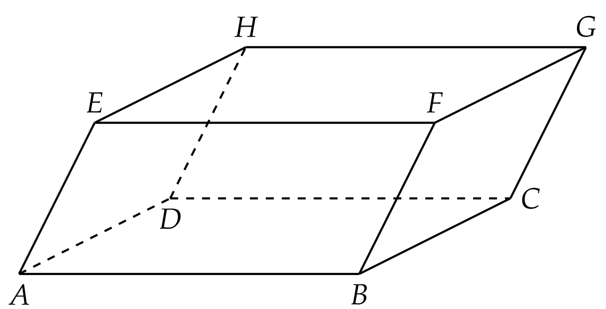


Daí, conclui-se que

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|.$$

(Aqui, supusemos, implicitamente, que $\mathbb{V}^3$ estava orientado, para que pudéssemos falar no produto vetorial e misto de vetores. Isso será feito sempre que pertinente.) $\Diamond$

Exemplo 2.8.4. Considere o paralelepípedo $ABCDEFGH$ da figura:



Suponha que esteja fixada uma orientação em $\mathbb{V}^3$ e que $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{BE} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AD} = (0,3,3)$, e que essas coordenadas estejam expressas em relação a uma base ortonormal positiva de $\mathbb{V}^3$.

(i) Encontre o volume do paralelepípedo $ABCDEFGH$.

(ii) Encontre o volume do tetraedro $EABD$.

(iii) Determine a altura do tetraedro $EABD$ em relação à face DEB.

Solução. Temos $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = (1,0,1) + (1,1,1) = (2,1,2)$. Logo, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -3.$

(i) O volume do paralelepípedo é igual a $|-3| = 3$.

(ii) Conforme vimos no exemplo anterior, o volume do tetraedro $EABD$ é igual a $\frac{1}{6}|-3| = \frac{1}{2}$.

(iii) Sabemos que $\frac{1}{2}$ = volume de $EABD = \frac{1}{3}\mathbf{A}h$, em que $\mathbf{A}$ denota a área do triângulo DEB e h denota a altura do tetraedo $EADB$ em relação à face DEB. Como $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DB}\right\|$, segue que

$$h = \frac{3}{\left\|\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DB}\right\|}.$$

Resta, portanto, encontrar $\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DB}$. Temos

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -(0,3,3) + (2,1,1) = (2,-2,-1)$$

e

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = -(0,3,3) + (1,0,1) = (1,-3,-2).$$

Logo,

$$\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DB} = \det \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = (1,3,-4).$$

Assim, $\left\|\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DB}\right\| = \sqrt{26}$. Portanto, $h = \frac{3}{\sqrt{26}}$. ♢

Proposição 2.8.5. *Considere fixada uma orientação em $\mathbb{V}^3$, seja $\mathcal{B}$ uma base ortormal positiva de $\mathbb{V}^3$ e seja $\mathcal{C} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma outra base de $\mathbb{V}^3$. Então,*

$$\det(M_{\mathcal{CB}}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$

Demonstração. Suponha que $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_{\mathcal{B}}$. Então, pela Proposição 2.8.1, temos

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \det({M_{\mathcal{CB}}}^{\mathrm{t}}) = \det(M_{\mathcal{CB}}),$$

como queríamos demonstrar. □

Podemos juntar o Corolário 2.8.2 com a conclusão da Proposição 2.8.5 para obter o seguinte critério:

Corolário 2.8.6. *Considere fixada uma orientação em $\mathbb{V}^3$, e sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$.*

(i) *Se* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$*, então* $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *não é base de* $\mathbb{V}^3$*.*

(ii) *Se* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$*, então* $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *é uma base positiva de* $\mathbb{V}^3$*.*

(iii) *Se* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$*, então* $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *é uma base negativa de* $\mathbb{V}^3$*.*

Uma das propriedades mais relevantes do produto misto é que ele é o que se chama de um produto *alternado*, isto é, se dois dos vetores em um produto misto forem permutados, o produto misto muda de sinal:

$$\begin{aligned}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] \\ &= -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}].\end{aligned}$$

Isso pode ser demonstrando, por exemplo, por meio da Proposição 2.8.1, usando o fato de que uma permutações entre duas linhas no cálculo de um determinante muda seu sinal.

Como consequência, segue que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$, pois o primeiro número é igual a $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ e o segundo, a $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$.

Por fim, como consequência das Proposições 2.4.2 e 2.7.4, pode-se demonstrar que o produto misto é *trilinear*, isto é, que se em uma de suas três entradas se colocar uma combinação linear de vetores, isso resultará na combinação linear correspondente de produtos mistos. Por exemplo,

$$[\lambda\vec{u_1} + \mu\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda[\vec{u_1}, \vec{v}, \vec{w}] + \mu[\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}],$$

e analogamente para combinações na segunda ou terceira posições do produto misto.

Segue dessa última propriedade que o produto misto não se altera se somarmos a um de seus vetores uma combinação linear dos outros dois.

Exemplo 2.8.7. (Prova 2, Álgebra Linear I, 2015) Suponha fixada uma orientação no espaço $\mathbb{V}^3$. Considere as seguintes afirmações sobre vetores $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}, \vec{z_1}, \vec{z_2} \in \mathbb{V}^3$.

I. Se $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = 5$, então $[\vec{v}, \vec{w} + 2\vec{z}, \vec{z} - 3\vec{v}] = 5$.

II. Se $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z_1}] = 2$ e $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z_2}] = 3$, então $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z_1} + 3\vec{z_2}] = 11$.

III. $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = [\vec{w}, \vec{z}, \vec{v}]$.

Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.

(B) II e III, apenas.

(C) I e III, apenas.

(D) III, apenas.

(E) I, apenas.

Solução. Vejamos I:

$$\begin{aligned}[\vec{v}, \vec{w} + 2\vec{z}, \vec{z} - 3\vec{v}] &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} - 3\vec{v}] + 2[\vec{v}, \vec{z}, \vec{z} - 3\vec{v}] \\ &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] - 3\underbrace{[\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}]}_{=0} + 2(\underbrace{[\vec{v}, \vec{z}, \vec{z}]}_{=0} - 3\underbrace{[\vec{v}, \vec{z}, \vec{v}]}_{=0}) \\ &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = 5.\end{aligned}$$

Logo, I está correta. Consideremos, agora, II:

$$[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z_1} + 3\vec{z_2}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z_1}] + 3[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z_2}] = 2 + 9 = 11.$$

Assim, II também está correta. Finalmente, III:

$$[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{z}] = [\vec{w}, \vec{z}, \vec{v}].$$

Ou seja, III está correta. *Reposta:* (A). $\diamondsuit$

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear I: Exs. 97–99.

3

Geometria analítica

Neste capítulo, utilizaremos o que vimos sobre vetores para resolver problemas geométricos tridimensionais, envolvendo pontos, retas e planos.

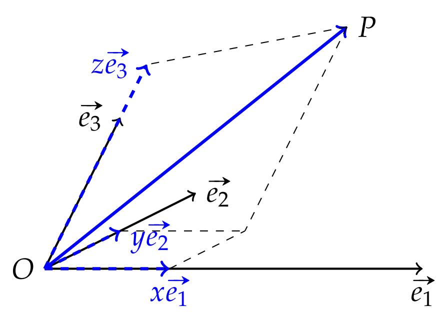
3.1 Sistemas de coordenadas

A ideia a ser explorada nesta seção é a de para tratar dos pontos no espaço dimensional $\mathbb{E}^3$ associar a cada um deles coordenadas, e, assim, introduzir ferramentas vetoriais.

Definição. Um *sistema de coordenadas* em $\mathbb{E}^3$ é um par $\Sigma = (O, \mathcal{B})$, em que $O \in \mathbb{E}^3$ é um ponto, chamado *origem* de Σ, e $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{V}^3$. Se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal, dizemos que o sistema de coordenadas Σ é *ortogonal*.

Dado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ em $\mathbb{E}^3$ e dado um ponto $P \in \mathbb{E}^3$, se $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$, dizemos que x, y, z são as *coordenadas* de P em relação ao sistema de coordenadas Σ, e escrevemos $P = (x, y, z)_{\Sigma}$.

A figura ilustra o conceito de coordenadas de um ponto P em relação a um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$, em que $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.



Assim como coordenadas de um vetor em relação a uma base são univocamente determinadas pelo vetor, coordenadas de um ponto em relação a um sistema de coordenadas também são únicas. Mais precisamente, seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ e sejam $P, Q \in \mathbb{E}^3$ tais que $P = (x, y, z)_\Sigma$ e $Q = (x, y, z)_\Sigma$. Então, $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)_\mathcal{B} = \overrightarrow{OQ}$, e isso implica $P = Q$.

Nosso primeiro resultado relaciona as coordenadas de dois pontos com as coordenadas do vetor que tem um representante cujas extremidades são esses pontos.

Proposição 3.1.1. *Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$. Se $P, Q \in \mathbb{E}^3$ são tais que $P = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$, então $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_\mathcal{B}$.*

Demonstração. Pela definição de coordenadas de um ponto, temos $\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1, z_1)_\mathcal{B}$ e $\overrightarrow{OQ} = (x_2, y_2, z_2)_\mathcal{B}$. Então,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = -(x_1, y_1, z_1)_\mathcal{B} + (x_2, y_2, z_2)_\mathcal{B} \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_\mathcal{B},\end{aligned}$$

que é a expressão desejada. □

Soma de ponto com vetor. Vimos, no início do Capítulo 2, que dado um vetor $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ e um ponto $P \in \mathbb{E}^3$, existe um único ponto $Q \in \mathbb{E}^3$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$. Esse fato será, por conveniência, denotado por $Q = P + \vec{u}$. (Podemos pensar que Q é o ponto obtido a partir de P por translação, ao longo da direção e sentido de $\vec{u}$, de distância $\|\vec{u}\|$ de P.)

Dados $P \in \mathbb{E}^3$ e $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$, a título de abreviação, escreveremos $P - \vec{u}$ para denotar o ponto $P + (-\vec{u})$.

São de demonstração imediada, a partir da definição, as propridades listadas a seguir.

Proposição 3.1.2. *Sejam $P, Q \in \mathbb{E}^3$ e $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$. Então, valem:*

(i) $P + \vec{0} = P$;

(ii) $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$;

(iii) *se $P + \vec{u} = P + \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$;*

(iv) *se $P + \vec{u} = Q + \vec{u}$, então $P = Q$.*

As coordenadas da soma de um ponto com um vetor podem ser obtidas a partir das coordenadas do ponto e das coordenadas do vetor, conforme a seguinte proposição.

Proposição 3.1.3. *Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$, seja $P \in \mathbb{E}^3$ e seja $u \in \mathbb{V}^3$. Se $P = (x, y, z)_\Sigma$ e $\vec{u} = (a, b, c)_\mathcal{B}$, então*

$$P + \vec{u} = \big(x + a, y + b, z + c \big)_\Sigma.$$

Demonstração. Considere o ponto $Q = P + \vec{u}$. Então, $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$. Suponha que $Q = (x', y', z')_\Sigma$. Pela Proposição 3.1.1, temos

$$(x' - x, y' - y, z' - z)_\mathcal{B} = \overrightarrow{PQ} = \vec{u} = (a, b, c)_\mathcal{B}.$$

Logo, $x' - x = a, y' - y = b, z' - z = c$. Portanto, $Q = (x + a, y + b, z + c)_\Sigma$. □

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.4. Suponha fixado o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ em $\mathbb{E}^3$. Dados $P = (1, 3, -3)_\Sigma, Q = (0, -1, 4)_\Sigma \in \mathbb{E}^3$ e $\vec{v} = (-1, 4, 0)_\mathcal{B} \in \mathbb{V}^3$, determine as coordenadas de

(i) $\overrightarrow{QP}$;

(ii) $P + \vec{v}$;

(iii) $Q + 2\overrightarrow{PQ}$.

Solução. (i) $\overrightarrow{QP} = (1 - 0, 3 - (-1), -3 - 4)_\mathcal{B} = (1, 4, -7)_\mathcal{B}$; (ii) $P + \vec{v} = (1 + (-1), 3 + 4, -3 + 0)_\Sigma = (0, 7, -3)_\Sigma$; (iii) sabemos que $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} = -(1, 4, -7)_\mathcal{B} = (-1, -4, 7)_\mathcal{B}$. Assim, $2\overrightarrow{PQ} = 2(-1, -4, 7)_\mathcal{B} = (-2, -8, 14)_\mathcal{B}$. Logo, $Q + 2\overrightarrow{PQ} = (0 + (-2), -1 + (-8), 4 + 14)_\Sigma = (-2, -9, 18)_\Sigma$. ◊

Exemplo 3.1.5. Suponha fixado o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ em $\mathbb{E}^3$. Determine as coordenadas do ponto médio do segmento de extremidades $A = (-1, 4, 7)_\Sigma$ e $B = (0, 1, 1)_\Sigma$.

Solução. Se M denota o ponto médio do segmento AB, então $AM = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, ou seja, $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Como $\overrightarrow{AB} = (0 - (-1), 1 - 4, 1 - 7)_\mathcal{B} = (1, -3, -6)_\mathcal{B}$, segue que $M = (-1 + \frac{1}{2}, 4 - \frac{3}{2}, 7 - 3)_\Sigma = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 4)_\Sigma$. ◊

Observe que o argumento utilizado no exemplo acima pode ser generalizado: as coordenadas do ponto médio M do segmento de extremidades $A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$ e $B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$ são dadas por

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)_\Sigma,$$

isto é, são as médias das coordenadas das extremidades. (Verifique!)

Exemplo 3.1.6. Mostre que os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (-1,0,2)$ e $C = (1,1,1)$ são vértices de um triângulo retângulo. Aqui, coordenadas estão dadas em relação a um sistema ortogonal.

Solução. Temos, pela Proposição 3.1.1,

$$\overrightarrow{AB} = (-2,0,1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (0,1,0)_{\mathcal{B}},$$

em que $\mathcal{B}$ denota a base do sistema de coordenadas. Como $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ é LI, os três pontos não são colineares, e, portanto, são vértices de um triângulo. Esse triângulo é retângulo, pois $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores ortogonais, já que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Para esse último cálculo, utilizamos a Proposição 2.4.1, uma vez que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$. $\diamondsuit$

Observação. Se $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ é um sistema ortogonal de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ e $P, Q \in \mathbb{E}^3$ são tais que $P = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$, então a *distância* $d(P,Q)$ entre P e Q é dada por

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Com efeito, $d(P,Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\|$. $\diamondsuit$

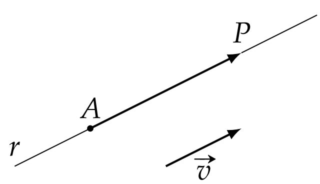
3.2 Retas

Nesta seção, assumiremos como conhecido o conceito de reta no espaço tridimensional $\mathbb{E}^3$.

Equação vetorial da reta. Seja r uma reta em $\mathbb{E}^3$. Tome um ponto $A \in r$ e um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ paralelo[1] a r. Então, dado $P \in \mathbb{E}^3$, temos:

$$\begin{aligned} P \in r \quad &\iff \quad \{\overrightarrow{AP}, \vec{v}\} \text{ é LD} \\ &\iff \quad \text{existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v} \ \ (\text{pois } \vec{v} \neq \vec{0}) \\ &\iff \quad \text{existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } P = A + \lambda \vec{v}. \end{aligned}$$

A figura a seguir ilustra a situação descrita.



[1] O vetor $\vec{v}$ é paralelo à reta r se existirem $M, N \in \mathbb{E}^3$ tais que $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ e o segmento MN for paralelo à reta r

A equação
$$r: \quad X = A + \lambda\vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$
chama-se *equação vetorial* da reta r, e $\vec{v}$ é dito um *vetor diretor* de r.

O que acabamos de ver é que um ponto $P \in \mathbb{E}^3$ está na reta r se, e somente se, P satisfizer a equação vetorial de r, ou seja, se, e somente se, existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P = A + \lambda\vec{v}$.

Observação. Uma maneira de se pensar na equação de uma reta é a de que ela dá uma trajetória sobre a reta. Por exemplo, podemos pensar em
$$r: \quad X = A + \lambda\vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$
como uma trajetória sobre r que se inicia no ponto A — a origem da trajetória — e percorre r com velocidade $\vec{v}$: no instante λ está-se no ponto $A + \lambda\vec{v}$. ◊

É claro que se $\vec{w} \in \mathbb{V}^3$ é um outro vetor não nulo paralelo à reta r e B é um outro ponto de r, então
$$r: \quad X = B + \mu\vec{w} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$
é também uma equação vetorial de r. Aliás, se se conhecem dois pontos distintos A e B sobre uma reta r, então $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor de r e
$$r: \quad X = A + \lambda\overrightarrow{AB} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$
é uma equação vetorial de r.

Equações paramétricas da reta. Suponha, agora, que $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ seja um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$, e considere a reta r em $\mathbb{E}^3$ que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)_\mathcal{B}$. Então, dado um ponto $P = (x, y, z)_\Sigma \in \mathbb{E}^3$, conforme vimos acima, sabemos que $P \in r$ se, e somente se, existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P = A + \lambda\vec{v}$, o que, por sua vez, em vista da Proposição 3.1.3 é equivalente a dizer que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$$x = x_0 + \lambda a, \quad y = y_0 + \lambda b, \quad z = z_0 + \lambda c.$$

Chamam-se
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$
de *equações paramétricas* da reta que é paralela ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)_\mathcal{B}$ e que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$.

Observe que, como $\vec{v}$ é um vetor diretor de r, em particular, $\vec{v} \neq \vec{0}$, o que implica $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. No caso particular em que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, podemos resolver para λ e obter
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Essas duas igualdades chamam-se *equações de r na forma simétrica*.

Vejamos alguns exemplos de como descrever uma reta e suas propriedades a partir de equações que a definem, e vice-versa, como encontrar equações que definem uma reta satisfazendo determinadas propriedades.

Nos exemplos que seguem, considera-se fixado um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$. Coordenadas de pontos são relativas a esse sistema de coordenadas, e coordenadas de vetores são relativas à base do sistema de coordenadas.

Exemplo 3.2.1. Encontre uma equação vetorial, equações paramétricas e, se existirem, equações na forma simétrica para a reta r que passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, 0)$.

Solução. Sabemos que $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1)$ é um vetor diretor de r. Assim, uma equação vetorial para r é

$$X = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, -1) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Equações paramétricas para r são:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

e equações na forma simétrica:

$$\frac{x-1}{-1} = y = \frac{z-1}{-1}.$$

Podemos utilizar as equações na forma simétrica, por exemplo, para verificar se um determinado ponto de $\mathbb{E}^3$ está ou não em r. Assim, $P = (2, -1, 2) \in r$, uma vez que suas coordenadas satisfazem as equações na forma simétrica, mas $Q = (2, 1, 0) \notin r$. ♢

Exemplo 3.2.2. Determine uma equação vetorial da reta r que passa pelo ponto médio do segmento AB, em que $A = (1, 1, 3)$ e $B = (3, 1, 0)$, e tem vetor diretor $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{49}, \frac{3\sqrt{3}}{98}, -\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$.

Solução. Seja M o ponto médio do segmento AB. Como vimos na página 75, $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(2, 1, \frac{3}{2}\right)$. Agora, $\vec{u} = (2, 3, -14) = \frac{98}{\sqrt{3}}\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$ e, portanto, também é diretor de r. Logo, uma equação vetorial para r é

$$X = \left(2, 1, \frac{3}{2}\right) + \lambda(2, 3, -14) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Uma outra poderia ser obtida utilizando-se $\vec{v}$ no lugar de $\vec{u}$, por exemplo, ou ainda, qualquer outro vetor não nulo paralelo a $\vec{v}$. ♢

Exemplo 3.2.3. Encontre uma equação vetorial da reta r definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 6 - 5\lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Solução. Vamos reescrever as equações paramétricas de r explicitando seus componentes:

$$\begin{cases} x & = & \color{blue}{1} & + & \lambda\color{red}{3} \\ y & = & \color{blue}{0} & + & \lambda\color{red}{2} \\ z & = & \color{blue}{6} & + & \lambda\color{red}{(-5)} \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Assim, a reta r passa pelo ponto $A = (\color{blue}{1}, \color{blue}{0}, \color{blue}{6})$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (\color{red}{3}, \color{red}{2}, \color{red}{-5})$. Logo, uma equação vetorial de r é

$$X = (\color{blue}{1}, \color{blue}{0}, \color{blue}{6}) + \lambda(\color{red}{3}, \color{red}{2}, \color{red}{-5}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

(Aqui, destacamos em cores diferentes os componentes das equações paramétricas de r.) ◊

Exemplo 3.2.4. Verifique se o ponto $P = (4, 1, -1)$ pertence à reta

$$r : \; X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 1) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Solução. É preciso decidir se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 1)$. Para tanto, λ deve satisfazer $(4, 1, -1) = (1 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$. Ou seja, é preciso decidir se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 4 = 1 + 2\lambda \\ 1 = \lambda \\ -1 = 1 + \lambda \end{cases}$$

Mas é claro que nenhum λ satisfaz essas três equações. Logo, $P \notin r$. ◊

Exemplo 3.2.5. Exiba um ponto e um vetor diretor da reta definida por

$$\frac{2x - 1}{3} = \frac{1 - y}{2} = z + 1. \tag{3.1}$$

Solução. Comecemos por reescrever as equações acima a fim de identificá-las, de fato, com as equações de uma reta. Temos

$$\frac{2x - 1}{3} = \frac{2(x - \frac{1}{2})}{3} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{1 - y}{2} = \frac{-(y - 1)}{2} = \frac{y - 1}{-2},$$

$$z + 1 = \frac{z - (-1)}{1}.$$

Assim, as equações (3.1) podem ser escritas na seguinte forma, que mostra se tratarem de equações na forma simétrica de uma reta, em que seus componentes foram explicitados:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - (-1)}{1}.$$

Ou seja, (3.1) definem uma reta que passa pelo ponto $A = (\frac{1}{2}, 1, -1)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (\frac{3}{2}, -2, 1)$. ◊

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear I: Exs. 1–3.

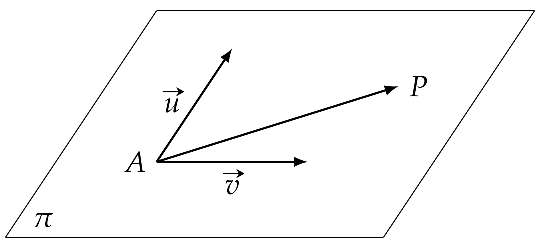
3.3 Planos

Nesta seção, assumiremos como conhecido o conceito de plano no espaço tridimensional $\mathbb{E}^3$.

Equação vetorial do plano. Seja π um plano em $\mathbb{E}^3$. Tome um ponto $A \in \pi$ e um par de vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$ tais que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam, ambos, paralelos[2] a π e $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ seja LI. Então, dado $P \in \mathbb{E}^3$, teremos $P \in \pi$ se, e somente se, o conjunto $\{\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}\}$ for LD. Mas essa condição é equivalente a existirem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ (uma vez que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI). Logo,

$$P \in \pi \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existem } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tais que } P = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

A figura a seguir ilustra a situação descrita.



A equação

$$r: \quad X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

chama-se *equação vetorial* do plano π, e $\vec{u}, \vec{v}$ são chamados *vetores diretores* de π.

Vimos que um ponto $P \in \mathbb{E}^3$ está no plano π se, e somente se, P satisfizer a equação vetorial de π, ou seja, se, e somente se, existirem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $P = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

[2]Por definição, o vetor $\vec{u}$ é paralelo ao plano π se existirem pontos $M, N \in \pi$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.

Equações paramétricas do plano. Suponha, agora, que $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ seja um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$, e considere o plano π em $\mathbb{E}^3$ que contém o ponto $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$ e tem vetores diretores $\vec{u} = (r, s, t)_\mathcal{B}$, $\vec{v} = (m, n, p)_\mathcal{B}$. Então, dado um ponto $P = (x, y, z)_\Sigma \in \mathbb{E}^3$, conforme vimos acima, sabemos que $P \in \pi$ se, e somente se, existirem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $P = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, o que, por sua vez, é equivalente a

$$x = x_0 + \lambda r + \mu m, \quad y = y_0 + \lambda s + \mu n, \quad z = z_0 + \lambda t + \mu p.$$

Chamam-se

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda r + \mu m \\ y = y_0 + \lambda s + \mu n \\ z = z_0 + \lambda t + \mu p \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

de *equações paramétricas* do plano que contém o ponto $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (r, s, t)_\mathcal{B}$, $\vec{v} = (m, n, p)_\mathcal{B}$.

Observe que como $\vec{u}, \vec{v}$ são diretores de π, em particular $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI. Assim, $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$, qualquer que seja a orientação que se coloque em $\mathbb{V}^3$.

Nos exemplos a seguir, coordenadas de pontos são relativas a um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ fixo, e coordenadas de vetores são relativas à base desse sistema de coordenadas.

Exemplo 3.3.1. Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas do plano que contém os pontos $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (0, 0, 1)$.

Solução. Os vetores $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$ são paralelos ao plano e $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ é LI. Logo, eles são diretores do plano. Assim, uma equação vetorial do plano é

$$X = (0, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(0, -1, 1) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

e equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

obtidas a partir da equação vetorial do plano lendo-se uma coordenada por vez. $\Diamond$

Equação geral do plano. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ e seja π o plano de $\mathbb{E}^3$ que contém o ponto $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$ e que tem vetores diretores $\vec{u} = (r, s, t)_\mathcal{B}$ e $\vec{v} = (m, n, p)_\mathcal{B}$. Vimos que dado um ponto $P = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma \in \mathbb{E}^3$, teremos $P \in \pi$ se, somente se, o conjunto $\{\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}\}$ for LD. Como $\overrightarrow{AP} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)_\mathcal{B}$, segue, da Proposição 2.3.4, que $P \in \pi$ se, e somente se, $\det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{bmatrix} = 0$. Desenvolvendo o determinante, por expansão em cofatores ao longo da primeira linha, por exemplo, concluímos que $P \in \pi$ se, e somente se, $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$, em que $a = \det \begin{bmatrix} s & t \\ n & p \end{bmatrix} = sp - tn$, $b = \det \begin{bmatrix} t & r \\ p & m \end{bmatrix} = tm - rp$, $c = \det \begin{bmatrix} r & s \\ m & n \end{bmatrix} = rn - sm$ e $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

A equação

$$ax + by + cz + d = 0$$

chama-se *equação geral* do plano π. Vimos que um ponto de $\mathbb{E}^3$ está no plano π se, e somente se, suas coordenadas satisfizerem a equação geral de π. Note que, na equação geral do plano π, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Isso segue da Proposição 2.3.6, uma vez que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI.

Observação. Existe uma espécie de recíproca do fato de, fixado um sistema de coordenadas, todo plano ter uma equação geral. Mais precisamente, seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ e sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Então, existe um plano π em $\mathbb{E}^3$ que tem

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{3.2}$$

como equação geral.

Com efeito, da condição $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ segue que os escalares a, b, c não podem ser os três iguais a zero. Suponha, por exemplo, que $a \neq 0$. Na equação (3.2), fazendo

- $y = z = 0$, obtemos $x = -\frac{d}{a}$;
- $y = 0$ e $z = 1$, obtemos $x = -\frac{c+d}{a}$;
- $y = 1$ e $z = 0$, obtemos $x = -\frac{b+d}{a}$.

Considere os pontos $A = (-\frac{d}{a}, 0, 0)_\Sigma$, $B = (-\frac{c+d}{a}, 0, 1)_\Sigma$ e $C = (-\frac{b+d}{a}, 1, 0)_\Sigma$. Então os vetores

$$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right)_{\mathcal{B}}$$

são LI e, portanto, existe um único plano π contendo os pontos A, B, C. Esse plano tem $(-a)\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ como vetores diretores e, assim, tem equação geral dada por

$$\det \begin{bmatrix} x - (-\frac{d}{a}) & y - 0 & z - 0 \\ c & 0 & -a \\ -\frac{b}{a} & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante, obtemos $ax + by + cz + d = 0$. O argumento é análogo se $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. $\Diamond$

Para os exemplos, suponha fixado um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$.

Exemplo 3.3.2. Encontre uma equação geral do plano que contém o ponto $A = (9, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Solução. Comecemos por observar que, de fato, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI e, portanto, definem com o ponto A um único plano. Uma equação geral desse plano é

$$\det \begin{bmatrix} x-9 & y-(-1) & z-0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

isto é, $x - z - 9 = 0$. ◊

Exemplo 3.3.3. Encontre uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 2)$.

Solução. Os vetores $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$ são paralelos ao plano e $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ é LI. Logo, uma equação geral desse plano é

$$\det \begin{bmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

ou, $2y - 2z + 2 = 0$. Como as soluções dessa equação coincidem com as soluções de $y - z + 1 = 0$, essa última equação também é uma equação geral desse mesmo plano. ◊

Exemplo 3.3.4. Encontre uma equação geral do plano definido pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Solução. Das equações paramétricas, sabemos que o plano contém o ponto $A = (-1, 1, 0)$ e tem vetores diretores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-3, 1, 0)$. (Observe que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é, de fato, LI.) Assim, uma equação geral desse plano é

$$0 = \det \begin{bmatrix} x-(-1) & y-1 & z-0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -x - 3y + 5z + 2,$$

ou, equivalentemente, $x + 3y - 5z - 2 = 0$. ◊

Exemplo 3.3.5. Encontre uma equação vetorial para o plano definido pela equação geral

$$x + 2y - z - 1 = 0. \tag{3.3}$$

Solução. Basta encontrarmos três pontos do plano que não sejam colineares, ou seja, busquemos três soluções de (3.3) de modo que os pontos cujas coordenadas sejam essas soluções não estejam sobre uma mesma reta. Façamos, em (3.3), a seguinte tentativa:

- $x = y = 0$ e, portanto, $z = -1$;
- $x = z = 0$ e, portanto, $y = \frac{1}{2}$;
- $y = z = 0$ e, portanto, $x = 1$.

Temos, então, três pontos no plano: $A = (0, 0, -1), B = (0, \frac{1}{2}, 0), C = (1, 0, 0)$. Consideremos os vetores $\overrightarrow{AB} = (0, \frac{1}{2}, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (1, 0, 1)$. Como $2\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos ao plano e $\{2\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ é LI,

$$X = (0, 0, -1) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, 0, 1) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

é uma equação vetorial para esse plano.

Se as soluções de (3.3) que encontramos tivessem resultado em três pontos colineares, bastaria trocar uma delas por uma outra que evitasse a colinearidade. Como o número de soluções de (3.3) é infinito, essa tarefa não seria difícil. $\Diamond$

Exemplo 3.3.6. Encontre equações paramétricas para a reta r determinada pela interseção dos planos

$$\pi_1 : \ x + y + z - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : \ x + y - z = 0.$$

Solução. A interseção de dois planos é uma reta precisamente quando esses planos não são paralelos. Veremos, adiante, nessas notas, como verificar se dois planos são paralelos ou não a partir de equações gerais deles (cf. Exemplo 3.3.9). Por ora, aceitemos, neste exemplo, que π_1 e π_2 não são paralelos. Para determinar a reta dada pela interseção deles, basta encontrar dois pontos distintos sobre ela. As coordenadas dos pontos de r são precisamente as soluções do sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

No Capítulo 1, vimos um método que permite encontrar *todas* as soluções desse sistema. Aqui, bastam duas. Então, vejamos, subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos $z = \frac{1}{2}$. Substituindo esse valor na segunda equação fornece $x + y = \frac{1}{2}$. Tomando $x = 0$, obtemos a solução $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; tomando $y = 0$, obtemos a solução $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Logo, r é a reta que passa pelos pontos $A = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $B = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Como o vetor $\overrightarrow{AB} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ é paralelo a r, o vetor $2\overrightarrow{AB} = (1, -1, 0)$ é diretor de r. Logo,

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{2} - \lambda \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

são equações paramétricas para r. $\diamondsuit$

Vetor normal a um plano. Veremos que, no caso de um sistema ortogonal de coordenadas, os coeficientes que aparecem na equação normal de um plano têm uma interpretação geométrica precisa.

Definição. Seja π um plano em $\mathbb{E}^3$. Um vetor $\vec{n} \in \mathbb{V}^3$ é dito *normal* ao plano π se $\vec{n} \neq \vec{0}$ e $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor paralelo a π.

Suponha fixado um sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ em $\mathbb{E}^3$, e seja π um plano em $\mathbb{E}^3$. Seja $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$ um ponto de π e seja $\vec{n} = (a, b, c)_\mathcal{B}$ um vetor normal a π. Dado um ponto $P = (x_1, y_1, z_1)_\mathcal{B}$ de $\mathbb{E}^3$, então $P \in \pi$ se, e somente se $\vec{n}$ e $\overrightarrow{AP}$ são ortogonais, isto é, se, e somente se, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$. Como a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}^3$ é ortonormal, essa última igualdade é equivalente a $a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0$, ou ainda,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

em que $d = -(ax_0 + by + 0 + cz_0)$. Ou seja,

$$ax + by + cz + d = 0$$

é uma equação geral de π.

Reciprocamente, mostremos que se $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação geral de π, então $\vec{n} = (a, b, c)_\mathcal{B}$ é um vetor normal a π. De fato, seja $\vec{v}$ um vetor paralelo a π e sejam $A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$ e $B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$ pontos de π tais que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Então, $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_\mathcal{B}$ e, como $\mathcal{B}$ é ortonormal, temos

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{v} &= a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) \\ &= (ax_2 + by_2 + cz_2) - (ax_1 + by_1 + cz_1) \\ &= d - d = 0, \end{aligned}$$

uma vez que, como tanto A como B estão em π, suas coordenadas satisfazem a equação geral $ax + by + cz + d = 0$ de π.

Nos exemplos que se seguem, está fixado um sistema ortogonal de coordenadas em $\mathbb{E}^3$.

Exemplo 3.3.7. Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto $A = (1, 0, 2)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (1, -1, 4)$.

Solução. Sabemos que π tem uma equação geral da forma $x - y + 4z + d = 0$. Falta encontrar d. Como $A \in \pi$, suas coordenadas satisfazem a equação geral. Assim, $1 - 0 + 8 + d = 0$, e, portanto, $d = -9$. Logo, $x - y + 4z - 9 = 0$ é uma equação geral de π. $\diamondsuit$

Exemplo 3.3.8. Obtenha uma equação geral do plano que contém o ponto $A = (0, 1, 2)$ e tem vetores diretores $\vec{u} = (4, 1, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

Solução. Comecemos por observar que, de fato, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI. Um vetor normal a π é qualquer vetor que seja ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Se $\mathbb{V}^3$ estivesse orientado, poderíamos tomar o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ como vetor normal a π. Fixemos, então, uma orientação em $\mathbb{V}^3$. Se a base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ de $\mathbb{V}^3$ que compõe o sistema de coordenadas for positiva, saberemos encontrar as coordenadas de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ em termos das coordenadas de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$ (usando a Proposição 2.7.1). Se $\mathcal{B}$ for uma base negativa, basta inverter o sinal das coordenadas do lado direito de (2.11) para obter as coordenadas do produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Em qualquer caso.

$$\det \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = (-4, 12, 2)_{\mathcal{B}}$$

é um vetor normal a π (pois ele é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, uma vez que ou ele é o igual a $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou igual a $-(\vec{u} \wedge \vec{v})$). Portanto, $\vec{n} = -\frac{1}{2}(-4, 12, 2) = (2, -6, -1)$ também é um vetor normal a π. Logo, π tem uma equação geral da forma $2x - 6y - z + d = 0$. Substituindo as coordenadas de A nela, obtemos $d = 8$. Logo, uma equação geral de π é $2x - 6y - z + 8 = 0$. $\diamondsuit$

Exemplo 3.3.9. Encontre uma equação vetorial para a reta r dada pela interseção dos planos

$$\pi_1 : \ 2x - y - 3 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : \ 3x + y + 2z - 1 = 0.$$

Solução. Sabemos que $\vec{n_1} = (2, -1, 0)$ é normal a π_1 e que $\vec{n_2} = (3, 1, 2)$ é normal a π_2. Como $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ não são paralelos, os planos π_1 e π_2 não são paralelos, e, como consequência, $\pi_1 \cap \pi_2$ é, de fato, uma reta. Agora, um vetor não nulo $\vec{v}$ será diretor de r se for paralelo a r, isto é, se for paralelo a π_1 e a π_2. Mas isso só ocorre se $\vec{v}$ for ortogonal a $\vec{n_1}$ e a $\vec{n_2}$. Como vimos no exemplo acima, o vetor

$$\det \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (-2, -4, 5)$$

é ortogonal a $\vec{n_1}$ e a $\vec{n_2}$ (ele é $\pm(\vec{n_1} \wedge \vec{n_2})$, dependendo da orientação de $\mathbb{V}^3$). Assim, podemos tomá-lo como diretor de r. Precisamos, por fim, de um ponto em r, ou seja, um ponto que esteja simultaneamente em π_1 e π_2. Para tanto, basta tomar um ponto cujas coordenadas são uma solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Subtituindo $y = 2x - 3$, obtida a partir da primeira equação, na segunda, obtemos $5x + 2z = 4$. Fazendo $x = 0$ nessa última equação, obtemos a solução $(0, -3, 2)$. Logo,

$$X = (0, -3, 2) + \lambda(-2, -4, 5) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

é uma equação vetorial para r. $\diamondsuit$

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear I: Exs. 4–8.

3.4 Posições relativas

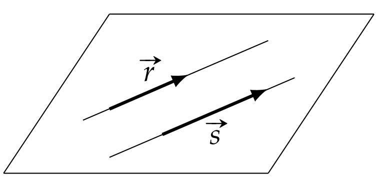
Nesta seção, veremos como os intrumentos vetoriais que introduzimos no capítulo anterior auxiliam no estudo de posições relativas de retas e planos.

Posição relativa de retas. Lembremos que duas retas em $\mathbb{E}^3$ são ditas *paralelas* se ou são coincidentes ou são coplanares e não têm ponto em comum; são ditas *concorrentes* se têm um único ponto em comum (o que é equivalente a serem coplanares mas não paralelas); e são ditas *reversas* se não são coplanares.

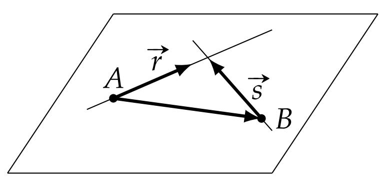
Fica, portanto, claro que dada uma reta r, passando pelo ponto A com vetor diretor $\vec{r}$, e dada uma reta s, passando pelo ponto B com vetor diretor $\vec{s}$, temos:

- r e s são paralelas se, e somente se, $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LD.
- r e s são reversas se, e somente se, $\{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}\}$ é LI.
- r e s são concorrentes se, e somente se, $\{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}\}$ é LD e $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LI.

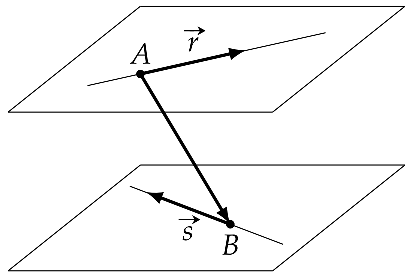
As figuras ilustram as três situações.



retas paralelas



retas concorrentes



retas reversas

Vejamos alguns exemplos, em que se entende fixado um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ (não necessariamente ortogonal).

Exemplo 3.4.1. Estude a posição relativa das retas

$$r: \ X = (1,2,3) + \lambda(0,1,3) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

e

$$s: \ X = (0,1,0) + \mu(1,1,1) \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Solução. O vetor $\vec{r} = (0,1,3)$ é diretor de r, e o vetor $\vec{s} = (1,1,1)$, de s. Como $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LI, as retas r e s não são paralelas. Para decidir se são concorrentes ou coplanares, considere os pontos $A = (1,2,3) \in r$ e $B = (0,1,0) \in s$ e o vetor $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,3)$. Temos $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$. Segue que $\{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}\}$ é LI. Portanto, r e s são reversas. $\Diamond$

Exemplo 3.4.2. Estude a posição relativa das retas

$$r: \ X = (1,2,3) + \lambda(0,1,3) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

e

$$s: \ X = (1,3,6) + \mu(0,2,6) \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Solução. O vetor $\vec{r} = (0,1,3)$ é diretor de r, e o vetor $\vec{s} = (0,2,6)$, de s. Como $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LD (pois $\vec{s} = 2\vec{r}$), as retas r e s são paralelas. Vejamos se são coincidentes ou não. Considere o ponto $A = (1,2,3) \in r$. Verifiquemos se $A \in s$, ou seja, se existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $A = (1,3,6) + \mu(0,2,6)$. Essa igualdade é equivalente a

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 3 + 2\mu \\ 3 = 6 + 6\mu \end{cases}$$

que tem solução dada por $\mu = -\frac{1}{2}$. Logo, $A \in s$, o que faz de r e s reta coincidentes. (Duas retas paralelas são coincidentes precisamente quando têm um ponto em comum.) $\Diamond$

Exemplo 3.4.3. Estude a posição relativa das retas

$$r: \ X = (1,2,3) + \lambda(0,1,3) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

e

$$s: \begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

Solução. O vetor $\vec{r} = (0,1,3)$ é diretor de r. Fazendo $z = 0$ nas equações que definem s, obtemos o ponto $P = (1,5,0) \in s$ e, fazendo $z = 1$, obtemos o ponto $Q = (1,4,1) \in s$. Logo, $\vec{s} = \overrightarrow{PQ} = (0,-1,1)$ é um vetor diretor de s, e $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LI. Temos os pontos $A = (1,2,3) \in r$ e $P = (1,5,0) \in s$, que definem o vetor $\overrightarrow{AP} = (0,3,-3)$. Como o conjunto $\{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AP}\}$ é LD (pois $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = 0$), as retas r e s são concorrentes. Para determinar o ponto de interseção das retas basta, por exemplo, substituir nas equações que definem s as coordenadas de um ponto genérico de r, que são da forma $(1, 2+\lambda, 3+3\lambda)$. Fazendo isso na primeira equação, obtemos $\lambda = 0$ (e, na segunda, também). Logo o ponto de coordenadas $(1,2,3)$ (que é o ponto A) é o ponto de interseção de r e s. $\Diamond$

Posição relativa de reta e plano. Em $\mathbb{E}^3$, dada uma reta r e um plano π, há três possibilidades de posições relativas: ou r está contida em π, ou r e π não se interceptam — nesses dois primeiros casos, dizemos que r e π são *paralelos* —, ou a interseção de r e π é apenas um ponto — nesse caso dizemos que r e π são *transversais*.

Se $\vec{r}$ é um vetor diretor da reta r e $\vec{u}, \vec{v}$ são vetores diretores do plano π, fica claro que r e π são paralelos se, e somente se $\{\vec{r}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é LD.

O resultado a seguir fornece um instrumento vetorial útil na análise de posições relativas de reta e plano, quando se tem a disposição uma equação geral do plano.

Proposição 3.4.4. *Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$. Seja $\vec{w} = (m,n,p)_{\mathcal{B}}$ um vetor e seja π um plano em $\mathbb{E}^3$ de equação geral $ax + by + cz + d = 0$. Então, $\vec{w}$ é paralelo a π se, e somente se, $am + bn + cp = 0$.*

Demonstração. Tome um ponto $A \in \pi$ e seja $B = A + \vec{w}$. Então, $\vec{w}$ é paralelo a π se, e somente se, $B \in \pi$. Agora, como $A \in \pi$, se $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$, então

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = -d. \tag{3.4}$$

Como $B = (x_0 + m, y_0 + n, z_0 + p)_\Sigma$, segue que $B \in \pi$ se, e somente se, $a(x_0 + m) + b(y_0 + n) + c(z_0 + p) + d = 0$. Em vista de (3.4), essa igualdade ocorre se, e somente se, $am + bn + cp = 0$. $\square$

Observação. Se o sistema de coordenadas na proposição acima fosse ortogonal, o resultado seria imediato, uma vez que, nesse caso $\vec{n} = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$ seria um vetor normal a π e, portanto, $\vec{w}$ seria paralelo a π se, e somente se, $\vec{w}$ e $\vec{n}$ fossem ortogonais. O que diz a Proposição 3.4.4 é que o cálculo que realizaríamos para verificar a ortogonalidade entre $\vec{w}$ e $\vec{n}$, no caso de sistema ortogonal, continua valendo como teste de paralelismo entre $\vec{w}$ e π, mesmo se o sistema não for ortogonal. $\Diamond$

Como uma reta é paralalela a um plano se, e só se, qualquer vetor diretor da reta for paralelo ao plano, o critério acima pode ser aplicado no estudo da posição relativa entre reta e plano.

Nos exemplos a seguir, sempre estará implícito um sistema de coordenadas não necessariamente ortogonal fixado.

Exemplo 3.4.5. Estude a posição relativa da reta r e plano π, em que

$$r : \; X = (1, 1, 1) + \alpha(3, 2, 1) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

e

$$\pi : \; X = (1, 1, 3) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(0, 1, 3) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Solução. Sabemos que uma equação geral de π é dada por

$$\det \begin{bmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 0.$$

Expandindo o determinante, obtemos $\pi : 4x + 3y - z - 4 = 0$. Como $\vec{r} = (3, 2, 1)$ é um vetor diretor de r, o critério da Proposição 3.4.4 nos garante que $\vec{r}$ não é paralelo a π, uma vez que $4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 17 \neq 0$. Logo, r e π são transversais. Para encontrar o ponto de interseção entre r e π basta substituir as coordenadas de um ponto genérico de r, $(1 + 3\alpha, 1 + 2\alpha, 1 + \alpha)$, na equação geral de π: $4(1 + 3\alpha) + 3(1 + 2\alpha) - (1 + \alpha) - 4 = 0$. Essa equação nos fornece $\alpha = -\frac{2}{17}$. Logo, $r \cap \pi = \left\{ \left(\frac{11}{17}, \frac{13}{17}, \frac{15}{17} \right) \right\}$. $\Diamond$

Exemplo 3.4.6. Estude a posição relativa da reta r e plano π, em que

$$r : \; X = (2, 2, 1) + \alpha(3, 3, 0) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

e

$$\pi : \; X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(0, 0, 3) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Solução. Um vetor diretor de r é $\vec{r} = (3, 3, 0)$ e vetores diretores de π são $\vec{u} = (1, 1, 1), \vec{v} = (0, 0, 3)$. Como $\det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 0$, segue que r e π são paralelos (pois o determinante sendo nulo garante que $\{\vec{r}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é LD). Para decidir se r está contida em π ou não, tomemos o ponto $A = (2, 2, 1) \in$

r. Se A for um ponto de π, como r e π são paralelos, isso implicará que r está contida em π, caso contrário, teremos $r \cap \pi = \varnothing$. Vejamos, então, se existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $A = (1,0,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(0,0,3)$, isto é, λ, μ que satisfazem

$$\begin{cases} 2 = 1 + \lambda \\ 2 = \lambda \\ 1 = 1 + \lambda + 3\mu \end{cases}$$

É claro que esse sistema não tem solução. Portanto, $A \notin \pi$, donde se conclui que $r \cap \pi = \varnothing$. $\diamondsuit$

Exemplo 3.4.7. Estude a posição relativa da reta r e plano π, em que

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad \pi : \; x + y - 2 = 0$$

Solução. Um vetor diretor de r é $\overrightarrow{r} = (1, -1, 1)$. Como $1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 0$, r e π são paralelos. O ponto $A = (1,1,0)$ está em r e suas coordenadas satisfazem a equação geral de π. Logo, r está contida em π. $\diamondsuit$

Posição relativa de planos. Dois planos em $\mathbb{E}^3$ são ditos *transversais* se interceptarem-se em uma reta; caso contrário, são ditos *paralelos*. Se são paralelos, podem ser coincidentes ou ter interseção vazia.

Proposição 3.4.8. *Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ e sejam π_1 e π_2 planos em $\mathbb{E}^3$, com equações gerais*

$$\pi_1 : \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \qquad e \qquad \pi_2 : \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Então, π_1 e π_2 são paralelos se, e somente se, existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda a_1 = a_2$, $\lambda b_1 = b_2$ e $\lambda c_1 = c_2$.

Demonstração. Suponha que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda a_1 = a_2$, $\lambda b_1 = b_2$ e $\lambda c_1 = c_2$. Sejam $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}$ vetores diretores de π_1. Se $\overrightarrow{u_1} = (r, s, t)_{\mathcal{B}}$ e $\overrightarrow{v_1} = (m, n, p)_{\mathcal{B}}$, então

$$a_2r + b_2s + c_2t = \lambda a_1 r + a\lambda b_1 s + \lambda c_1 t = \lambda(a_1r + b_1s + c_1t) = 0,$$

pois $a_1r + b_1s + c_1t = 0$, pela Proposição 3.4.4, uma vez que, sendo diretor de π_1, $\overrightarrow{u_1}$ é paralelo a π_1. De modo similar, mostra-se que $a_2m + b_2n + c_2p = 0$. Portanto, tanto $\overrightarrow{u_1}$ como $\overrightarrow{v_1}$ são paralelos a π_2. Daí, segue que π_1 e π_2 são paralelos.

Reciprocamente, suponha que π_1 e π_2 sejam paralelos. Sabemos que pelo menos um dos escalares a_1, b_1, c_1 não é nulo. Suponha, por exemplo, que $a_1 \neq 0$. Mostremos que, tomando $\lambda = \frac{a_2}{a_1}$, temos as igualdades desejadas. É claro que $a_2 = \lambda a_1$. Para mostrar que $b_2 = \lambda b_1$, considere o vetor $\vec{w} = (b_2, -a_2, 0)_{\mathcal{B}}$. Pelo teste da Proposição 3.4.4, $\vec{w}$ é paralelo a π_2. Como π_2 e π_1 são paralelos, segue que $\vec{w}$ é paralelo a π_1 Outra aplicação da Proposição 3.4.4 fornece que $a_1b_2 + b_1(-a_2) = 0$, e, portanto, $b_2 = \lambda b_1$. Para mostrar que $c_2 = \lambda c_1$, usa-se um argumento análogo, com o fato de o vetor $\vec{t} = (c_2, 0, -a_2)_{\mathcal{B}}$ ser paralelo a π_2 e, *a fortiori*, a π_1. $\square$

Observação. Na Proposição 3.4.8, se o sistema de coordenadas Σ for ortogonal, então $\vec{n_1} = (a_1, b_1, c_1)_{\mathcal{B}}$ é um vetor normal a π_1 e $\vec{n_2} = (a_2, b_2, c_2)_{\mathcal{B}}$ é um vetor normal a π_2. Então, π_1 e π_2 são paralelos se, e somente se, $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ são vetores paralelos. Isso ocorre se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{n_2} = \lambda\vec{n_1}$ (lembre que vetores normais nunca são nulos). O que a Proposição 3.4.8 diz é que mesmo no caso de um sistema que não seja ortogonal, a proporcionalidade entre os três primeiros coeficientes das equações gerais dos planos é equivalente ao paralelismo entre eles. $\diamondsuit$

Nos exemplos, entende-se fixado um sistema de coordenadas não necessariamente ortogonal em $\mathbb{E}^3$.

Exemplo 3.4.9. Estude a posição relativa dos planos

$$\pi_1 : \ X = (1,0,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(0,1,0) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

e

$$\pi_2 : \ X = (0,0,0) + \alpha(1,0,1) + \beta(-1,0,3) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Solução. Equações gerais de π_1 e π_3 são obtidas fazendo, respectivamente,

$$\det \begin{bmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{e} \qquad \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 0.$$

Assim, $\pi_1 : \ x - z = 0$ e $\pi_2 : \ y = 0$. Aplicando o critério visto na Proposição 3.4.8, concluímos que π_1 e π_2 são transversais. A reta r de interseção de π e π_2 é definida por

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

ou seja, ela é formada pelos de $\mathbb{E}^3$ cujas coordenadas satisfazem simultaneamente as equações de π_1 e de π_2. $\diamondsuit$

Exemplo 3.4.10. Estude a posição relativa dos planos $\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0$ e $\pi_2 : x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 9 = 0$.

Solução. Tomando $\lambda = \frac{1}{2}$ na Proposição 3.4.8, concluimos que π_1 e π_2 são paralelos. Agora, para que eles fossem coincidentes, seria necessário que o quarto escalar nas equações gerais estivessem na mesma proporção dos demais. Como $-9 \neq \frac{1}{2}(-1)$, segue que $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$. $\diamondsuit$

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear I: Exs. 9–16.

3.5 Perpendicularidade e distâncias

Nesta seção, estará fixada uma orientação em $\mathbb{V}^3$ e um sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ em $\mathbb{E}^3$, em que a base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ de $\mathbb{V}^3$ é positiva. Coordenadas de pontos estarão dadas em relação a Σ, e coordenadas de vetores estarão dadas em relação a $\mathcal{B}$.

Comecemos por esclarecer o conceito de perpendicularidade envolvendo retas e planos.

Sejam r e s retas em $\mathbb{E}^3$ com vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$, respectivamente. Dizemos que as retas r e s são *ortogonais* se os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ forem ortogonais. Dizemos que as retas r e s são *perpendiculares* se forem ortogonais e concorrentes. (Observe que retas reversas podem ser ortogonais, mas não são perpendiculares.)

Seja r uma reta em $\mathbb{E}^3$ com vetor diretor $\vec{r}$ e seja π um plano em $\mathbb{E}^3$ com vetor normal $\vec{n}$. Dizemos que r e π são *perpendiculares* se os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ forem paralelos.

Sejam π_1 e π_2 planos em $\mathbb{E}^3$ com vetores normais $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$, respectivamente. Dizemos que os planos π_1 e π_2 são *perpendiculares* se os vetores $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ forem ortogonais.

Exemplo 3.5.1. Verifique se são ortogonais e perpendiculares as retas

$$r : X = (1,1,1) + \lambda(2,1,-3) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

e

$$s : X = (0,1,0) + \lambda(-1,2,0) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Solução. De suas respectivas equações, extraímos que são diretores de r e s, $\vec{r} = (2,1,-3)$ e $\vec{s} = (-1,2,0)$, respectivamente. Esses vetores são ortogonais, uma vez que $\vec{r} \cdot \vec{s} = -2 + 2 + 0 = 0$. Logo, r e s são retas ortogonais. Agora, tomando os pontos $A = (1,1,1) \in r$ e $B = (0,1,0) \in s$, obtemos o vetor $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-1)$. Como $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -11 \neq 0$, segue que $\{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}\}$ é LI e, portanto, r e s são reversas. Logo, não são perpendiculares. $\Diamond$

Exemplo 3.5.2. Encontre uma equação geral do plano π que contém a origem e é perpendicular à reta $r : X = (1,1,0) + \lambda(2,3,7)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Solução. Para que r e π sejam perpendiculares, é preciso que o vetor diretor $\vec{r} = (2,3,4)$ de r seja normal a π. Assim, uma equação geral de π é da forma $2x + 3y + 7z + d = 0$. Como a origem $O = (0,0,0)$ é um ponto de π, segue que $d = 0$ e, portanto, $\pi : 2x + 3y + 7z = 0$. $\Diamond$

Exemplo 3.5.3. Verifique se os planos

$$\pi_1 : X = (0,0,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(-1,-1,1) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

e

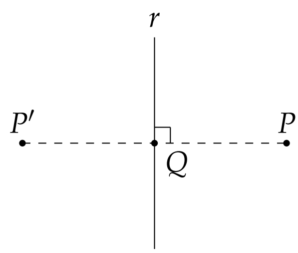
$$\pi_2 : 2x - 7y + 16z - 40 = 0$$

são perpendiculares.

Solução. Como $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (-1,-1,1)$ são vetores diretores de π_1, $\vec{n_1} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (1,-2,-1)$ é um vetor normal a π_1. Sabemos que $\vec{n_2} = (2,-4,16)$ é normal a π_2. Temos $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 2 + 14 - 16 = 0$. Logo, $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ são ortogonais. Portanto, π_1 e π_2 são perpendiculares. $\Diamond$

Exemplo 3.5.4. Considere a reta $r : X = (2,0,-1) + \lambda(3,1,3)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ e o ponto $P = (1,2,1)$. Determine a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r e o ponto P' simétrico de P em relação a r.

Solução. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre r. Então, Q é um ponto de r tal que a reta PQ é perpendicular a r, e $P' = P + 2\overrightarrow{PQ}$. Veja a figura.



Como $Q \in r$, temos $Q = (2 + 3\lambda, \lambda, -1 + 3\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto, $\overrightarrow{PQ} = (1 + 3\lambda, \lambda - 2, -2 + 3\lambda)$. Como queremos que r e a reta PQ sejam perpendiculares, é preciso que os vetores $\vec{r} = (3,1,3)$ e $\overrightarrow{PQ}$ sejam ortogonais. Assim, o número λ que procuramos deve satisfazer $3(1 + 3\lambda) + (\lambda - 2) + 3(-2 + 3\lambda) = \vec{r} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$. Segue que $\lambda = \frac{5}{19}$. Logo, $Q = (\frac{53}{19}, \frac{5}{19}, -\frac{4}{19})$. Também segue que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{19}(34, -33, -23)$. Assim, como $P' = P + 2\overrightarrow{PQ}$, segue que $P' = \big(1 + \frac{2}{19}34, 2 + \frac{2}{19}(-33), 1 + \frac{2}{19}(-23)\big) = (\frac{87}{19}, -\frac{28}{19}, -\frac{27}{19})$.

Uma outra solução resulta da observação de que $Q = A + \operatorname{proj}_{\vec{r}} \overrightarrow{AP}$, em que A é um ponto arbitrário de r (por exemplo, $A = (2,0,-1)$). Neste caso, temos $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \operatorname{proj}_{\vec{r}} \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AP}$ e, assim, $P' = P + 2\big(\operatorname{proj}_{\vec{r}} \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AP}\big)$, sem precisarmos determinar Q. $\Diamond$

Distância entre ponto e reta. Seja r uma reta em $\mathbb{E}^3$ e seja $P \in \mathbb{E}^3$ um ponto que não está em r. Sabemos, da geometria euclidiana, que a *distância*

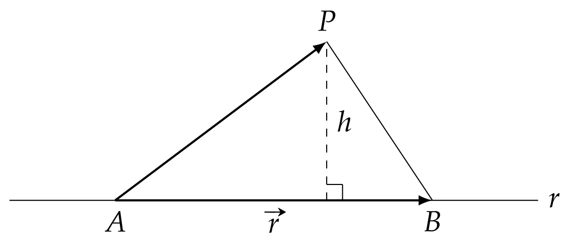
$d(P,r)$ entre P e r é dada por $d(P,r) = d(P,Q)$, em que Q é o ponto de r de modo que a reta PQ seja perpendicular a r. Se $P \in r$, então $d(P,r) = 0$.

O resultado a seguir fornece uma fórmula para a distância entre um ponto e uma reta que prescinde da determinação do "pé da perpendicular" (isto é, do ponto Q como acima).

Proposição 3.5.5. *Seja r uma reta que passa pelo ponto A e tem vetor diretor $\vec{r}$, e seja P um ponto. Então,*

$$d(P,r) = \frac{\left\| \overrightarrow{AP} \wedge \vec{r} \right\|}{\| \vec{r} \|}. \tag{3.5}$$

Demonstração. Se $P \in r$, então $\{\overrightarrow{AP}, \vec{r}\}$ é LD, e a fórmula é válida. Suponha que $P \notin r$ e seja $B = A + \vec{r}$. Então, $d(P,r) = h$, em que h denota a altura do triângulo ABP em relação ao lado AB.



Sabemos que a área do triângulo ABP é dada por $\frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB} \right\|$. Mas essa área também é dada por $\frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \right\| h$. Igualando as duas expressões para a área, usando que $\overrightarrow{AB} = \vec{r}$ e resolvendo para h, obtemos a fórmula desejada. □

Exemplo 3.5.6. Calcule a distância entre o ponto $P = (1,1,-1)$ e a reta

$$r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Solução. Para aplicar a fórmula (3.5), precisamos de um ponto sobre r e um vetor diretor de r. Como r está dada pela interseção de dois planos, sabemos que um vetor diretor de r pode ser obtido pelo produto vetorial entre os vetores normais aos planos. Assim, $\vec{r} = \det \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (1,1,2)$ é um vetor diretor de r. Um ponto sobre r é um ponto cujas coordenadas satisfaçam as equações gerais dos dois planos, por exemplo, $A = (0,-1,-1) \in r$. Assim, $\overrightarrow{AP} = (1,2,0)$ e, aplicando a fórmula (3.5), obtemos

$$d(P,r) = \frac{\|(1,2,0) \wedge (1,1,2)\|}{\|(1,1,2)\|} = \frac{\|(4,-2,-1)\|}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

(Uma outra maneira de se obter um vetor diretor de r seria determinar dois pontos A e B em r e tomar $\overrightarrow{AB}$ como diretor de r.) $\Diamond$

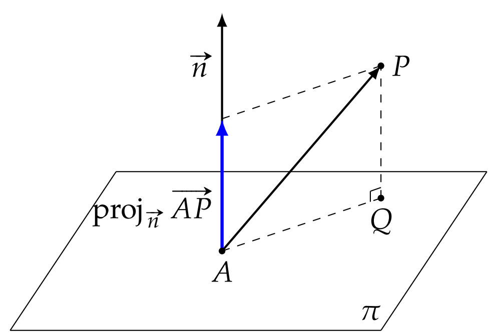
Distância entre ponto e plano. Seja π um plano em $\mathbb{E}^3$ e seja $P \in \mathbb{E}^3$ um ponto que não está em π. A *distância* $d(P,\pi)$ entre P e π é dada por $d(P,\pi) = d(P,Q)$, em que Q é o ponto de π de modo que a reta PQ seja perpendicular a π. Se $P \in \pi$, então $d(P,\pi) = 0$.

Existe uma fórmula para a distância entre um ponto e um plano que evita a determinação do ponto Q mencionado acima. Essa fórmula está dada na próxima proposição e é uma versão tridimensional para uma conhecida fórmula para a distância entre um ponto e uma reta da geometria analítica bidimensional.

Proposição 3.5.7. *Seja π o plano que contém o ponto A e tem vetor normal $\vec{n}$, e seja P um ponto. Então,*

$$d(P,\pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}. \tag{3.6}$$

Demonstração. Basta notar que a distância $d(P,\pi)$ é dada pelo comprimento da projeção ortogonal de $\overrightarrow{AP}$ na direção ortogonal ao plano π, ou seja, na direção de $\vec{n}$, conforme ilustrado na figura.



Assim,

$$\begin{aligned} d(P,\pi) &= \left\|\mathrm{proj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\right\| = \left|\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right| \|\vec{n}\| \\ &= \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}, \end{aligned}$$

que é a fórmula desejada. $\square$

Observação. Suponha, na Proposição 3.5.7, que

$$\pi: \; ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{e} \qquad P = (x_0, y_0, z_0).$$

Então, um vetor normal a π será $\vec{n} = (a, b, c)$. Agora, dado um ponto $A = (x_1, y_1, z_1) \in \pi$, teremos $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} &= (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (a, b, c) \\ &= a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) \\ &= ax_0 + by_0 + cz_0 + d, \end{aligned}$$

uma vez que $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$. Assim, a fórmula (3.6) assume a forma

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{3.7}$$

Essa é a versão tridimensional para a conhecida fórmula da distância entre um ponto e uma reta da geometria analítica no plano. $\diamondsuit$

Exemplo 3.5.8. (Prova 2, Álgebra Linear I, 2019) Considere o ponto $P = (-1, 1, 1)$ e o plano π dado por:

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda + 7\mu \\ y = 1 - 2\lambda + \mu \\ z = \lambda - 5\mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \, .$$

A distância entre o ponto P e plano π é igual a

(A) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

Solução. A partir das equações paramétricas no enunciado, vemos que $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (7, 1, -5)$ são vetores diretores do plano π e que o ponto $A = (-1, 1, 0)$ pertence ao plano π. Logo, uma equação geral para π é

$$\det \begin{bmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix} = 0,$$

ou, $9x + 12y + 15z - 3 = 0$. Substituindo na fórmula (3.7), obtemos

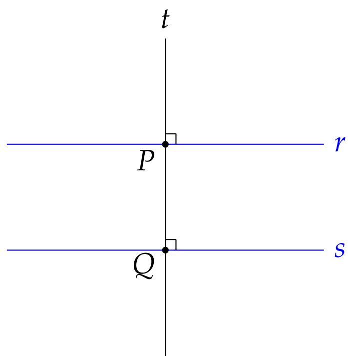
$$d(P, \pi) = \frac{|9(-1) + 12(1) + 15(1) - 3|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 15^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \, .$$

Resposta: (B). $\diamondsuit$

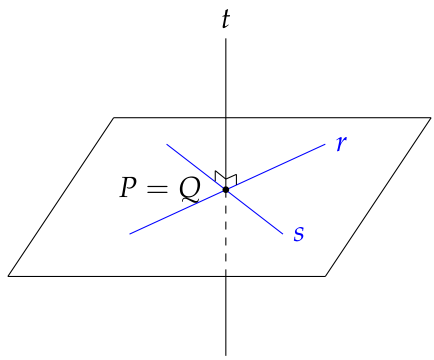
Distância entre retas. Sejam r e s retas não coincidentes em $\mathbb{E}^3$, e seja t uma reta perpendicular a r e a s. A *distância* $d(r,s)$ entre r e s é dada por $d(r,s) = d(P,Q)$, em que P é o ponto de interseção entre r e t e Q é o ponto de interseção entre s e t. Se r e s são coincidentes, então $d(r,s) = 0$.

Se r e s são paralelas, existem infinitas retas perpendiculares a r e a s. Mas se r e s são concorrentes ou reversas, existe apenas uma perpendicular comum. O leitor deve tentar se convencer deste fato. Segue dessa discussão que se r e s são concorrentes, então $d(r,s) = 0$.

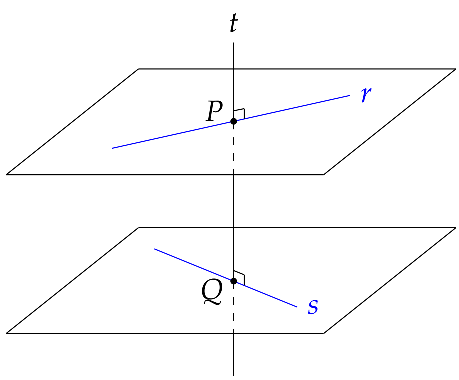
As seguintes figuras auxiliam a visualizar as possíveis diferentes configurações.



retas paralelas



retas concorrentes



retas reversas

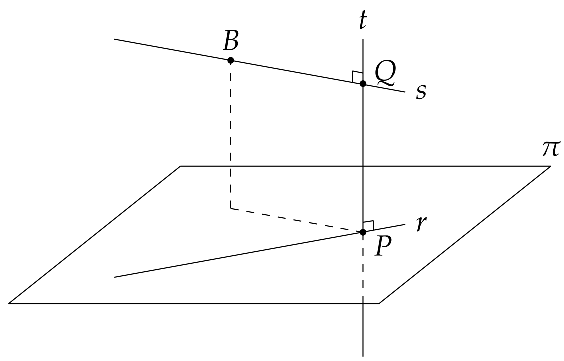
Se r e s são paralelas, então $d(r,s) = d(A,s) = d(B,r)$, quaisquer que sejam $A \in r$ ou $B \in s$. Assim, o cálculo de distâncias entre retas paralelas recai no cálculo de distâncias entre ponto e reta.

Se as retas não são paralelas, o resultado a seguir dá uma fórmula para a distância entre elas que evita passar pela determinação da perpendicular comum e suas interseções com as duas retas.

Proposição 3.5.9. *Sejam r e s retas não paralelas com vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$, respectivamente. Seja $A \in r$ e seja $B \in s$. Então,*

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}]|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}. \tag{3.8}$$

Demonstração. Como r e s não são paralelas, $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LI, e, portanto, $\vec{r} \wedge \vec{s} \neq \vec{0}$. Logo, a fórmula (3.8) faz sentido. Se r e s são concorrentes, então $\{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}\}$ é LD, o que implica que $[\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}] = 0$. Logo, a fórmula (3.8) vale neste caso. Vejamos o caso em que r e s são reversas. Seja π o único plano que contém r e é paralelo a s. (Esse é o plano que tem vetores diretores $\vec{r}, \vec{s}$ e contém o ponto A.) Então, a distância entre r e s coincide com a distância entre B e π (veja a figura).



Como $\vec{r} \wedge \vec{s}$ é um vetor normal a π, podemos aplicar a Proposição 3.5.7 para obter

$$d(r,s) = d(B,\pi) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{s})|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|} = \frac{|[\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}]|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|},$$

que é o que desejávamos mostrar. □

Uma outra maneira de entender (3.8) é perceber que $d(r,s)$ é precisamente a altura do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ em relação à face definida por $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

Exemplo 3.5.10. Determine a distância entre as retas

$$r: \ X = (1,2,3) + \lambda(0,1,3) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

e

$$s: \ X = (0,1,0) + \mu(1,1,1) \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Solução. Já havíamos visto, no Exemplo 3.4.1, que r e s são reversas. De todo modo, elas não são paralelas, uma vez que têm vetores diretores $\vec{r} =$

$(0,1,3)$ e $\vec{s} = (1,1,1)$, respectivamente, e eles não são paralelos. Temos os pontos $A = (1,2,3) \in r$ e $B = (0,1,0) \in s$. Logo, usando (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} d(r,s) &= \frac{|[\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}]|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|} \\ &= \frac{|[(0,1,3),(1,1,1),(-1,-1,-3)]|}{\|(0,1,3) \wedge (1,1,1)\|} \\ &= \frac{|2|}{\|(-2,3,-1)\|} \\ &= \frac{2}{\sqrt{14}}. \end{aligned}$$

Essa também é a distância entre os pontos de interseção da perpendicular comum a r e s com elas. ♢

Distância entre reta e plano. Seja r uma reta em $\mathbb{E}^3$ e seja π um plano em $\mathbb{E}^3$. Se $r \cap \pi = \varnothing$, isto é, se r e π forem paralelos, mas r não estiver contida em π, então a *distância* $d(r,\pi)$ entre a reta r e o plano π é dada por $d(r,\pi) = d(P,\pi)$, em que P é qualquer ponto de r. Se r estiver contida em π ou r e π forem transversais, então $d(r,\pi) = 0$.

Assim, o cálculo da distância entre uma reta e um plano, quando a distância não é nula, fica reduzido ao cálculo da distância entre um ponto e um plano, que já tratamos anteriormente.

Distância entre planos. Se π_1 e π_2 são planos em $\mathbb{E}^3$ tais que $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, ou seja, são planos paralelos não coincidentes, então a *distância* $d(\pi_1,\pi_2)$ entre os planos π_1 e π_2 satisfaz $d(\pi_1,\pi_2) = d(P,\pi_2) = d(Q,\pi_1)$, quaisquer que sejam $P \in \pi_1$ e $Q \in \pi_2$. Se π_1 e π_2 forem coincidentes ou transversais, $d(\pi_1,\pi_2) = 0$.

Novamente, recaímos em um caso já estudado anteriormente.

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear I: Exs. 17–36.

Parte 2

Álgebra Linear

4

Espaços vetoriais

Neste capítulo, será introduzida a noção de espaço vetorial, um tipo de estrutura algébrica que generaliza o espaço $\mathbb{V}^3$ dos vetores tridimensionais.

As referências para este e os demais capítulos destas notas são **[2]**, **[5]** e **[7]**.

4.1 Definição, exemplos, propriedades básicas

Lembre que no conjunto $\mathbb{V}^3$, formado pelos vetores tridimensionais, foram definidas duas operações: soma e multiplicação por um escalar. (Também foram definidos produto escalar e produto vetorial, mas essas operações não serão consideradas neste momento.) Essas operações tinham propriedades algébricas, listadas nas Proposições 2.1.1 e 2.1.2, que fazem de $\mathbb{V}^3$ um exemplo de um espaço vetorial, conforme a definição a seguir.

Definição. Chamamos de *espaço vetorial* um conjunto V munido de duas operações

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda v, \end{array}$$

denominadas *soma* e *multiplicação por escalar*, respectivamente, que satisfazem as seguintes condições:

(1) $u + v = v + u$, para todos $u, v \in V$;

(2) $u + (v + w) = (u + v) + w$, para todos $u, v, w \in V$;

(3) existe $0_V \in V$ tal que $u + 0_V = u$, qualquer que seja $u \in V$;

(4) para todo $u \in V$, existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0_V$;

(5) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$, para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $u \in V$;

(6) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$, para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $u \in V$;

(7) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$;

(8) $1u = u$, para todo $u \in V$.

Os elementos de um espaço vetorial V são denominados *vetores* de V; o vetor 0_V é chamado *vetor nulo* de V.

Vejamos alguns exemplos de espaços vetoriais.

Exemplo 4.1.1. Como já mencionado, $\mathbb{V}^3$ com as operações usuais de soma de vetores e de multiplicação de um escalar por um vetor é um espaço vetorial, em que $0_{\mathbb{V}^3} = \vec{0}$. As Proposições 2.1.1 e 2.1.2 garantem que as oito condições na definição de espaço vetorial estão satisfeitas. $\diamondsuit$

Exemplo 4.1.2. Seja n um inteiro positivo, e considere o conjunto $\mathbb{R}^n$ formado por todas as sequências de n números reais, isto é,

$$\mathbb{R}^n = \{\, (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n \,\}.$$

O conjunto $\mathbb{R}^n$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial em que a soma é dada por

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

e a multiplicação por escalar, por

$$\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

Para demonstrar essa afirmação é necessário verificar cada uma das condições (1)–(8) na definição de espaço vetorial. Essa é uma tarefa simples (e tediosa), que fica a cargo do leitor. O que vale a pena destacar é que, com essas operações, os vetores cujas existências estão postuladas nas condições (3) e (4) são dados por

$$0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$$

e

$$-(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n),$$

como o leitor pode facilmente verificar. $\diamondsuit$

Exemplo 4.1.3. Seja I um intervalo contido na reta real $\mathbb{R}$. Considere o conjunto das funções reais definidas em I:

$$\mathcal{F}(I) = \{\, f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função} \,\}.$$

Existe uma estrutura natural de espaço vetorial em $\mathcal{F}(I)$ em que as operações são tais que se $f, g \in \mathcal{F}(I)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{e} \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

para todo $x \in I$. Neste caso, o vetor nulo $0_{\mathcal{F}(I)}$ é a função nula $\mathbf{n}\colon I \to \mathbb{R}$, definida por $\mathbf{n}(x) = 0$, para todo $x \in I$. E se $f \in \mathcal{F}(I)$, então $-f \in \mathcal{F}(I)$ é a função definida por $(-f)(x) = -f(x)$, para todo $x \in I$. Mais uma vez, a tarefa de verificação de que as condições (1)–(8) estão satisfeitas fica a cargo do leitor. $\diamondsuit$

Exemplo 4.1.4. Um exemplo de espaço vetorial já visto nesta notas, mas não nomeado dessa maneira, são os espaços vetoriais de matrizes. Sejam m, n inteiros positivos e denote (como vimos fazendo) o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Esse conjunto tem uma estrutura natural de espaço vetorial em que as operações são dadas por

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad \text{e} \qquad \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Essas são as mesmas operações que introduzimos na Seção 1.2. O vetor nulo $0_{M_{m\times n}(\mathbb{R})}$ do espaço vetorial $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz $m \times n$ nula, cujas entradas são todas iguais a 0, e $-(a_{ij}) = (-a_{ij})$. $\diamondsuit$

Exemplo 4.1.5. Este é um exemplo que será bastante explorado nestas notas. Seja n um inteiro positivo. Denote por $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto formado por todos os polinômios de grau menor ou igual a n e o polinômio nulo. Ou seja,

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definimos, em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ a seguinte operação de soma: dados dois polinômios p e q em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, digamos,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

e

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n,$$

define-se sua soma $p + q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ por

$$(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n,$$

que é novamente um elemento de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Uma operação de multiplicação por escalar em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é definida da seguinte maneira: dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, digamos $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, então $\lambda p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é dado por

$$(\lambda p)(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \cdots + \lambda a_n x^n.$$

Com essas operações, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial em que $0_{\mathcal{P}_n(\mathbb{R})}$ é o polinômio nulo, ou seja, aquele em que todos os $n+1$ coeficientes são iguais a 0, e dado $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, digamos $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, então $-p$ é o polinômio de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dado por $(-p)(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n$, como o leitor pode verificar. $\diamondsuit$

Polinômios são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, isto é, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é um subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. As operações que acabamos de definir em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ para dotá-lo de uma estrutura de espaço vetorial nada mais são do que as restrições das operações de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ a esse subconjunto. Na seção seguinte, neste capítulo, veremos o conceito de subespaço vetorial de um espaço vetorial e mostraremos que, de fato, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

O espaço vetorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é um espaço de funções cujos elementos são especialmente fáceis de se manipular. Isso segue da observação que um polinômio não nulo de grau no máximo n tem no máximo n raízes distintas (ver a Seção D.1 no Apêndice D para uma breve recapitulação da teoria de polinômios com coeficientes reais). Em particular, dados $p, q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, digamos

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

e

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n,$$

então $p = q$ se, e somente se, $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Exemplo 4.1.6. (Lista 2 - Álgebra Linear I, ex. 38) Consideremos um exemplo em que as operações em um espaço vetorial não são as "usuais", por assim dizer.

Seja $V = \{u \in \mathbb{R} \mid u > 0\}$. Serão definidas operações no conjunto V que farão dele um espaço vetorial. A fim de evitar ambiguidades na compreensão das operações a serem definidas, utilizaremos, neste exemplo, o símbolo $\oplus$ para denotar a operação de soma no espaço vetorial V e o símbolo $\odot$ para denotar a operação de multiplicação por escalar no espaço vetorial V.

Vamos às definições: dados $u, v \in V$, defina a soma $u \oplus v$ por

$$u \oplus v = uv,$$

e, dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, defina a multiplicação por escalar $\lambda \odot u$ por

$$\lambda \odot u = u^\lambda.$$

Observe que, de fato, $u \oplus v$ é um elemento do conjunto V, uma vez que se $u, v \in V$, então $u > 0$ e $v > 0$, o que implica $uv > 0$. Também é verdade que se $\lambda \odot u \in V$, quaisquer que sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, pois, como $u > 0$, $u^\lambda > 0$. Em resumo, as definições de $\oplus$ e $\odot$ são, de fato, operações no conjunto V.

Agora, passemos às condições (1)–(8). Por exemplo, para verificar a condição (1), é preciso mostrar que quaisquer que sejam $u, v \in V$, temos $u \oplus v = v \oplus u$. Mas isso é, de fato, verdadeiro, uma vez que o produto entre números reais é comutativo: $uv = vu$. Deixemos a verificação das condições (2)–(4) a cargo do leitor, com apenas dois comentários. O primeiro diz respeito ao candidato a vetor nulo nesse espaço vetorial. Fica claro que para provar a validade de (3) é preciso tomar $0_V = 1$, que, cabe observar, é um elemento do conjunto V. Ainda, o "oposto" de um elemento u de V, aqui denotado por $\ominus u$, dever satisfazer $\ominus u = \frac{1}{u}$, para que a condição (4) esteja satisfeita.

Façamos a verificação de mais uma das oito propriedades das operações que definem um espaço vetorial. Por exemplo, vejamos (7): seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e sejam $u, v \in V$. Então,

$$\lambda \odot (u \oplus v) = \lambda \odot (uv) = (uv)^\lambda = u^\lambda v^\lambda = u^\lambda \oplus v^\lambda = (\lambda \odot u) \oplus (\lambda \odot v),$$

como queríamos.

O leitor deve terminar a verificação das demais condições. ◊

Exemplo 4.1.7. Vejamos, agora, um exemplo de um conjunto munido de duas operações $\oplus$ e $\odot$ que *não* é um espaço vetorial porque as condições (1)–(8) não estão todas satisfeitas.

Considere o conjunto

$$U = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(Note que, U nada mais é, como conjunto, que o conjunto $\mathbb{R}^2$, formado por todos os pares (a, b) de números reais.)

Considere, em U as seguintes operações:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c),$$

para todos $(a, b), (c, d) \in U$, e

$$\lambda \odot (a, b) = (\lambda a, \lambda b),$$

para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \in U$.

(Repare que, como fizemos no exemplo anterior, aqui, estamos utilizando notações alternativas para a soma $\oplus$ e a multiplicação por escalares $\odot$ a fim de diferenciá-las da notação utilizada no Exemplo 4.1.2.)

Para mostrar que U não é um espaço vetorial, basta mostrar que pelo menos uma das condições (1)–(8) não está satisfeita (uma vez que, para ser um espaço vetorial, todas as condições deveriam estar satisfeitas).

Mostremos, por exemplo, que a condição (1) não vale. Como essa condição faz referência a uma igualdade valer para *todos* os elementos do conjunto em que estão definidas as operações, para mostrar que ela é violada, é suficiente exibir uma escolha particular de elementos u e v para a qual a condição não vale. No nosso caso específico, se tomarmos os elementos $(1, 2)$ e $(3, 5)$ de U, vemos que, por um lado

$$(1, 2) \oplus (3, 5) = (6, 5),$$

e, por outro lado,

$$(3, 5) \oplus (1, 2) = (5, 6).$$

Segue que $(1, 2) \oplus (3, 5) \neq (3, 5) \oplus (1, 2)$. Assim, a condição (1) não está satisfeita e, portanto, U não é um espaço vetorial com essas particulares definições de operações. (Já havíamos visto, no Exemplo 4.1.2, com $n = 2$, que existem operações em $\mathbb{R}^2$ que fazem dele um espaço vetorial.) $\Diamond$

Observação. Na definição de espaço vetorial, no início desta seção, não há menção ao fato de haver um *único* vetor nulo em um espaço vetorial. Também não é dito que dado um vetor u em um espaço vetorial existe um *único* vetor $-u$ tal que $u + (-u) = 0_V$. Apesar disso, ambas as unicidades podem ser garantidas. É o que faremos a seguir.

Seja V um espaço vetorial.

- Suponha que $0_V, 0'_V \in V$ sejam vetores que satisfazem a condição (3) na definição. Então, $0_V = 0'_V$.

  Com efeito,

$$\begin{aligned} 0'_V &= 0'_V + 0_V && \text{pois } 0_V \text{ satisfaz (3)} \\ &= 0_V + 0'_V && \text{por (1)} \\ &= 0_V && \text{pois } 0'_V \text{ satisfaz (3)} \end{aligned}$$

- Seja $u \in V$. Suponha que $-u_1$ e $-u_2$ sejam vetores que satisfazem a condição (4) na definição. Então, $-u_1 = -u_2$.

  Com efeito,

$$\begin{aligned} -u_1 &= -u_1 + 0_V && \text{por (3)} \\ &= -u_1 + \big(u + (-u_2)\big) && \text{pois } -u_2 \text{ satisfaz (4)} \\ &= (-u_1 + u) + (-u_2) && \text{por (2)} \\ &= \big(u + (-u_1)\big) + (-u_2) && \text{por (1)} \\ &= 0_V + (-u_2) && \text{pois } -u_1 \text{ satisfaz (4)} \\ &= -u_2 + 0_V && \text{por (1)} \\ &= -u_2 && \text{por (3)} \end{aligned}$$

Diante desses fatos, faz sentido chamar 0_V de *o* vetor nulo de V e $-u$ de *o* inverso do vetor u. $\Diamond$

Além dessas, algumas outras propriedades que todos os espaços vetoriais satisfazem são decorrências imediadas da definição, como as que constam da proposição a seguir.

Proposição 4.1.8. *Seja V um espaço vetorial. Então, valem:*

(i) $\lambda 0_V = 0_V$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $0u = 0_V$, *para todo* $u \in V$*;*

(iii) *se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$ *são tais que* $\lambda u = 0_V$*, então* $\lambda = 0$ *ou* $u = 0_V$*;*

(iv) $(-\lambda)u = -(\lambda u) = \lambda(-u)$, *para todos* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$;

(v) $-(-u) = u$, *para todo* $u \in V$;

(vi) *se* $u, v, w \in V$ *são tais que* $u + v = u + w$, *então* $v = w$.

Observe que, fazendo $\lambda = 1$ em (iv), acima, obtém-se $(-1)u = -u$, para todo $u \in V$.

Demonstração. Faremos a demonstração apenas de (i), ficando as demonstrações das demais propriedades a cargo do leitor. Começemos por observar que

$$\lambda 0_V = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_V + \lambda 0_V, \tag{4.1}$$

em que utilizamos (3) na primeira igualdade e (7) na segunda. Por (4), existe um vetor $-(\lambda 0_V)$ que satisfaz $\lambda 0_V + \big(-(\lambda 0_V)\big) = 0_V$. Assim,

$$\begin{aligned} 0_V &= \lambda 0_V + \big(-(\lambda 0_V)\big) = (\lambda 0_V + \lambda 0_V) + \big(-(\lambda 0_V)\big) && \text{por (4.1)} \\ &= \lambda 0_V + \Big(\lambda 0_V + \big(-(\lambda 0_V)\big)\Big) && \text{por (2)} \\ &= \lambda 0_V + 0_V && \text{por (4)} \\ &= \lambda 0_V, && \text{por (3)} \end{aligned}$$

que é a igualdade desejada. □

Deste ponto em diante, faremos uso das propriedades relacionadas na proposição acima, bem como das oito condições na definição de espaço vetorial, sem fazer menção explícita a elas.

Uma questão notacional: se u e v são vetores em um espaço vetorial, o vetor $u + (-v)$ será, doravante, simplesmente denotado por $u - v$.

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear I: Exs. 37–38.

4.2 Subespaços vetoriais

No Exemplo 4.1.5, observamos que o espaço vetorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ estava, como conjunto, contido no espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Veremos que, de acordo com a próxima definição, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é, de fato, um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Definição. Seja V um espaço vetorial. Dizemos que um subconjunto W de V é um *subespaço vetorial* de V se

(i) $0_V \in W$;

(ii) para todos $u, v \in W$, temos $u + v \in W$;

(iii) para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, temos $\lambda u \in W$.

Em outras palavras, um subespaço vetorial (ou, simplesmente, subespaço) de um espaço vetorial é um subconjunto do espaço vetorial que contém o vetor nulo e é "fechado" para as operações de soma e multiplicação por escalar, no sentido de que quando se soma dois vetores desse subconjunto obtém-se um vetor que ainda está no subconjunto. Analogamente, não se "sai" desse subconjunto tomando-se múltiplos escalares de vetores nele.

Observação. Se W é um subespaço do espaço vetorial V, então W é, ele mesmo, um espaço vetorial com operações dadas pela restrições das operações de V a elementos de W.

As condições (1)–(8) estão satisfeitas em W porque valiam para todos os vetores de V, em particular, para todos os vetores de W. (É claro que $0_W = 0_V$ e que a condição (4) está satisfeita em W, pois se $u \in W$, então $-u = (-1)u \in W$.) $\Diamond$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.2.1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais (aquelas introduzidas no Exemplo 4.1.2), e o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0 \,\}.$$

Isto é, os elementos de W são apenas aquelas ternas ordenadas de números reais (x, y, z) em que $x - 2y = 0$. Por exemplo, $(-2, -1, 9) \in W$, porque $(-2) - 2(-1) = 0$, mas $(2, -1, 0) \neq W$, uma vez que $2 - 2(-1) \neq 0$. Mostremos que W é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, verificando, uma por vez, as condições que definem um subespaço de um espaço vetorial.

(i) O vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ é o elemento $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$, como vimos no Exemplo 4.1.2. Como $0 - 2(0) = 0$, segue que, de fato, $0_{\mathbb{R}^3} \in W$.

(ii) Vejamos por que W é fechado para a soma. Sejam w_1 e w_2 dois vetores de W. Então, cada um deles é um elemento de $\mathbb{R}^3$ satisfazendo a condição para estar em W, isto é, $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ com $x_1 - 2y_1 = 0$, e $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$ com $x_2 - 2y_2 = 0$. Verifiquemos que $w_1 + w_2 \in W$. Para tanto, é preciso lembrar da definição da operação de soma no espaço vetorial do qual W é um subconjunto, no caso, $\mathbb{R}^3$. Conforme mencionado, a operação de soma é aquela introduzida no Exemplo 4.1.2. Assim,

$$w_1 + w_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Para que esse vetor soma esteja em W, é preciso que ele satisfaça a condição que define os vetores de W, o que, de fato, é o caso, uma vez que $(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = (x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) = 0 + 0 = 0$. Logo, W é fechado para a soma.

(iii) Finalmente, verifiquemos que W é fechado para multiplicação por escalar. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $w = (x, y, z) \in W$, então $\lambda w = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, já que a multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^3$ é aquela definida no Exemplo 4.1.2. Agora, $\lambda x - 2(\lambda y) = \lambda(x - 2y) = \lambda 0 = 0$, uma vez que $x - 2y = 0$, pois w é um elemento de W. Logo, W é também fechado para multiplicação por escalar.

Como as três condições na definição de subespaço estão satisfeitas, W é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Tome, agora, o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$L = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1 \}.$$

Esse subconjunto *não* é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, pois, por exemplo, $0_{\mathbb{R}^3} \notin L$. (Na verdade, L não satisfaz nenhuma das três condições para ser um subespaço, mas basta que uma delas não esteja satisfeita para que L não seja um subespaço). $\lozenge$

Exemplo 4.2.2. Todo espaço vetorial V tem pelo menos dois subespaços, chamados subespaços triviais de V: o subespaço $\{0_V\}$ formado apenas pelo vetor nulo, e o subespaço total V. Espaços vetoriais, em geral, contêm muitos outros subespaços além dos triviais. $\lozenge$

Exemplo 4.2.3. Este é um dos exemplos mais importantes de subespaço vetorial. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e considere o sistema linear homogêneo $AX = 0$ de m equações e n incógnitas. As soluções de $AX = 0$ são elementos de $\mathbb{R}^n$. Mostremos que o conjunto S formado por todas as soluções de $AX = 0$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. (Aqui, consideramos as operações usuais de $\mathbb{R}^n$, aquelas do Exemplo 4.1.2).

(i) É claro que $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots, 0) \in S$, uma vez que um sistema homogêneo sempre tem, pelo menos, a solução trivial.

(ii) Sejam $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $v = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ elementos de S, isto é, u e v são soluções do sistema $AX = 0$. Mostremos que $u + v \in S$. Para tanto, é preciso mostrar que $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ é solução de $AX = 0$. Mas isso é verdade, uma vez que vale a igualdade matricial

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} &= A \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Seja $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $\lambda u \in S$, pois

$$A\left(\lambda\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\right) = \lambda A\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}.$$

Conclui-se que, de fato, S é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Observe que o subespaço W de $\mathbb{R}^3$ do Exemplo 4.2.1 anterior é um caso particular deste, em que $m = 1$, $n = 3$ e $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\end{bmatrix}$.

O conjunto formado por todas as soluções de um sistema linear *não homogêneo* de m equações e n incógnitas ainda é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, mas não é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. (Você consegue ver por quê?) ♢

Exemplo 4.2.4. Lembre, do Exemplo 4.1.5, que o conjunto $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ de todos os polinômios de grau $\leq n$, mais o polinômio nulo, tem uma estrutura natural de espaço vetorial. Convença-se de que se $m < n$, então $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. ♢

Exemplo 4.2.5. Dado um intervalo aberto I na reta real, denote por $\mathcal{C}(I)$ o conjunto de todas as funções $f\colon I \to \mathbb{R}$ contínuas. No curso de Cálculo, vimos que a função nula $\mathbf{n}\colon I \to \mathbb{R}$ é contínua, que soma de funções contínuas é contínua e que a multiplicação de uma constante por uma função contínua é contínua. Esses três fatos podem ser resumidos na afirmação de que $\mathcal{C}(I)$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{F}(I)$ de todas as funções reais com domínio I. Se $\mathcal{D}(I)$ denota o conjunto de todas as funções $f\colon I \to \mathbb{R}$ deriváveis, então, segue, também de resultados vistos no curso de Cálculo, que $\mathcal{D}(I)$ é um subespaço de $\mathcal{C}(I)$.

Mais geralmente, temos uma cadeia infinita de subespaços vetoriais:

$$\mathcal{P}_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}),$$

em que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ denota o espaço vetorial formado por todos os polinômios, sem limitação no grau. ♢

Agora, um exemplo em um espaço de matrizes.

Exemplo 4.2.6. Mostre que

$$W = \left\{ \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; b = c \right\}$$

é um subespaço do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ (com respeito às operações usuais definidas no Exemplo 4.1.4.)

Solução. Temos:

(i) $0_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \in W$, claramente;

(ii) se $A, B \in W$, então $A + B \in W$ (pois se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix},$$

então

$$A + B = \begin{bmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{bmatrix}$$

e $b + b' = c + c'$, uma vez que $b = c$ e $b' = c'$, já que A e B são elementos de W);

(iii) se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \in W$, então $\lambda A \in W$ (pois se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

então

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$$

e $\lambda b = \lambda c$, já que $b = c$).

Logo, W é um subespaço de $M_2(\mathbb{R})$. $\diamondsuit$

Exemplo 4.2.7. O subconjunto

$$S = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0 \}$$

do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ não é um subespaço, apesar de satisfazer as condições (i) e (iii) na definição de subespaço, com o leitor pode facilmente verificar. Mas S não satisfaz a condição (ii); por exemplo, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são matrizes de determinante nulo, portanto, $M, N \in S$. Mas $M + N = I_2$ e $\det(I_2) = 1 \neq 0$. Logo, $M + N \notin S$. O subconjunto S não é fechado para soma. Portanto, não é um subespaço de $M_2(\mathbb{R})$. $\diamondsuit$

O que fizemos nesta seção e na anterior — e faremos nas seguintes — foi explorar consequências das condições que definem um espaço vetorial. Pode-se demonstrar que muitas das propriedades do espaço vetorial $\mathbb{V}^3$, por exemplo, são consequências apenas do fato de, nele, estar definida uma estrutura de espaço vetorial, isto é, de estarem definidas em $\mathbb{V}^3$ operações que satisfazem as condições (1)–(8), e não necessariamente de o conjunto $\mathbb{V}^3$ ser formado por vetores definidos em termos de segmentos orientados em E^3. Como vimos, há diversos exemplos diferentes de espaços vetoriais. Assim, tudo que foi — e será — demonstrado para um espaço vetorial abstrato, isto é, um conjunto munido de duas operações satisfazendo as condições (1)–(8), será válido em cada um desses exemplos. Este é o poder do método axiomático: por meio da obtenção de consequências lógicas de um determinado conjunto de axiomas (por exemplo, as condições que definem espaço vetorial), alcançamos resultados que são válidos em qualquer instância particular em que os axiomas estão satisfeitos. Isso ficará ainda mais claro nas seções seguintes, em que os conceitos de combinação linear, dependência linear, base e coordenadas serão introduzidos no contexto mais abstrato dos espaços vetoriais.

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear I: Exs. 39–41.

4.3 Combinações lineares

Seja V um espaço vetorial e sejam $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$. Dizemos que um vetor $v \in V$ é *combinação linear* de $u_1, u_2, \dots, u_n$ se existirem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

(Essa definição dever ser comparada com a definição de combinação linear definida entre vetores de $\mathbb{V}^3$ na Seção 2.2.)

Exemplo 4.3.1. Em $\mathbb{R}^2$, $(-3,8)$ é combinação linear de $(-1,0)$ e $(1,2)$, uma vez que $(-3,8) = 7(-1,0) + 4(1,2)$. ♢

Exemplo 4.3.2. Em $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, $f(x) = 8x^4 - 3x^2 + 5x + 52$ é combinação linear de $g(x) = x^4 - 2x + 8$ e $h(x) = x^2 - 7x + 4$, pois $f = 8g - 3h$. ♢

Exemplo 4.3.3. Qualquer vetor de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é combinação linear dos seguintes $n+1$ vetores: $1, x, x^2, \dots, x^n$. ♢

Exemplo 4.3.4. Em $\mathbb{R}^2$, $(2,1)$ não é combinação linear de $(1,0)$ e $(-1,0)$, uma vez que qualquer combinação linear desses dois vetores será da forma $(\alpha, 0)$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. ♢

Definição. Seja V um espaço vetorial e seja $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ um subconjunto finito de V. Definimos o *subespaço vetorial de V gerado por S* como sendo o subconjunto de V dado por

$$\big[S\big] = \big\{\, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \,\big\}.$$

Isto é, $[S]$ é o conjunto formado por *todas* as combinações lineares dos elementos de S.

Por exemplo, vimos no Exemplos 4.3.1 e 4.3.4, que, em $\mathbb{R}^2$, $(-3,8) \in \big[(-1,0),(1,2)\big]$, mas $(2,1) \notin \big[(1,0),(-1,0)\big]$. Já, no Exemplo 4.3.3, foi observado que, em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, vale

$$\big[1, x, x^2, \dots, x^n\big] = \mathcal{P}_n(\mathbb{R}).$$

Por convenção, definimos $[\varnothing] = \{0_V\}$.

A proposição a seguir justifica o nome dado a $[S]$.

Proposição 4.3.5. *Seja V um espaço vetorial e seja S um subconjunto finito de V. Então, $[S]$ é um subespaço de V.*

Demonstração. Se $S = \emptyset$, a convenção acima dá conta do resultado. Suponha que $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Mostremos que $[S]$, conforme definido acima, satisfaz as três condições na definição de subespaço de V.

(i) $0_V \in [S]$, pois $0_V = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_n$.

(ii) Sejam $v, w \in [S]$. Então, $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ e $w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n$, com $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} v + w &= (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)u_1 + (\alpha_2 + \beta_2)u_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)u_n, \end{aligned}$$

e, portanto, $v + w \in [S]$.

(iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in [S]$. Então, $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$, e, portanto,

$$\begin{aligned} \lambda v &= \lambda(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) \\ &= (\lambda\alpha_1)u_1 + (\lambda\alpha_2)u_2 + \cdots + (\lambda\alpha_n)u_n. \end{aligned}$$

O que prova que $\lambda v \in [S]$.

Logo, $[S]$ é um subespaço de V. □

Se $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, é comum denotar $[S]$ por $[u_1, u_2, \dots, u_n]$, simplesmente. (Um alerta: a notação, com colchetes, para o subespaço gerado por um conjunto com 3 vetores pode se confundir, em $\mathbb{V}^3$, com a notação para o produto misto. Geralmente, o contexto será suficiente para evitar ambiguidades.)

Exemplo 4.3.6. Descreva o subespaço W de $\mathbb{R}^3$ definido por $W = [u, v]$, em que $u = (1, -1, 1)$ e $v = (0, 1, -2)$.

Solução. Dado $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned} w \in [u, v] \quad &\iff \quad \text{existem } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tais que } w = \alpha u + \beta v \\ &\iff \quad \text{existem } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tais que} \\ &\qquad\qquad (x, y, z) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(0, 1, -2) \\ &\iff \quad \text{existem } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tais que } \begin{cases} \alpha = x \\ -\alpha + \beta = y \\ \alpha - 2\beta = z \end{cases} \\ &\iff \quad \text{o sistema linear } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \\ &\qquad\qquad \text{nas variáveis } \alpha, \beta, \text{ tem solução.} \end{aligned}$$

Para encontrar, em função de x, y, z, condições para a existência de soluções do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

iremos, como de costume, escalonar sua matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & -2 & -x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & x+2y+z \end{array}\right]$$

Assim, o sistema terá solução se, e somente se, $x + 2y + z = 0$. Portanto, dado $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, segue que $w \in W$ se, e somente se, $x + 2y + z = 0$. Em outras palavras,

$$W = \big[(1, -1, 1), (0, 1, -2)\big] = \big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \big\}.$$

Essa é uma descrição de W em termos de soluções de uma equação linear. Veremos outros exemplos como este adiante. $\diamondsuit$

Exemplo 4.3.7. Mostre que, em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, vale

$$\big[\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\big] = \big[1, \cos(2x)\big].$$

Solução. Aqui, pede-se para demonstrar que, no espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, de todas as funções reais com domínio a reta toda, os subespaços $W_1 = [f, g]$ e $W_2 = [p, q]$ coincidem, em que as funções $f, g, p, q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são definidas por

$$f(x) = \operatorname{sen}^2(x), \qquad g(x) = \cos^2(x), \qquad p(x) = 1, \qquad q(x) = \cos(2x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

A igualdade $W_1 = W_2$ será demonstrada em duas etapas. Primeiramente, mostraremos que $W_1 \subseteq W_2$, isto é, que todo elemento de W_1 é, também, um elemento de W_2. A seguir, mostraremos a inclusão oposta: $W_2 \subseteq W_1$. A validade dessas duas inclusões nos permitirá concluir que, com efeito, $W_1 = W_2$.

Comecemos por mostrar que $W_1 \subseteq W_2$. Seja $h \in W_1$. Nosso objetivo é provar que $h \in W_2$. Como h pertence a W_1 e W_1 é formado pelas combinações lineares de f e g, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $h = \alpha f + \beta g$, isto é, $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \operatorname{sen}^2(x) + \beta \cos^2(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, lembrando que $\cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} h(x) &= \alpha \operatorname{sen}^2(x) + \beta \cos^2(x) \\ &= \alpha\big(1 - \cos^2(x)\big) + \beta \cos^2(x) \\ &= \alpha + (-\alpha + \beta) \cos^2(x) \\ &= \alpha + (-\alpha + \beta) \left(\frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)\right) \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{-\alpha + \beta}{2} \cos(2x) \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2} p(x) + \frac{-\alpha + \beta}{2} q(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $h = \frac{\alpha+\beta}{2} p + \frac{-\alpha+\beta}{2} q$, o que prova que $h \in W_2$. Logo, $W_1 \subseteq W_2$.

Para demonstrar a inclusão oposta, tomemos $r \in W_2$ e provemos que $r \in W_1$. Como r é um elemento de W_2, existem $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $r = \gamma p + \delta q$, ou seja, $r(x) = \gamma p(x) + \delta q(x) = \gamma + \delta \cos(2x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} r(x) &= \gamma + \delta \cos(2x) \\ &= \gamma + \delta\big(-1 + 2\cos^2(x)\big) \\ &= (\gamma - \delta) + 2\delta \cos^2(x) \\ &= (\gamma - \delta)\big(\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)\big) + 2\delta \cos^2(x) \\ &= (\gamma - \delta) \operatorname{sen}^2(x) + (\gamma + \delta) \cos^2(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, donde se conclui que $r = (\gamma - \delta) f + (\gamma + \delta) g \in W_1$. Assim, também temos $W_2 \subseteq W_1$. Comparando as duas inclusões que foram demonstradas, concluímos que $W_1 = W_2$. $\Diamond$

Observação. Seja V um espaço vetorial, sejam $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ e seja W um subespaço de V. Para mostrar que $[u_1, u_2, \dots, u_n] \subseteq W$, basta mostrar que $u_1, u_2, \dots, u_n \in W$, uma vez que se esses vetores estão em W, então qualquer combinação linear deles (isto é, qualquer elemento do subespaço gerado por eles) também estará em W, já que, sendo um subespaço de V, W é fechado para somas e multiplicações por escalares. $\Diamond$

Poderíamos ter utilizado essa observação no exemplo anterior e mostrado apenas que $f \in W_2$ e $g \in W_2$ a fim de garantir $W_1 = [f, g] \subseteq W_2$. Como $W_2 = [p, q]$, mostrar que $f \in W_2$ é mostrar que a função $\operatorname{sen}^2(x)$ se escreve como combinação linear da função constante igual a 1 e da função $\cos(2x)$. Mas isso é, de fato, verdade, uma vez que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cos(2x).$$

Similarmente, mostrar que $g \in W_2$ é mostrar que a função $\cos^2(x)$ é combinação linear da função constante igual a 1 e da função $\cos(2x)$, e isso é verdade, como já vimos:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

A outra inclusão, $W_2 \subseteq W_1$, poderia ser mostrada de modo similar, utilizando as identidades

$$1 = 1\,\mathrm{sen}^2(x) + 1\cos^2(x) \quad \text{e} \quad \cos(2x) = (-1)\,\mathrm{sen}^2(x) + 1\cos^2(x).$$

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear I: Exs. 42–48.

4.4 Dependência linear

Quando um vetor v em um espaço vetorial se escreve como combinação linear de vetores $u_1, u_2, \dots, u_n$, é possível que exista mais de uma maneira de fazer essa decomposição, isto é, pode ser que existam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$, com pelo menos um α_i distinto de β_i, tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

e

$$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n.$$

Para um exemplo concreto desse fenômeno, tome os vetores $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (-1, 0)$ e $u_3 = (1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$. Então, o vetor $v = (3, 5)$ se escreve como

$$v = (-1)u_1 + 3u_2 + 7u_3$$

e também como

$$v = 2u_1 + 0u_2 + 1u_3,$$

como o leitor pode facilmente verificar.[1]

A existência ou não de uma única maneira de expressar v como combinação linear de $u_1, u_2, \dots, u_n$ está relacionada com o conceito de depenência linear, que veremos a seguir.

Definição. Seja V um espaço vetorial e sejam $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é *linearmente dependente* (LD) se existirem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_V.$$

Caso contrário, dizemos que $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é *linearmente independente* (LI).

Por convenção, o conjunto vazio $\varnothing$ é LI.

[1]O leitor também pode verificar que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos

$$v = (-t + 2)u_1 + tu_2 + (2t + 1)u_3.$$

Assim, de fato, existem infinitas maneiras distintas de se escrever v como combinação linear de u_1, u_2, u_3.

Observação. Dado um conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de vetores em um espaço vetorial V, é sempre possível escrever o vetor nulo 0_V como combinação linear de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, basta tomar escalares todos nulos

$$0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_n = 0_V.$$

Chamemos essa combinação linear de *trivial*. O que diz a definição acima é que se houver *outra* combinação linear de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ que resulta no vetor nulo, além da trivial, então o conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é dito LD.

Assim, para mostrar que um conjunto de vetores $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ em um espaço vetorial V é LI é preciso mostrar que se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_V,$$

então, necessariamente, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. ♢

Exemplo 4.4.1. No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ decida se $\{u, v\}$ é LI ou LD, em que $u = (1, 2, 3, 4)$ e $v = (1, 1, 2, 3)$.

Solução. É preciso decidir se os únicos escalares α, β tais que $\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^4}$ são $\alpha = \beta = 0$ (caso em que $\{u, v\}$ é LI) ou não (e $\{u, v\}$ seria LD). Vejamos,

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^4} \quad &\iff \quad \alpha(1, 2, 3, 4) + \beta(1, 1, 2, 3) = (0, 0, 0, 0) \\ &\iff \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Como, evidentemente, $\alpha = \beta = 0$ é a única solução desse sistema linear, $\{u, v\}$ é LI. ♢

Exemplo 4.4.2. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, decida se $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (-1, 0, 1)\}$ é LI ou LD.

Solução. Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(2, 3, 4) + \gamma(-1, 0, 1) = (0, 0, 0), \tag{4.2}$$

então valem

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Visto como um sistema linear nas incógnitas α, β, γ, esse sistema é indeterminado, uma vez que $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 0$ (ver Teorema 1.3.8). Portanto, existe pelo menos uma solução não trivial (são infinitas, na verdade) para a equação (4.2), o que implica que $\{(1,2,3),(2,3,4),(-1,0,1)\}$ é LD. Para determinar uma combinação linear não trivial explícita, basta exibir uma solução não trivial. As soluções do sistema linear são da forma $(-3t, 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Tomando, por exemplo, $t = 1$, obtemos a seguinte combinação linear não trivial dos três vetores resultando no vetor nulo:

$$-3(1,2,3) + 2(2,3,4) + 1(-1,0,1) = (0,0,0).$$

Outros valores de t originam outras combinações lineares não triviais. $\diamondsuit$

Exemplo 4.4.3. No espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, de todos os polinômios, decida se $\{f, g, h\}$ é LI ou LD, em que $f = t^2 + 1, g = t^2 - 1, h = t + 2$. (Neste exemplo, a variável está sendo denotada por t, ao invés de x, como vínhamos fazendo.)

Solução. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}$. Então, $\alpha(t^2+1) + \beta(t^2-1) + \gamma(t+2) = 0$, o que é equivalente a $(\alpha+\beta)t^2 + \gamma t + (\alpha - \beta + 2\gamma) = 0$. Em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ isso vale se, e só se,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

A única solução desse sistema é $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo, $\{f, g, h\}$ é LI. $\diamondsuit$

Exemplo 4.4.4. No espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, de todas as funções reais a valores reais, o conjunto $\{\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x), \cos(2x)\}$ é LD, uma vez que

$$(-1)\operatorname{sen}^2(x) + 1\cos^2(x) + (-1)\cos(2x) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação. Seja V um espaço vetorial, são consequências imediatas da definição de dependência linear:

- Dado $u \in V$, o conjunto unitário $\{u\}$ é LD se, e somente se, $u = 0_V$ (uma vez que se $u \neq 0_V$, então $\lambda u = 0_V$ só ocorre quando $\lambda = 0$).
- Dados $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$, o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é LD se, e somente se, algum dos u_i é combinação linear dos demais. (O mesmo argumento utilizado na demonstração da Proposição 2.2.3 se aplica aqui.) $\diamondsuit$

Vejamos algumas propriedades hereditárias, por assim dizer, da dependência linear.

Proposição 4.4.5. *Seja V um espaço vetorial e sejam $A, B \subseteq V$ dois conjuntos finitos de vetores de V. Valem as seguintes propriedades:*

(i) *Se $0_V \in A$, então A é LD.*

(ii) *Se $A \subseteq B$ e A é LD, então B é LD.*

(iii) *Se $A \subseteq B$ e B é LI, então A é LI.*

Demonstração. Para (i), suponha que $A = \{0_V = u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, então $1u_1 + 0u_2 + \ldots 0u_n = 0_V$ e os escalares utilizados nessa combinação linear não são todos nulos; logo, A é LD. É claro que (ii) e (iii) são equivalentes. Mostremos (ii). Suponha que $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e que $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_r\}$. Se A é LD, então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V$. Assim,

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n + \beta_{n+1} u_{n+1} + \cdots + \beta_r u_r = 0_V,$$

em que $\beta_i = \alpha_i$, para $i = 1, \ldots, n$, e $\beta_{n+1} = \cdots = \beta_r = 0$. Como os escalares utilizados nessa combinação linear não são todos nulos (algum β_i com $1 \leq i \leq n$ é não nulo), B é LD. $\square$

Relações de dependência linear em espaços de funções, como a do Exemplo 4.4.4, são incomuns. No Exercício 13 da Lista 1 de Álgebra Linear II (2020), um método para lidar com a independência linear entre funções é esboçado. No exemplo abaixo, apresentamos mais uma técnica que pode ser útil na demonstração da independência linear em espaços de funções muitas vezes diferenciáveis.

Exemplo 4.4.6. Mostre que $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ é LI no espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Solução. Para deixar o argumento mais claro, as funções envolvidas serão denotadas por

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ t &\longmapsto e^t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ t &\longmapsto e^{2t} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}. \\ t &\longmapsto e^{3t} \end{aligned}$$

Nossa tarefa consiste em mostrar que se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$, então $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Como o vetor nulo $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$ do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ é a função identicamente nula, precisamos mostrar que os únicos valores de α, β, γ que satisfazem

$$\alpha f(t) + \beta g(t) + \gamma h(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

são $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ou seja, que

$$\alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{3t} = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

implica $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Mas, (4.3) implica, em particular, fazendo $t = 0$, que

$$\alpha + \beta + \gamma = 0. \tag{4.4}$$

Agora, (4.3) é uma igualdade entre funções, a função $\alpha f + \beta g + \gamma h$, do lado esquerdo, e a função nula, do lado direito. Como ambas são diferenciáveis, suas derivadas devem também coincidir. Assim, derivando (4.3), obtemos

$$\alpha e^t + 2\beta e^{2t} + 3\gamma e^{3t} = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Em particular, se $t = 0$,

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0. \tag{4.6}$$

Derivando, agora, (4.5), obtemos

$$\alpha e^t + 4\beta e^{2t} + 9\gamma e^{3t} = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{4.7}$$

que, avaliada em $t = 0$, fonece

$$\alpha + 4\beta + 9\gamma = 0. \tag{4.8}$$

Dessa discussão, segue que α, β, γ são números reais que satisfazem (juntando (4.4), (4.6) e (4.8))

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Como $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$, a única solução de (4.9) é a trivial: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Segue que $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ é LI. $\Diamond$

Observação. A ideia explorada no exemplo acima pode ser generatizada: dados n números reais distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, o conjunto $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$ de n vetores de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ é LI. Basta argumentar avaliando uma combinação linear desses vetores e das $n-1$ primeiras derivadas dela em $t = 0$. O argumento funciona porque

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

é igual ao produto de todos os termos da forma $(\lambda_j - \lambda_i)$, com $1 \leq i < j \leq n$, que, sendo os λ_i todos distintos, é diferente de zero. Esse determinante chama-se *determinante de Vandermonde*. Uma prova da igualdade mencionada pode ser facilmente encontrada na internet, por exemplo, em `https://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde_matrix`. $\Diamond$

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 13–16.

4.5 Bases e dimensão

Na seção anterior, vimos os conceitos de subespaço gerado por um subconjunto e independência (e dependência) linear. Essas ideias serão conjugadas para obtermos o conceito de base de um espaço vetorial.

Definição. Seja V um espaço vetorial e seja $\mathcal{B}$ um conjunto finito formado por vetores de V. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma *base* de V se as duas seguintes condições estão satisfeitas:

(i) $\mathcal{B}$ gera V, isto é, $[\mathcal{B}] = V$, e

(ii) $\mathcal{B}$ é LI.

Como vimos na seção anterior, dado um subconjunto finito $\mathcal{B}$ de um espaço vetorial, sempre podemos considerar o subespaço gerado por dele, que denotamos por $[\mathcal{B}]$ e que é formado por todas as combinações lineares dos elementos de $\mathcal{B}$. O que a condição (i) na definição de base exige é que esse subespaço coincida com todo o espaço vetorial V. Assim, uma base de um espaço vetorial V nada mais é do que um conjunto finito que é LI e que esgota, tomando-se combinações lineares de seus elementos, todos os elementos de V.

Comecemos com alguns exemplos para explorar essa definição.

Exemplo 4.5.1. O conjunto

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$. Com efeito, é claro que esse conjunto é LI. Além disso, esse conjunto gera $\mathbb{R}^3$, pois todo vetor de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos três vetores no conjunto:

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1).$$

De maneira análoga, é fácil ver que o conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de n vetores, em que, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$e_i = (0,0,\dots,0,\underset{i}{1},0,0,\dots,0)$$

é uma base de $\mathbb{R}^n$. Essa base é chamada *base canônica* de $\mathbb{R}^n$. $\Diamond$

Exemplo 4.5.2. O conjunto de $n+1$ vetores $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ é uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, pois ele é claramente gerador e LI. $\Diamond$

Exemplo 4.5.3. O conjunto de 4 vetores

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $M_2(\mathbb{R})$. $\Diamond$

As bases dos dois exemplos anteriores também são, às vezes, chamadas de bases canônicas de seus respectivos espaços vetoriais.

Exemplo 4.5.4. O conjunto $\mathcal{B} = \{(1,2,3),(0,2,2),(1,0,-1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. De fato, mostremos que $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^3$ e que $\mathcal{B}$ é LI.

(i) $[\mathcal{B}] = \mathbb{R}^3$: aqui, é preciso mostrar que todo vetor de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear de $u_1 = (1,2,3), u_2 = (0,2,2), u_3 = (1,0,-1)$. Para tanto, é preciso mostrar que, dado $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ tais que $v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$, ou seja, $(x,y,z) = \alpha(1,2,3) + \beta(0,2,2) + \gamma(1,0,-1) = (\alpha+\gamma, 2\alpha+2\beta, 3\alpha+2\beta-\gamma)$. Assim, mostrar que $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^3$ é mostrar que, dados $x,y,z \in \mathbb{R}$, o sistema linear

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ 2\alpha + 2\beta = y \\ 3\alpha + 2\beta - \gamma = z \end{cases} \tag{4.10}$$

nas variáveis α, β, γ, tem solução. Como $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$, segue do Teorema 1.3.8 que o sistema (4.10) é possível determinado; em particular, tem solução. Portanto, de fato, $[\mathcal{B}] = \mathbb{R}^3$. (Na realidade, o Teorema 1.3.8 nos garante que (4.10) tem uma única solução. Pelo método do escalonamento, por exemplo, pode-se determinar que a única solução de (4.10) é dada por $\alpha = \frac{x-y+z}{2}, \beta = \frac{-x+2y-z}{2}, \gamma = \frac{x+y-z}{2}$. Em outras palavras, se $v = (x,y,z)$, então $v = (\frac{x-y+z}{2})u_1 + (\frac{-x+2y-z}{2})u_2 + (\frac{x+y-z}{2})u_3$.)

(ii) $\mathcal{B}$ é LI: aqui, o objetivo é mostrar que se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0,0,0)$, então necessariamente, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Isso é equivalente a mostrar que o sistema (4.10) com $x = y = z = 0$ é determinado. Mas uma vez, esse fato segue do Teorema 1.3.8. $\diamondsuit$

No exemplo acima, vimos que essencialmente a mesma razão garantiu que o conjunto $\mathcal{B}$ era gerador e era LI. Veremos que essa correlação sempre estará presente quando o conjunto em questão tiver a quantidade certa, num sentido a ser precisado, de elementos (cf. Coroláro 4.5.15).

Exemplo 4.5.5. O conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$, porque, apesar de ser LI (como é fácil ver), não gera $\mathbb{R}^3$; por exemplo, $(0,0,1)$ não é combinação linear de $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$. $\diamondsuit$

Exemplo 4.5.6. O conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,2,3)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$, porque, apesar de gerar $\mathbb{R}^3$ (todo vetor de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos três primeiros, e, portanto, dos quatro vetores), não é LI: $(1,2,3) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$. $\diamondsuit$

Todo espaço vetorial que pode ser gerado por um conjunto finito de vetores tem, pelo menos, uma base. Isso é consequência do Teorema 4.5.8, que veremos a seguir.

O lema abaixo, necessário na demonstração do teorema, é uma consequência quase imediata da definição de subespaço gerado.

Lema 4.5.7. *Seja V um espaço vetorial e sejam $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$. Para todo $v \in V$, $v \in [u_1, \ldots, u_n]$ se, e somente se, $[v, u_1, \ldots, u_n] = [u_1, \ldots, u_n]$.*

Em outras palavras, o lema afirma que um vetor que é combinação linear de outros vetores de um conjunto gerador de um subespaço pode ser omitido desse conjunto gerador sem afetar o subespaço gerado.

Demonstração. Tome $v \in V$. A inclusão $[u_1, \ldots, u_n] \subseteq [v, u_1, \ldots, u_n]$ é sempre válida. Assim para demonstrar o lema, basta mostrar que $v \in [u_1, \ldots, u_n]$ se, e somente se, $[v, u_1, \ldots, u_n] \subseteq [u_1, \ldots, u_n]$.

Primeiramente, suponha que $v \in [u_1, \ldots, u_n]$. Como, evidentemente, $u_1, \ldots, u_n \in [u_1, \ldots, u_n]$, segue, da Observação na página 117, que vale a inclusão $[v, u_1, \ldots, u_n] \subseteq [u_1, \ldots, u_n]$.

Reciprocamente, suponha que $[v, u_1, \ldots, u_n] \subseteq [u_1, \ldots, u_n]$. Como é sempre verdade que $v \in [v, u_1, \ldots, u_n]$, segue que $v \in [u_1, \ldots, u_n]$. □

Teorema 4.5.8. *Seja V um espaço vetorial e sejam $u_1, \ldots, u_n \in V$. Se $V = [u_1, \ldots, u_n]$, então existe uma base $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{B} \subseteq \{u_1, \ldots, u_n\}$.*

Demonstração. Se o conjunto $\mathcal{A} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ for LI, então ele será uma base e não há o que demonstrar. Suponha, então, que $\mathcal{A}$ é LD. Assim, algum u_j é combinação linear dos demais, isto é, $u_j \in \left[u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n\right]$. Daí segue, do Lema 4.5.7, que

$$\left[u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n\right] = [\mathcal{A}] = V.$$

Se $\mathcal{A}_1 = \{u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n\}$ for LI, esta será uma base de V contida em $\mathcal{A}$. Se não, repetimos o argumento com $\mathcal{A}_1$ no lugar de $\mathcal{A}$. Desse modo, obteremos uma cadeia estritamente descendente

$$\mathcal{A} \supsetneqq \mathcal{A}_1 \supsetneqq \mathcal{A}_2 \supsetneqq \ldots$$

de subconjuntos de $\mathcal{A}$, todos gerando V. Como esses conjuntos são todos finitos e diminuem de tamanho ao longo da cadeia, em algum ponto, a cadeia estacionará em um conjunto que é também LI (já que o conjunto vazio é LI). Nesse ponto, teremos uma base de V contida em $\mathcal{A}$. □

A demonstração do teorema fornece um método para obter uma base contida em um conjunto gerado. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.5.9. Mostre que o conjunto $\mathcal{A} = \{(1,0), (1,1), (1,2)\}$ gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e exiba uma base de $\mathbb{R}^2$ contida nele.

Solução. Vejamos, primeiramente, que $\mathcal{A}$ gera $\mathbb{R}^2$. Para tanto é preciso mostrar que todo vetor de $\mathbb{R}^2$ é combinação linear dos elementos de $\mathcal{A}$. Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, teremos $(a, b) \in [\mathcal{A}]$ se, e somente se, existirem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $(a, b) = x(1,0) + y(1,1) + x(1,2)$, ou, equivalentemente, se existirem

$x, y, z \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ y + 2z = b \end{cases} \tag{4.11}$$

Como a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \end{array}\right]$$

desse sistema já é escalonada, vemos que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, o sistema (4.11) tem solução. Logo, $\mathcal{A}$, de fato, gera $\mathbb{R}^2$.

Antes de prosseguir, cabe um comentário. Resolvendo o sistema (4.11), obtemos que suas soluções são dadas por $(a - b + t, b - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; portanto, para cada escolha de $t \in \mathbb{R}$, obtém-se uma decomposição de (a, b) como combinação linear dos elementos de $\mathcal{A}$:

$$(a, b) = (a - b + t)(1, 0) + (b - 2t)(1, 1) + t(1, 2). \tag{4.12}$$

Por exemplo, fazendo $t = 1$, obtemos

$$(a, b) = (a - b + 1)(1, 0) + (b - 2)(1, 1) + 1(1, 2).$$

Existem infinitas decomposições como essa, uma para cada escolha do parâmetro t.

Continuemos na busca por uma base de $\mathbb{R}^2$ contida em $\mathcal{A}$.

O conjunto $\mathcal{A}$ é LD, pois olhando para (4.12) com $a = b = 0$, vemos que existem combinações lineares não triviais dos elementos de $\mathcal{A}$ que resultam no vetor nulo de $\mathbb{R}^2$, por exemplo, tomando a solução com $t = 2$, obtemos

$$2(1, 0) + (-4)(1, 1) + 2(1, 2) = (0, 0). \tag{4.13}$$

Logo, $\mathcal{A}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$, pois, apesar de gerar $\mathbb{R}^2$, não é um conjunto LI. Mas, pelo Teorema 4.5.8, $\mathcal{A}$ contém uma base de $\mathbb{R}^2$.

A relação de dependência linear (4.13) permite que se escreva, por exemplo, $(1, 0)$ como combinação linear de $(1, 1)$ e $(1, 2)$:

$$(1, 0) = \frac{1}{2}\big(4(1, 1) + (-2)(1, 2)\big) = 2(1, 1) - 1(1, 2).$$

Assim, pelo Lema 4.5.7, podemos remover o vetor $(1, 0)$ do conjunto $\mathcal{A}$ sem alterar o subespaço gerado por ele; em outras palavras,

$$[(1, 1), (1, 2)] = [\mathcal{A}] = \mathbb{R}^2.$$

Ou seja, é possível reduzir o conjunto gerador $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ para um conjunto que continua gerando $\mathbb{R}^2$, está contido em $\mathcal{A}$, mas tem um elemento a menos. Agora, esse novo conjunto $\mathcal{A}_1 = \{(1, 1), (1, 2)\}$ é LI, uma vez que

$$\alpha(1, 1) + \beta(1, 2) = (0, 0)$$

implica $\alpha = \beta = 0$, como o leitor pode facilmente verificar. Portanto $\mathcal{A}_1$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, que está contida em $\mathcal{A}$. $\Diamond$

Vale mencionar que, no exemplo anterior, foi feita uma escolha do vetor que se retirou de $\mathcal{A}$, a saber, o vetor $(1,0)$. A relação (4.13) permite que se escreva, também, $(1,1)$ como combinação linear de $(1,0)$ e $(1,2)$, ou, ainda, $(1,2)$ como combinação linear de $(1,0)$ e $(1,1)$. Cada uma dessas outras escolhas de vetores que podem ser retirados de $\mathcal{A}$, por serem combinação linear dos demais, resultaria em uma base diferente de $\mathbb{R}^2$ contida em $\mathcal{A}$.

Aqui, cabe um alerta. A remoção de vetores de um conjunto gerador LD a fim de dele se extrair uma base não é arbitrária. Conforme vimos na demonstração do Teorema 4.5.8, em cada etapa, é preciso remover algum vetor que *seja combinação linear dos demais*. Por exemplo, é fácil ver que o conjunto

$$\mathcal{B} = \{(1,0),(2,0),(0,1)\}$$

gera $\mathbb{R}^2$; portanto, conforme o Teorema 4.5.8, contém uma base de $\mathbb{R}^2$. Também é fácil ver que esse conjunto é LD. Assim, para se obter uma base de $\mathbb{R}^2$ a partir dele, será necessário submetê-lo a um processo análogo ao que adotamos no Exemlo 4.5.9, isto é, precisamos remover *adequadamente* vetores de $\mathcal{B}$. Não é qualquer vetor que pode ser removido. Por exemplo, se retirarmos o vetor $(0,1)$ de $\mathcal{B}$, obtemos o conjunto $\{(1,0),(2,0)\}$ que não mais gera $\mathbb{R}^2$. Isso ocorreu porque $(0,1)$ não é combinação linear de $(1,0)$ e $(2,0)$. Já o vetor $(2,0)$ é combinação linear de $(1,0)$ e $(0,1)$:

$$(2,0) = 2(1,0) + 0(0,1),$$

portanto, pode ser removido de $\mathcal{B}$ e, de fato, o subconjunto

$$\{(1,0),(0,1)\}$$

formado pelos vetores restantes em $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Repetindo, foi feita uma escolha adequada: retiramos de $\mathcal{B}$ o vetor $(2,0)$ pois ele era combinação linear dos demais. Poderíamos, alternativamente, ter retirado de $\mathcal{B}$ o vetor $(1,0)$, já que ele é combinação linear dos outros dois:

$$(1,0) = \frac{1}{2}(2,0) + 0(0,1).$$

O subconjunto restante, $\{(2,0),(0,1)\}$, é uma outra base de $\mathbb{R}^2$ contida em $\mathcal{B}$. Em resumo, $\mathcal{B}$ contém exatamente duas bases de $\mathbb{R}^2$ (em contraste com o conjunto $\mathcal{A}$ do Exemplo 4.5.9, que continha três).

No Apêndice B, o leitor encontra um método algorítmico, e mais eficiente, para se extrair de um conjunto gerador uma base.

Dimensão. Nosso objetivo, agora, será mostrar que duas bases de um mesmo espaço vetorial têm sempre a mesma quantidade de elementos. Esse fato seguirá como consequência do resultado a seguir.

Teorema 4.5.10. *Seja V um espaço vetorial, sejam $\mathcal{A} = \{u_1,\dots,u_n\}$ e $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_m\}$ subconjuntos de V. Se $V = [\mathcal{A}]$ e $\mathcal{B}$ é LI, então $n \geq m$.*

Demonstração. A demonstração será feita por contradição. Suponha que $n < m$. Como $\mathcal{A}$ é um conjunto gerador de V, todo vetor de V se escreve como combinação linear dos elementos de $\mathcal{A}$, em particular, isso se aplica aos elementos de $\mathcal{B}$: para cada $j = 1, \dots, m$, existem $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ tais que

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i.$$

Considere o sistema linear homogêneo de n equações e m incógnitas cujos coeficientes são os escalares α_{ij}:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1m}x_m = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2m}x_m = 0 \\ \quad \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + \alpha_{nm}x_m = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

Como $n < m$, pelo Teorema 1.1.9, esse sistema tem pelo menos uma solução não trivial $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$. Assim,

$$\begin{aligned} \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + & \cdots + \beta_m v_m \\ &= \beta_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} u_i \right) + \beta_2 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2} u_i \right) + \cdots + \beta_m \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} u_i \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j} \beta_j \right) u_1 + \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{2j} \beta_j \right) u_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{nj} \beta_j \right) u_n \end{aligned}$$

Como $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ é uma solução de (4.14), cada um dos coeficientes dos u_i na combinação linear acima é zero. Segue que

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_m v_m = 0_V.$$

Mas os escalares β_j não são todos nulos, pois formam uma solução não trivial de (4.14). Portanto, $\mathcal{B}$ é LD, o que é uma contradição. Ou seja, supor que $n < m$ conduz a uma contradição com uma das hipóteses. Somo forçados, portanto, a aceitar que $n \geq m$. $\square$

Corolário 4.5.11. *Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases de um espaço vetorial V. Então, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ têm a mesma quantidade de elementos.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B}_1$ tenha n elementos e que $\mathcal{B}_2$ tenha m elementos. Como $V = [\mathcal{B}_1]$ e $\mathcal{B}_2$ é LI, segue, do Teorema 4.5.10, que $n \geq m$. Por outro lado, como $V = [\mathcal{B}_2]$ e $\mathcal{B}_1$ é LI, segue, do mesmo resultado, que $m \geq n$. Logo, $n = m$. $\square$

Esse resultado justifica a próxima definição.

Definição. Se V é um espaço vetorial que tem uma base com n elementos, diremos que V tem *dimensão* n e escreveremos $\dim(V) = n$. Por convenção, o espaço vetorial nulo tem dimensão 0.

Exemplo 4.5.12. Segue, pelo que vimos nos exemplos no início desta seção, que

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$,
- $\dim\big(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})\big) = n + 1$,
- $\dim\big(M_2(\mathbb{R})\big) = 4$.

Nesse último caso, mais geralmente, $\dim\big(M_{m\times n}(\mathbb{R})\big) = mn$. Uma base de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, em que E_{ij} denota a matriz $m \times n$ com entrada (i, j) igual a 1 e as demais, todas, nulas. $\diamondsuit$

Como vimos no Teorema 4.5.8, todo espaço vetorial que pode ser gerado por um conjunto finito de vetores tem uma base. Esses espaços serão chamado de *espaços vetoriais de dimensão finita*.

Terminamos esta seção com um resultado que é, em certo sentido, dual do Teorema 4.5.8. Aqui, também, precisaremos de um lema preparatório.

Lema 4.5.13. *Seja V um espaço vetorial e seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ um conjunto LI de vetores de V. Se $w \in V$ é tal que $\{w, v_1, \dots, v_m\}$ é LD, então $w \in [v_1, \dots, v_m]$.*

Demonstração. Como $\{w, v_1, \dots, v_m\}$ é LD, existem $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que $\beta w + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0_V$. Se $\beta = 0$, teríamos algum $\alpha_i \neq 0$ e $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0_V$, o que é impossível, uma vez que $\{v_1, \dots, v_m\}$ é LI. Logo, $\beta \neq 0$ e, portanto, $w = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\beta} v_m \in [v_1, \dots, v_m]$. $\square$

Teorema 4.5.14. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $\mathcal{B}$ um subconjunto LI de V. Então, V tem uma base contendo $\mathcal{B}$.*

Esse resultado é também conhecido como *Teorema do completamento*, uma vez que garante que qualquer conjunto LI em um espaço vetorial de dimensão finita pode ser completado a uma base.

Demonstração. Suponha que $\dim(V) = n$ e seja $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_m\}$ um conjunto LI formado por vetores de V. Como V tem uma base com n elementos, segue do Teorema 4.5.10 que $n \geq m$. Se $[\mathcal{A}] = V$, então $\mathcal{A}$ é uma base de V e não há o que demonstrar. Suponha que $[\mathcal{A}] \neq V$. Então, existe um vetor $w_1 \in V$ tal que $w_1 \notin [\mathcal{A}]$. Pelo Lema 4.5.13, o conjunto $\mathcal{A}_1 = \{w_1, v_1, \dots, v_m\}$ é LI. (Se fosse LD, o lema garantiria que $w_1 \in [\mathcal{A}]$, contradizendo a escolha de w_1.) Consideremos, agora, o conjunto $\mathcal{A}_1$. Ele é

LI. Se $[\mathcal{A}_1] = V$, então $\mathcal{A}_1$ será uma base de V que contém $\mathcal{A}$. Se não, repita o argumento com $\mathcal{A}_1$ no lugar de $\mathcal{A}$. Esse processo termina em uma base (que contém $\mathcal{A}$), porque em V não existem conjuntos LI com mais do que n vetores. $\square$

Corolário 4.5.15. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita igual a n.*

(i) *Se $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V com n elementos, então $\mathcal{B}$ é uma base de V.*

(ii) *Se $\mathcal{B}$ é um subconjunto LI de V com n elementos, então $\mathcal{B}$ é uma base de V.*

Demonstração. (i) Pelo Teorema 4.5.8, existe uma base $\mathcal{C}$ de V tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. Como $\mathcal{C}$ tem n elementos (pois $\dim(V) = n$), segue que $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. (ii) Pelo Teorema 4.5.14, exise uma base $\mathcal{C}$ de V tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ tem n elementos, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. $\square$

O corolário que acabamos de ver é útil na tarefa de se exibir bases, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 4.5.16. Mostre que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, em que

$$v_1 = (1,1,0,-4), \qquad v_2 = (3,-1,2,1),$$
$$v_3 = (-2,-1,1,1), \qquad v_4 = (0,1,-2,2),$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Solução. Vejamos se $\mathcal{B}$ é LI. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$. Então, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -9 \neq 0$, segue do Teorema 1.3.8 que, necessariamente, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Logo, $\mathcal{B}$ é um conjunto LI em $\mathbb{R}^4$. Como $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, e $\mathcal{B}$ é um conjunto LI formado por 4 vetores de $\mathbb{R}^4$, segue, do Corolário 4.5.15, que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$. $\diamondsuit$

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 17–24.

4.6 Coordenadas

Se $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é uma base do espaço vetorial V e $v \in V$, então, como $\mathcal{B}$ gera V, existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n. \tag{4.15}$$

Como $\mathcal{B}$ é LI, a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dos escalares utilizados na expressão (4.15) está univocamente determinada pelos elementos de $\mathcal{B}$ e pela ordem em que eles estão dados. Com efeito, se $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ são tais que

$$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n,$$

então, igualando ambas as expressões de v como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, obtém-se

$$(\alpha_1 - \beta_1)u_1 + (\alpha_2 - \beta_2)u_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)u_n = 0_V.$$

Como $\mathcal{B}$ é LI, segue que $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

Uma vez fixada uma ordem nos elementos de uma base $\mathcal{B}$ de um espaço vetorial V, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma *base ordenada* de V.

O que acabamos de ver permite que se definam coordenadas em relação a uma base ordenada.

Definição. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita igual a n, e seja $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ordenada de V. Dado um vetor $v \in V$, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Dizemos que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ são as *coordenadas* de v em relação à base ordenada $\mathcal{B}$, e escrevemos

$$v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}.$$

Observação. Cabe um comentário sobre as semelhanças e diferenças entre a nomenclatura e notação para bases e coordenadas utilizadas no Capítulo 2 em comparação com as utilizadas no contexto de espaços vetoriais abstratos.

Para o espaço vetorial $\mathbb{V}^3$ dos vetores tridimensionais, definimos uma base como sendo um conjunto ordenado LI composto por três vetores. Essas bases, no contexto abstrato, são o que estamos, a partir de agora, chamando de bases ordenadas.

Repare, também, que o conceito de coordenadas visto acima coincide com aquele do Capítulo 2. $\Diamond$

Tem-se uma versão para espaços vetoriais gerais da Proposição 2.3.2, que nos permitia "fazer contas em coordenadas":

Proposição 4.6.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita igual a n, e seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de V. Sejam $v, w \in V$ com $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$ e $w = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)_{\mathcal{B}}$, e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,*

(i) $v + w = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)_{\mathcal{B}}$;

(ii) $\lambda v = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)_{\mathcal{B}}$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Como $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ e $w = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$, segue que $v + w = (\alpha_1 + \beta_1)u_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)u_n$ e $\lambda v = (\lambda\alpha_1)u_1 + \dots (\lambda\alpha_n)u_n$. □

Exemplo 4.6.2. (Prova 3, Álgebra Linear I, 2015) Considere a base ordenada $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Se (a, b, c, d) denotam as coordenadas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ em relação à base $\mathcal{B}$, então $8a + 4b + 2c + d$ é igual a

(A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 11 (E) 15

Solução. Fica a cargo do leitor convencer-se de que $\mathcal{B}$ é, de fato, uma base de $M_2(\mathbb{R})$. Pela definição de coordenadas, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = (a, b, c, d)_{\mathcal{B}}$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} &= a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a - b + c + d & a + b + c + d \\ a + b + c & a - b + d \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja, se e somente se, $\begin{cases} a - b + c + d = 1 \\ a + b + c + d = 2 \\ a + b + c = 3 \\ a - b + d = 0 \end{cases}$. A solução desse sistema é dada por $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 1, d = -1$. *Resposta:* (E). ♢

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 25–27.

4.7 Base e dimensão de subespaços

Como vimos na Seção 4.2, um subespaço de um espaço vetorial é, ele também, um espaço vetorial. Nesta seção, aplicaremos as ideias de base e dimensão ao estudo de subespaços de espaços vetoriais.

Começamos com as seguinte consequência dos resultados da Seção 4.5.

Proposição 4.7.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja W um subespaço de V. Então, W tem dimensão finita e* $\dim(W) \leq \dim(V)$. *Além disso,* $\dim(W) = \dim(V)$ *se, e somente se,* $W = V$.

Demonstração. Se $W = \{0_V\}$, então $\dim(W) = 0 \leq \dim(V)$. Se $W \neq \{0_V\}$, tome um vetor $w_1 \in W$, $w_1 \neq 0_V$. Então, o conjunto $\{w_1\}$ é LI, o que implica, pelo Teorema 4.5.10, que $\dim(V) \geq 1$. Como W é um subespaço de V, temos $[w_1] \subseteq W$. Se $[w_1] = W$, então $\{w_1\}$ é uma base de W, e, portanto, $\dim(W) = 1 \leq \dim(V)$. Se $[w_1] \neq W$, então existe $w_2 \in W$ tal que $w_2 \neq [w_1]$. Do Lema 4.5.13, segue que $\{w_1, w_2\}$ é um subconjunto LI de W e, *a fortiori*, de V. Assim, usando novamente o Teorema 4.5.10, concluímos que $\dim(V) \geq 2$. Sabemos que $[w_1, w_2] \subseteq W$ (porque W é um subespaço de V). Se $[w_1, w_2] = W$, o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é uma base de W e $\dim(W) = 2 \leq \dim(V)$. Se $[w_1, w_2] \neq W$, repetimos o argumento. Esse processo não pode ser repetido indefinidamente, pois, a cada passo, construímos em W, e, portanto, em V, um conjunto LI maior, mas os subconjuntos LI de V têm tamanho limitado por $\dim(V)$.

É claro que se $W = V$, então $\dim(W) = \dim(V)$. Reciprocamente, suponha que $n = \dim(W) = \dim(V)$ e seja $\mathcal{B}$ uma base de W. Então, $\mathcal{B}$ é um subconjunto LI de V contendo $n = \dim(V)$ elementos. Pelo Corolário 4.5.15, $\mathcal{B}$ é uma base de V. Logo, $V = [\mathcal{B}] = W$. □

Dedicaremos o resto desta seção ao estudo de exemplos em que bases e dimensões de subespaços são determinados.

Nos exemplos que seguem, faremos uso da seguinte observação útil na determinação de bases de subespaços por meio do processo de escalonamento.

Observação. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita igual a n, e seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de V. Dados vetores $u_1, \dots, u_k$ de V, podemos considerar o subespaço $W = [u_1, \dots, u_k]$. Para encontrar uma base para W (e, portanto, determinar sua dimensão), podemos proceder da seguinte maneira: determine as coordenadas dos vetores que geram W em relação à base ordenada $\mathcal{B}$,

$$u_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})_{\mathcal{B}},$$

e considere a matriz $A = (\alpha_{ij}) \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$, cujas linhas são as coordenadas, em relação a $\mathcal{B}$, dos geradores de W. Agora, seja $R = (\beta_{ij}) \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz que foi obtida a partir de A por meio de uma sequência de operações elementares sobre linhas. Note que as linhas de R são combinações lineares das linhas de A. Portanto, segue da Proposição 4.6.1, que se definirmos os vetores

$$w_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{in})_{\mathcal{B}},$$

cujas coordenadas, em relação à base $\mathcal{B}$ são dadas pelas linhas de R, então $w_i \in [u_1, \dots, u_k] = W$. Logo, $[w_1, \dots, w_k] \subseteq W$. Como A também pode ser obtida a partir de R por meio de uma sequência de operações elementares sobre linhas, o mesmo argumento prova que $W = [u_1, \dots, u_k] \subseteq [w_1, \dots, w_k]$. Portanto, $W = [w_1, \dots, w_k]$.

Agora, suponha que R seja uma matriz escalonada (por exemplo, que tenha sido obtida a partir de A pelo processo de escalonamento). Neste caso, W será gerado pelos vetores cujas coordenadas, em relação à base $\mathcal{B}$, são dadas pelas linhas *não nulas* de R (pois as linhas nulas correspondem ao vetor nulo, que sempre pode ser eliminado de um conjunto gerador). Mais ainda, segue novamente da Proposição 4.6.1, que os vetores cujas coordenadas correspondem às linhas não nulas de R formam um conjunto LI de vetores (uma vez que os pivôs ocorrem em posições distintas); logo formam uma base de W. Assim, $\dim(W)$ coincide com o número de linhas não nulas de R, que é o número de pivôs de R. $\diamondsuit$

Exemplo 4.7.2. Determine a dimensão do subespaço

$$W = \left[(x-1)^2, (x-2)^2, (x-3)^2\right]$$

de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Solução. Sabemos, da Proposição 4.7.1, que $\dim(W) \leq \dim\big(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\big) = 3$. Vamos utilizar a observação acima para encontrar uma base, e consequentemente, a dimensão, de W. Comecemos por escolher uma base ordenada para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, por exemplo, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, e determinemos as coordenadas, em relação a essa base, dos geradores de W:

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 &= 1 - 2x + x^2 = (1, -2, 1)_{\mathcal{B}} \\
(x-2)^2 &= 4 - 4x + x^2 = (4, -4, 1)_{\mathcal{B}} \\
(x-3)^2 &= 9 - 5x + x^2 = (9, -6, 1)_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

ou seja, $W = [(1, -2, 1)_{\mathcal{B}}, (4, -4, 1)_{\mathcal{B}}, (9, -6, 1)_{\mathcal{B}}]$. Agora, considere a matriz cujas linhas são as coordenadas dos geradores de W e submeta-a ao processo de escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 9 & -6 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 12 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R$$

Pelo comentário feito antes do exemplo, sabemos que

$$W = [(1, -2, 1)_{\mathcal{B}}, (0, 4, -3)_{\mathcal{B}}, (0, 0, 1)_{\mathcal{B}}] .$$

Como esses três vetores são, evidentemente, LI, eles formam uma base de W, donde segue que $\dim(W) = 3$, que é precisamente o número pivôs da matriz escalonada R.

Um comentário final: encontramos uma base $\{f_1, f_2, f_3\}$ para o subespaço W, em que

$$\begin{aligned}
f_1 &= (1, -2, 1)_{\mathcal{B}} = 1 - 2x + x^2, \\
f_2 &= (0, 4, -3)_{\mathcal{B}} = 4x - x^2, \\
f_3 &= (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = x^2.
\end{aligned}$$

Como W também é gerado por $\{(x-1)^2, (x-2)^2, (x-3)^2\}$ — W foi apresentado como sendo precisamente o subespaço gerado por esse conjunto — e, agora, sabemos que $\dim(W) = 3$, segue que esse conjunto também é uma base de W. $\diamondsuit$

Exemplo 4.7.3. Determine a dimensão do subespaço $W = [v_1, v_2, v_3]$ de $M_2(\mathbb{R})$, em que

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}.$$

Solução. Como $\dim\big(M_2(\mathbb{R})\big) = 4$, segue que $\dim(W) \leq 4$. Mais do que isso, como W é gerado por 3 vetores, sabemos, pelo Teorema 4.5.10, que $\dim(W) \leq 3$. Seja

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$. Vamos trabalhar com coordenadas em relação a $\mathcal{B}$. Temos, assim,

$$W = \big[(2, -1, 2, 0)_{\mathcal{B}},\ (1, 2, 3, 4)_{\mathcal{B}},\ (0, -5, -4, -8)_{\mathcal{B}}\big].$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -4 & -8 \end{bmatrix} &\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & -8 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -4 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R
\end{aligned}$$

Logo, $\{w_1, w_2\}$, em que

$$w_1 = (1, 2, 3, 4)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = v_2$$

e

$$w_2 = (0, -5, -4, -8)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} = v_3,$$

é uma base de W e, portanto, $\dim(W) = 2$, que é, precisamente, o número de pivôs de R. $\diamondsuit$

Exemplo 4.7.4. Em $\mathbb{R}^5$, encontre uma base e a dimensão do subespaço $S = [u_1, u_2, u_3, u_4]$, em que

$$u_1 = (1,0,-1,2,0), \qquad u_2 = (2,1,3,0,0),$$
$$u_3 = (0,1,-5,4,0), \qquad u_4 = (1,0,-11,10,0).$$

Solução. Sabemos que $\dim(S) \leq 4$, uma vez que S é gerado por 4 vetores. Como vimos fazendo (e trabalhando com coordenadas em relação à base canônica de $\mathbb{R}^5$), vamos submeter a matriz cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos geradores de S ao processo de escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -11 & 10 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $\dim(S) = 3$ (que é o número de pivôs da matriz escalonada ao final do processo) e uma base de S é $\{u_1', u_2', u_3'\}$, em que

$$u_1' = (1,0,-1,2,0) = u_1,\ u_2' = (0,1,5,-4,0) \text{ e } u_3' = (0,0,-10,8,0). \Diamond$$

Observação. No exemplo acima, encontramos uma base $\{u_1', u_2', u_3'\}$ de S que não está contida no conjunto gerador $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. O Teorema 4.5.8 garante que é possível extrair de $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ uma base de S. Para um método que permite extrair uma base de um conjunto gerador de um subespaço, veja o Apêndice B. $\Diamond$

Exemplo 4.7.5. Determine a dimensão do subespaço

$$V = \{\, p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0 \,\}$$

de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Solução. Começamos por observar que V é, de fato, um subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, como o leitor pode verificar. Assim, $\dim(V) \leq \dim\big(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})\big) = 4$. Vamos trabalhar em coordenadas e procurar um conjunto gerador de V. Seja $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Dado um vetor genérico $p = (a,b,c,d)_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, determinemos condições necessárias e suficientes sobre suas coordenadas para que p seja um elemento de V. Sabemos que $p \in V$ se, e somente se $p(1) = 0$. Como $p = (a,b,c,d)_{\mathcal{B}}$, segue que $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ e, portanto, $p \in V$ se, e somente se, $0 = p(1) = a + b + c + d$. Ou seja, os vetores de V são aqueles elementos de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ cujas coordenadas, em relação à base $\mathcal{B}$, satisfazem a equação

$$x + y + z + w = 0,$$

ou, em outras palavras, os elementos de V são precisamente os vetores de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ cujas coordenadas, em relação à base $\mathcal{B}$, são soluções do sistema linear homogêneo (em notação matricial)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz de coeficientes desse sistema já é escalonada e tem apenas um pivô. As variáveis y, z, w são livres, e, portanto, as soluções do sistema são da forma $(-y - z - w, y, z, w)$, com $y, z, w \in \mathbb{R}$. Logo, os vetores de V são da forma

$$(-y - z - w, y, z, w)_{\mathcal{B}} = y(-1, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}} + z(-1, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}} + w(-1, 0, 0, 1)_{\mathcal{B}}.$$

(O que fizemos aqui foi "colocar em evidência" as variáveis livres y, z, w a fim de obter a solução geral como combinação linear de um conjunto finito de vetores.) Conclui-se daí que $V = [g_1, g_2, g_3]$, em que

$$g_1 = (-1, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}}, \quad g_2 = (-1, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad g_3 = (-1, 0, 0, 1)_{\mathcal{B}}.$$

Como $\{g_1, g_2, g_3\}$ é claramente LI, esses três vetores formam uma base de V, donde segue que $\dim(V) = 3$. (Explicitamente, como elementos de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, os elementos dessa base de V são $g_1(t) = -1 + t$, $g_2(t) = -1 + t^2$ e $g_3(t) = -1 + t^3$.)

Veja que, neste exemplo, a dimensão do subespaço V é dada pelo número de variáveis livres do sistema linear homogêneo que define as coordenadas dos elementos de V, que por sua vez, é igual ao número total de variáveis (no caso, a dimensão do espaço ambiente $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$) menos o número de pivôs: $4 - 1 = 3$. $\diamondsuit$

No exemplo acima, vimos uma instância em que foi possível determinar a dimensão de um subespaço em termos do número de variáveis livres de um sistema linear homogêneo. Diante de um problema em que se trabalha com coordenadas e o subespaço está descrito em termos de condições que devem ser estar satisfeitas pelas coordenadas de seus elementos, sempre teremos o método aplicado no exemplo anterior à disposição. Isso se deve ao seguinte fato.

Proposição 4.7.6. *Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e seja*

$$S = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ é solução do sistema linear homogêneo } AX = 0\}.$$

Então, S é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $\dim(S) = n - t$, em que t denota o número de pivôs de uma matriz escalonada obtida a partir de A por operações elementares sobre linhas.

Demonstração. Já vimos, no Exemplo 4.2.3, que S é, de fato, um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Vejamos qual é sua dimensão. Seja R uma matriz escalonada obtida a partir de A por operações elementares sobre linhas (por exemplo, aplicando-se o processo de escalonamento a A). Então, os sistemas lineares $AX = 0$ e $RX = 0$ têm as mesmas soluções. As soluções de $RX = 0$ são obtidas atribuindo-se parâmetros independentes às variáveis livres e escrevendo, por retrossubstituição, as variáveis pivô em termos das variáveis livres. Digamos, então, que R tenha t pivôs, e consequentemente, o sistema $RX = 0$ tenha $n - t$ variáveis livres. Uma solução genérica de $RX = 0$ se escreve, então, como uma combinação linear de $n - t$ vetores $v_1, v_2, \dots, v_{n-t}$ de $\mathbb{R}^n$, em que os escalares são justamente os $n - t$ parâmetros atribuídos às variáveis livres. Ou, dito de outra maneira, S é gerado por $v_1, v_2, \dots, v_{n-t}$. Como na posição relativa a cada uma das variáveis livres apenas um desses vetores tem coordenada igual a 1, enquanto os demais têm essa coordenada igual a 0, segue que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-t}\}$ é, além de gerador de S, também LI — uma base de S. Logo, $\dim(S) = n - t$. □

O próximo exemplo é uma instância desse resultado, desde que sejam tomadas coordenadas em relação a uma base adequada.

Exemplo 4.7.7. Encontre uma base e a dimensão do subespaço

$$W = \left\{ p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid p'(2) = p(1) = \int_0^2 p(x)\,dx \right\}$$

de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, em que p' denota a derivada de p.

Solução. Fica a cargo do leitor verificar que, de fato, W é um subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Trabalhemos com coordendas em relação à base canônica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Para encontrar um conjunto gerador para W, tomemos um elemento genérico $p = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e vamos impor as condições para que ele pertença a W. Como $p(x) = a + bx + cx^2$, segue que $p'(x) = b + 2cx$ e, portanto, $p'(2) = b + 4c$. Ainda, $p(1) = a + b + c$, e $\int_0^2 p(x)\,dx = 2a + 2b + \frac{8}{3}c$ (uma vez que uma primitiva de p é $ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3$). Logo, $p \in W$ se, e somente se,

$$\begin{cases} b + 4c = a + b + c \\ a + b + c = 2a + 2b + \frac{8}{3}c \end{cases},$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} a - 3c = 0 \\ a + b + \frac{5}{3}c = 0 \end{cases}.$$

Ou seja, $p \in W$ se, e somente se, suas coordenadas, em relação à base $\mathcal{B}$, satisfazem o sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando a matriz de coeficientes, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{14}{3} \end{bmatrix} = R$$

Como R tem 2 pivôs, $\dim(W) = 3 - 2 = 1$.

Para obter uma base de W, basta encontrar a solução geral do sistema, que, no caso, é $(3z, -\frac{14}{3}z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$. Isto é, os elementos de W são da forma $(3z, -\frac{14}{3}z, z)_{\mathcal{B}} = z(3, -\frac{14}{3}, 1)_{\mathcal{B}}$, com $z \in \mathbb{R}$; em outras palavras, $W = \left[(3, -\frac{14}{3}, 1)_{\mathcal{B}}\right] = \left[3 - \frac{14}{3}x + x^2\right]$. E esse conjunto gerador (de um único vetor) é uma base para W. $\diamondsuit$

Exemplo 4.7.8. Encontre uma base para o subespaço

$$S = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z = 3x + y - z + w = 5y - 5z + 2w = 0\right\}$$

de $\mathbb{R}^4$.

Solução. S é o subespaço de $\mathbb{R}^4$ formado precisamente pelas soluções do sistema linear homogêneo cuja matriz de coeficientes é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Escalonando A, obtemos

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R,$$

que tem 2 pivôs. Logo, $\dim(S) = 4 - 2 = 2$.

Para achar uma base de S, olhando para R, vemos que as soluções do sistema são os vetores (x, y, z, w), em que

$$w = t_1, \quad z = t_2, \quad 5y - 5z + 2w = 0, \quad 2x - y + z = 0.$$

Em termos dos parâmetros atribuídos às variáveis livres z e w, temos:

$$w = t_1, \quad z = t_2, \quad y = t_2 - \frac{2}{5}t_1, \quad x = -\frac{1}{5}t_1.$$

Ou seja, as soluções de $AX = 0$ são da forma

$$\left(-\frac{1}{5}t_1, t_2 - \frac{2}{5}t_1, t_2, t_1\right) = t_1\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 1\right) + t_2(0, 1, 1, 0),$$

com $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Logo,

$$S = \left[\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 1 \right), (0,1,1,0) \right],$$

e, portanto,

$$\left\{ \left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 1 \right), (0,1,1,0) \right\}$$

é uma base de S (já que, além de gerador de S, é, também, LI). $\diamondsuit$

O processo ilustrado no exemplo anterior pode ser revertido, no sentido que se um subespaço de $\mathbb{R}^n$ é apresentado por um conjunto de geradores, é possível descrevê-lo, também, como subespaço formado pelas soluções de um sistema linear homogêneo adequado. No próximo exemplo faremos exatamente isso. (Note que já havíamos tratado de um caso especial no Exemplo 4.3.6.)

Exemplo 4.7.9. (Lista 1 - Álgebra Linear II (2020), ex. 9(iii)) Descreva o subespaço

$$S = \left[(2,-1,2,0), (1,2,3,4), (0,-5,-4,-8) \right]$$

de $\mathbb{R}^4$ como o subespaço das soluções de um sistema linear homogêneo.

Solução. Dado $v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, teremos $v \in S$ se, e somente se, existirem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha(2,-1,2,0) + \beta(1,2,3,4) + \gamma(0,-5,-4,-8),$$

o que é equivalente a existirem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = a \\ -\alpha + 2\beta - 5\gamma = b \\ 2\alpha + 3\beta - 4\gamma = c \\ 4\beta - 8\gamma = d \end{cases}$$

Isso, por sua vez, é dizer que (α, β, γ) é solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ -x + 2y - 5z = b \\ 2x + 3y - 4z = c \\ 4y - 8z = d \end{cases} \tag{4.16}$$

nas incógnitas x, y, z. Assim, $v \in S$ se, e somente se, (4.16) tiver solução. Para encontrar as condições que garantem a existência de soluções de (4.16), escalonamos sua matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ -1 & 2 & -5 & b \\ 2 & 3 & -4 & c \\ 0 & 4 & -8 & d \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -5 & b \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 2 & 3 & -4 & c \\ 0 & 4 & -8 & d \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -5 & b \\ 0 & 5 & -10 & a+2b \\ 0 & 7 & -14 & 2b+c \\ 0 & 4 & -8 & d \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -5 & b \\ 0 & 1 & -2 & \frac{d}{4} \\ 0 & 5 & -10 & a+2b \\ 0 & 7 & -14 & 2b+c \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -5 & b \\ 0 & 1 & -2 & \frac{d}{4} \\ 0 & 0 & 0 & a+2b-\frac{5}{4}d \\ 0 & 0 & 0 & 2b+c-\frac{7}{4}d \end{array}\right]$$

Segue que (4.16) tem solução se, e somente se,

$$\begin{cases} a+2b-\frac{5}{4}d = 0 \\ 2b+c-\frac{7}{4}d = 0 \end{cases}$$

Assim, S é o subespaço de $\mathbb{R}^4$ formado pelas soluções do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x_1+2x_2-\frac{5}{4}x_4 = 0 \\ 2x_2+x_3-\frac{7}{4}x_4 = 0 \end{cases}$$

nas variáveis x_1, x_2, x_3, x_4. $\diamondsuit$

Observação. Vimos, na Proposição 4.7.1, que a dimensão de um subespaço está limitada superiormente pela dimensão do espaço vetorial em que ele está. Nos exemplos desta seção, calculamos a dimensão de diversos subespaços vetoriais. Cabe registrar, agora, que, dado um espaço vetorial V de dimensão finita igual a n, V sempre terá subsepaços de dimensão k, para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Mais do que isso, se $1 \leq k < n$, então V tem infinitos subespaços de dimensão k. Vejamos por quê.

O único subespaço de V de dimensão 0 é $\{0_V\}$, conforme a convenção que adotamos, e o único subespaço de V de dimensão n é V (isso segue da Proposição 4.7.1). Assim, se $\dim(V) = 1$, V tem apenas dois subespaços: $\{0_V\}$, de dimensão 0, e o próprio V, de dimensão 1.

Suponha, agora, que $\dim(V) > 1$. Para cada vetor não nulo $v \in V$, o subespaço $[v]$ de V tem dimensão 1 (pois $\{v\}$ é uma base dele). Como $V \neq [v]$ (pois $\dim(V) > 1$), existe $u \in V$ tal que $u \notin [v]$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, defina o vetor $v_\lambda = v + \lambda u$. Obtém-se, assim, uma família infinita $[v_\lambda]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, de subespaços de V, todos de dimensão 1, diferentes entre si.

Essa ideia pode ser generalizada da seguinte maneira: para cada $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tome k vetores $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ tais que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ seja LI (o que sempre é possível, tomando, por exemplo, k vetores de uma base de V) e escolha $u \in V$ tal que $u \notin [v_1, v_2, \dots, v_k]$ (o que também é possível, pois $[v_1, v_2, \dots, v_k] \neq V$). Definindo, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $V_\lambda = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k + \lambda u]$, obtemos uma família infinita V_λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) de subespaços de V, todos de dimensão k, distintos entre si. (Você consegue demonstrar isso?) ♢

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 28–38.

4.8 Soma e interseção de subespaços

Se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial, a *interseção* deles é denotada e definida por

$$W_1 \cap W_2 = \{ v \in V \mid v \in W_1 \text{ e } v \in W_2 \}.$$

Veremos que $W_1 \cap W_2$ é, sempre, um subespaço de V, ao passo que a união

$$W_1 \cup W_2 = \{ v \in V \mid v \in W_1 \text{ ou } v \in W_2 \}$$

é um subconjunto de V que, em geral, não é um subespaço.

Proposição 4.8.1. *Seja V um espaço vetorial e sejam W_1 e W_2 subespaços de V. Então, $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.*

Demonstração. O vetor nulo 0_V é um elemento de $W_1 \cap W_2$, porque é um elemento tanto de W_1 como de W_2, já que são, ambos, subespaços de V. Sejam, agora, $u, v \in W_1 \cap W_2$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, como $u \in W_1$, $v \in W_1$ e W_1 é um subespaço de V, segue que $u + v \in W_1$. Analogamente, $u + v \in W_2$, uma vez que ambos, u e v, são vetores de W_2, que também é um subespaço. Assim, $u + v \in W_1 \cap W_2$. Finalmente, como W_1 é um subespaço e $u \in W_1$, segue $\lambda u \in W_1$. Analogamente, $\lambda u \in W_2$, donde conclui-se que $\lambda u \in W_1 \cap W_2$. Ou seja, o subconjunto $W_1 \cap W_2$ de V contém o vetor nulo, é fechado para somas e é fechado para multiplicação por escalares. Logo, $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V. □

Como acabamos de ver, $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V que está contido, por definição, tanto em W_1 quando em W_2. Assim, se V for um espaço vetorial de dimensão finita, teremos

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_1) \quad \text{e} \quad \dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_2).$$

No próximo exemplo, encontramos a dimensão da interseção de dois subespaços.

Exemplo 4.8.2. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \big[(0,-1,2),(2,-1,-1)\big], \quad W_2 = \big[(1,-1,1),(1,1,0)\big].$$

Descreva $W_1 \cap W_2$.

Solução. Quando se pede uma descrição de um subespaço, é frequentemente suficiente exibir um conjunto gerador. Procuremos, assim, um conjunto gerador para $W_1 \cap W_2$. Para tanto, procederemos da seguinte maneira: tomando um elemento arbitrário de W_1, vejamos que condições ele deve satisfazer para pertencer, também, a W_2. Dado $v \in W_1$, sabemos que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $v = a(0,-1,2) + b(2,-1,-1)$, uma vez que W_1 é gerado pelo conjunto $\{(0,-1,2),(2,-1,-1)\}$. Para que v seja, também um elemento de W_2, é preciso que existam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $v = x(1,-1,1) + y(1,1,0)$. Resumindo, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a(0,-1,2) + b(2,-1,-1) \in W_2$ se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(0,-1,2) + b(2,-1,-1) = x(1,-1,1) + y(1,1,0),$$

ou, equivalentemente, comparando coordenadas,

$$\begin{cases} x + y = 2b \\ -x + y = -a - b \\ x = 2a - b \end{cases} \tag{4.17}$$

Assim, dados $a, b \in \mathbb{R}$, o vetor $a(0,-1,2) + b(2,-1,-1)$ de W_1 é também um vetor de W_2 se, e somente se, o sistema linear 4.17, nas incógnitas x, y, tiver solução. Vejamos o resultado do processo de escalonamento aplicado à matriz aumentada de (4.17):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2b \\ -1 & 1 & -a-b \\ 1 & 0 & 2a-b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2b \\ 0 & 2 & -a+b \\ 0 & -1 & 2a-3b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2b \\ 0 & -1 & 2a-3b \\ 0 & 2 & -a+b \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2b \\ 0 & -1 & 2a-3b \\ 0 & 0 & 3a-5b \end{array}\right]$$

Daí, segue que (4.17) tem solução se, e somente se, $3a - 5b = 0$, ou seja, se, e somente se, $b = \frac{3a}{5}$. Logo, os elementos de W_1 que estão também em W_2 são as combinações lineares dos geradores de W_1 da forma

$$a(0,-1,2) + \frac{3a}{5}(2,-1,-1) = \left(\frac{6a}{5}, -\frac{8a}{5}, \frac{7a}{5}\right) = a\left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{7}{5}\right),$$

com $a \in \mathbb{R}$. Portanto, $W_1 \cap W_2 = \big[\big(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{7}{5}\big)\big]$, ou, se o leitor preferir, $W_1 \cap W_2 = [(6,-8,7)]$. Segue dessa descrição da interseção que $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, enquanto $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 2$.

(Cabe comentar que poderíamos, alternativamente, ter descrito condições sobre um elemento arbitário de W_2 para que ele pertencesse a W_1, isto é, olhando (4.17) como um sistema linear nas incógnitas a, b. Esse outro caminho conduziria, evidentemente, à mesma conclusão.) $\diamondsuit$

Enquanto a interseção de dois subespaços é sempre um subespaço, a união raramente o é. O próximo exemplo ilustra esse fenômeno.

Exemplo 4.8.3. Considere os subespaços

$$S_1 = \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \} \quad \text{e} \quad S_2 = \{ (0, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. (Você deve se convencer que esses subconjuntos são, de fato, subespaços de $\mathbb{R}^2$.)

Mostremos que a união $S_1 \cup S_2$ *não é* um subespaço de $\mathbb{R}^2$. De fato, tomemos $u = (1, 0) \in S_1 \subseteq S_1 \cup S_2$ e $v = (0, 1) \in S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$. Se $S_1 \cup S_2$ fosse um subespaço de $\mathbb{R}^2$, deveríamos ter $u + v = (1, 1) \in S_1 \cup S_2$. Mas isso não ocorre pois os elementos da união têm primeira ou segunda coordenada nula. $\diamondsuit$

O que falta à união de subespaços para que ela resulte em um subespaço é precisamente a propriedade de ser fechada com respeito a somas. Esse requisito será alcançado com a próxima definição.

Definição. Seja V um espaço vetorial e sejam W_1 e W_2 subespaços de V. Definimos a *soma* de W_1 e W_2 como sendo o seguinte conjunto de V:

$$W_1 + W_2 = \{ w \in V \mid w = u_1 + u_2, \text{ para algum } u_1 \in W_1 \text{ e algum } u_2 \in W_2 \}.$$

A soma de subespaços é um subespaço:

Proposição 4.8.4. *Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Então, a soma $W_1 + W_2$ é um subespaço de V.*

Demonstração. O vetor nulo de V é um elemento da soma, uma vez que $0_V = 0_V + 0_V$, em que o primeiro termo é um elemento de W_1 (pois W_1 é um subespaço) e o segundo termo é um elemento de W_2 (pois W_2 é um subespaço).

Agora, tomemos $w, w' \in W_1 + W_2$. Então, existem $u_1, u_1' \in W_1$ e $u_2, u_2' \in W_2$ tais que

$$w = u_1 + u_2 \quad \text{e} \quad w' = u_1' + u_2'.$$

Logo, $w + w' = (u_1 + u_2) + (u_1' + u_2') = (u_1 + u_1') + (u_2 + u_2')$. Como W_1 e W_2 são subespaços de V, segue que $u_1 + u_1' \in W_1$ e $u_2 + u_2' \in W_2$. Portanto, conseguimos escrever $w + w'$ como soma de um elemento de W_1 com um elemento de W_2, isto é, $w + w' \in W_1 + W_2$.

Finalmente, se $w = u_1 + u_2 \in W_1 + W_2$, com $u_1 \in W_1$ e $u_2 \in W_2$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, segue que $\lambda w = \lambda(u_1 + u_2) = (\lambda u_1) + (\lambda u_2)$, que é um elemento da soma $W_1 + W_2$, uma vez que $\lambda u_1 \in W_1$ e $\lambda u_2 \in W_2$. $\square$

Veja que, no Exemplo 4.8.3, temos $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^2$.

Dados subespaços W_1 e W_2 de um espaço vetorial V, temos associados a eles dois novos subespaços: a interseção $W_1 \cap W_2$ e a soma $W_1 + W_2$. Sabemos que tanto W_1 quando W_2 contêm $W_1 \cap W_2$. Observe, agora, que ambos estão contidos em $W_1 + W_2$, já que qualquer elemento u_1 de W_1 pode se escrever na forma $u_1 = u_1 + 0_V \in W_1 + W_2$, e qualquer elemento u_2 de W_2 se escreve como $u_2 = 0_V + u_2 \in W_1 + W_2$. Assim, temos as seguintes cadeias de subespaços de V:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \subseteq W_1 + W_2 \qquad \text{e} \qquad W_1 \cap W_2 \subseteq W_2 \subseteq W_1 + W_2.$$

Daí, extrai-se que se V é um espaço vetorial de dimensão finita, então

$$\begin{aligned} \dim(W_1 \cap W_2) &\leq \min\big\{ \dim(W_1), \dim(W_2) \big\} \\ &\leq \max\big\{ \dim(W_1), \dim(W_2) \big\} \\ &\leq \dim(W_1 + W_2). \end{aligned}$$

Como a soma $W_1 + W_2$ contém tanto W_1 como W_2, temos $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Além disso, $W_1 + W_2$ é o menor subespaço de V que contém a união $W_1 \cup W_2$, no sentido de que se W é um subespaço de V tal que $W_1 \cup W_2 \subseteq W$, então $W_1 + W_2 \subseteq W$. (Você consegue escrever uma demonstração para esse fato?) Assim, podemos dizer que, em um certo sentido, a soma de subespaços "corrige" o fato de a união não ser um subespaço.

Para descrever a soma de subespaços em termos de conjuntos geradores deles, faremos uso do próximo resultado.

Proposição 4.8.5. *Seja V um espaço vetorial e sejam $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n \in V$. Considere os subespaços $W_1 = [u_1, \dots, u_m]$ e $W_2 = [v_1, \dots, v_n]$ de V. Então,*

$$W_1 + W_2 = \big[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\big].$$

Demonstração. Comecemos por mostrar que a soma $W_1 + W_2$ está contida em $[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n]$. Dado $w \in W_1 + W_2$, sabemos que existem $u \in W_1$ e $v \in W_2$ tais que $w = u + v$. Como $W_1 = [u_1, \dots, u_m]$ e $W_2 = [v_1, \dots, v_n]$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m \quad \text{e} \quad v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Então,

$$\begin{aligned} w &= u + v \\ &= \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \\ &\in \big[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\big]. \end{aligned}$$

Isso prova que $W_1 + W_2 \subseteq [u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n]$.

Mostremos,agora, a inclusão reversa. Seja $w \in [u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n]$. Então, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} w &= \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \\ &= (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) \\ &\in \big[u_1, \dots, u_m\big] + \big[v_1, \dots, v_n\big] = W_1 + W_2. \end{aligned}$$

Assim, $[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n] \subseteq W_1 + W_2$.

Das duas inclusões provadas segue a igualdade desejada. □

Um alerta: da proposição acima segue que a união de bases de dois subespaços é um conjunto gerador da soma deles. Mas, em geral, esse conjunto não será uma base da soma, pois não será LI, como se pode ver no próximo exemplo.

Exemplo 4.8.6. Considere os subespaços

$$W_1 = \big[(1,0,-1,0), (1,2,0,1), (1,0,1,1)\big]$$

e

$$W_2 = \big[(1,1,1,0), (1,0,0,-1)\big]$$

de $\mathbb{R}^4$. Descreva $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$, e calcule suas dimensões.

Solução. Vimos, na Proposição 4.8.5, que

$$W_1 + W_2 = \big[(1,0,-1,0), (1,2,0,1), (1,0,1,1), (1,1,1,0), (1,0,0,-1)\big].$$

Escrevendo as coordenadas, em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$, dos vetores geradores de $W_1 + W_2$ nas linhas de uma matriz e escalonando (como fizemos no Exemplo 4.7.3), obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Os vetores de $\mathbb{R}^4$ cujas coordenadas, na base canônica, são as linhas da matriz R geram o mesmo subespaço que os vetores cujas coordenadas são as linhas da matriz A (ou seja, o subespaço soma $W_1 + W_2$), já que aquela foi obtida a partir desta por meio de operações elementares sobre linhas. Como a última linha da matriz R contém as coordenadas do vetor nulo e esse vetor pode ser removido de qualquer conjunto gerador de um subespaço, podemos concluir que

$$W_1 + W_2 = \left[(1,0,-1,0),(0,1,2,0),(0,0,1,-1),(0,0,0,-2)\right].$$

Agora, os vetores nesse conjunto gerador são claramente LI (pois são linhas não nulas de uma matriz escalonada); assim, esse conjunto é uma base de $W_1 + W_2$ e, consequentemente, $\dim(W_1 + W_2) = 4$. Em particular, conclui-se que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

(Note que os conjuntos geradores de W_1 e W_2 no enunciado do exemplo, por serem, ambos, LI, são, de fato, bases de W_1 e W_2. Segue da discussão que fizemos acima, que a união desses dois conjuntos, apesar de gerar $W_1 + W_2$, não é uma base da soma, já que contém 5 vetores, mas $\dim(W_1 + W_2) = 4$. Aliás, não existem conjuntos LI em $\mathbb{R}^4$ contendo 5 vetores.)

Tratemos, agora, da interseção $W_1 \cap W_2$, como fizemos no Exemplo 4.8.2. Dado

$$v = a(1,0,-1,0) + b(1,2,0,1) + c(1,0,1,1) \in W_1,$$

com $a,b,c \in \mathbb{R}$, teremos $v \in W_2$ se, e somente se, existem $x,y \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = x(1,1,1,0) + y(1,0,0,-1),$$

ou seja, e somente se, o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = a + b + c \\ x = 2b \\ x = -a + c \\ -y = b + c \end{cases} \tag{4.18}$$

nas variáveis x,y tiver solução. Escalonando a matriz aumentada do sistema, obtemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a+b+c \\ 1 & 0 & 2b \\ 1 & 0 & -a+c \\ 0 & -1 & b+c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a+b+c \\ 0 & -1 & -a+b-c \\ 0 & -1 & -2a-b \\ 0 & -1 & b+c \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a+b+c \\ 0 & -1 & -a+b-c \\ 0 & 0 & -a-2b+c \\ 0 & 0 & a+2c \end{array}\right]$$

Assim, (4.18) tem solução se, e somente se, $\begin{cases} -a-2b+c=0 \\ a+2c=0 \end{cases}$, e estamos, novamente, diante de um sistema linear, desta vez, homogêneo. O escalonamento de sua matriz de coeficientes resulta em

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, c é uma variável livre e, resolvendo por retrossubstituição, obtemos $a = -2c$ e $b = \frac{3c}{2}$. A conclusão a que chegamos é que para (4.18) ter solução (o que, por sua vez, é a condição precisa para o vetor v ser, também, um elemento de W_2) é necessário e suficiente que, atribuindo-se valores arbitrários para c, tenhamos $a = -2c$ e $b = \frac{3c}{2}$. Isto quer dizer que os vetores em $W_1 \cap W_2$ são da forma

$$\begin{aligned} (-2c)(1,0,-1,0) + \frac{3c}{2}(1,2,0,1) + c(1,0,1,1) &= \left(\frac{c}{2}, 3c, 3c, \frac{5c}{2}\right) \\ &= c\left(\frac{1}{2}, 3, 3, \frac{5}{2}\right), \end{aligned}$$

com $c \in \mathbb{R}$. Portanto, $W_1 \cap W_2 = \left[\left(\frac{1}{2}, 3, 3, \frac{5}{2}\right)\right] = [(1,6,6,5)]$. Logo, uma base de $W_1 \cap W_2$ é $\{(1,6,6,5)\}$ e $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. $\Diamond$

Como veremos a seguir, o que impede, no exemplo acima, que a dimensão da soma $W_1 + W_2$ seja igual à soma das dimensões de W_1 e de W_2 é justamente a interseção ter dimensão positiva.

Teorema 4.8.7. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, e sejam W_1 e W_2 subespaços de V. Então,*

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_k\}$ uma base de $W_1 \cap W_2$. (Estamos admitindo, assim, que $\dim(W_1 \cap W_2) = k$.) Como $\mathcal{B}$ é um conjunto LI que está contido no subespaço W_1, pelo Teorema do completamento (Teorema 4.5.14), existe uma base de W_1 que contém $\mathcal{B}$, isto é, existem vetores $v_1, \dots, v_m \in W_1$ tais que $\mathcal{C}_1 = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m\}$ é uma base de W_1. Usando um raciocínio análogo, uma vez que $\mathcal{B}$ está contido também em W_2, garante-se que existem vetores $w_1, \dots, w_n \in W_2$ tais que $\mathcal{C}_2 = \{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_n\}$ é uma base de W_2. (Em particular, estamos admitindo que $\dim(W_1) = k + m$ e que $\dim(W_2) = k + n$.)

Considere, agora, o conjunto

$$\mathcal{D} = \{ u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \}.$$

Mostremos que $\mathcal{D}$ é uma base de $W_1 + W_2$.

- *$\mathcal{D}$ gera $W_1 + W_2$:* Vimos, na Proposição 4.8.5, que a união de conjuntos geradores de W_1 e W_2 geram $W_1 + W_2$. Em particular, $W_1 + W_2 = [\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2] = [u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n]$.

- *$\mathcal{D}$ é LI:* Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ tais que
$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \dots \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m& \\ + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n = 0_V.& \end{aligned} \tag{4.19}$$
Nosso objetivo é mostrar que, necessariamente, todos esses escalares são nulos. Seja $z = \alpha_1 u_1 + \dots \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m$. Como $\mathcal{C}_1$ gera W_1, segue que $z \in W_1$. Por outro lado, segue de (4.19) que $z = -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_n w_n$. Assim, porque $\mathcal{C}_2$ gera W_2, temos $z \in W_2$. Segue, portanto, que $z \in W_1 \cap W_2$. Logo, existem $\delta_1, \dots, \delta_k \in \mathbb{R}$ tais que $z = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_k u_k$, já que $W_1 \cap W_2$ é gerado por $\mathcal{B}$. Porém, isso implica que
$$-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_n w_n = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_k u_k,$$
o que é equivalente a
$$\delta_1 u_1 + \dots + \delta_k u_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n = 0_V.$$
Como $\mathcal{C}_2$ é LI, segue que $\delta_1 = \dots = \delta_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$. Em particular, já descobrimos que todos os γ_i devem ser nulos. Substituindo essa informação em (4.19), obtemos
$$\alpha_1 u_1 + \dots \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m = 0_V.$$
Como $\mathcal{C}_1$ é LI, $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$. Assim, todos os $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ são nulos, o que implica que $\mathcal{D}$ é, de fato, LI.

Vimos que $\mathcal{D}$ é um conjunto LI que gera $W_1 + W_2$ e contém $k + m + n$ vetores. Portanto,
$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2) &= k + m + n = (k + m) + (k + n) - k \\ &= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2), \end{aligned}$$
que é o que desejávamos mostrar. □

Retornando ao Exemplo 4.8.6, tínhamos $\dim(W_1) = 3$, $\dim(W_2) = 2$, e calculamos que $\dim(W_1 + W_2) = 4$. Usando a fórmula do Teorema 4.8.7, já poderíamos ter previsto que $\dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 2 - 4 = 1$, o que, de fato, se confirmou com o cálculo que efetuamos para encontrar uma base de $W_1 \cap W_2$.

Exemplo 4.8.8. (Prova 3, Álgebra Linear I, 2017) Assinale a alternativa que contém uma afirmação correta sobre os subespaços S_1 e S_2 de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ definidos abaixo:
$$S_1 = \left[t^2 - t,\, t - 1\right] \quad \text{e} \quad S_2 = \left\{\, p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p(1) = p(-1) = 0 \,\right\}.$$

(A) Se $p \in S_1 \cap S_2$ e p não é o polinômio nulo, então p tem grau igual a 2.

(B) S_1 coincide com $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(C) A interseção $S_1 \cap S_2$ contém $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ como subespaço.

(D) S_1 está contido em S_2.

(E) A soma $S_1 + S_2$ coincide com $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

Solução. Vamos começar por determinar as dimensões de S_1 e S_2. Trabalharemos em coordenadas em relação à base ordenada $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. Sobre os geradores de S_1, sabemos:

$$t^2 - t = (0, -1, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad t - 1 = (-1, 1, 0, 0, 0)_{\mathcal{B}}.$$

Como esses dois vetores claramente formam um conjunto LI, segue que $\dim(S_1) = 2$. Procuremos geradores de S_2. Dado $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, teremos $p \in S_2$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \text{ e} \\ 0 &= p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4. \end{aligned}$$

Assim, para que p seja um elemento de S_2 é necessário e suficiente que seus coeficientes sejam solução do sistema linear homogêneo de matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, que, submetida ao processo de escalonamento, fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daí, segue que a_2, a_3, a_4 são variáveis livres e $a_1 = -a_3$ e $a_0 = -a_2 - a_4$. Assim, os elementos de S_2 são da forma

$$\begin{aligned} &(-a_2 - a_4) + (-a_3)t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 \\ &\qquad = a_2(-1 + t^2) + a_3(-t + t^3) + a_4(-1 + t^4), \end{aligned}$$

com $a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Logo, $S_2 = \left[-1 + t^2, -t + t^3, -1 + t^4\right]$, ou, em coordenadas,

$$S_2 = \left[\,(-1, 0, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}}, (0, -1, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}}, (-1, 0, 0, 0, 1)_{\mathcal{B}}\,\right].$$

Sendo, evidentemente, LI, o conjunto formado por esses três vetores geradores de S_2 é uma base de S_2 e, assim, $\dim(S_2) = 3$.

Agora, sabemos que $S_1 + S_2$ é gerado pelo conjunto de cinco vetores obtido unindo-se a base de S_1 com a base de S_2 que encontramos, ou seja,

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 = \big[\,&(0, -1, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}},\ (-1, 1, 0, 0, 0)_{\mathcal{B}},\ (-1, 0, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}}, \\ &(0, -1, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}},\ (-1, 0, 0, 0, 1)_{\mathcal{B}}\,\big]. \end{aligned}$$

Para encontrar uma base (e a dimensão de $S_1 + S_2$), escalonamos a matriz cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos geradores de $S_1 + S_2$ (ver Observação na página 133):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz escalonada obtida ao final desse processo tem 4 pivôs, segue que $\dim(S_1 + S_2) = 4$ (e que as linhas não nulas dessa matriz são as coordenadas de vetores em uma base de $S_1 + S_2$.) Do Teorema 4.8.7, extraímos $\dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 + S_2) = 2 + 3 - 4 = 1$.

Com essas informações, já é possível ver que as alternativas (B), (C), (D) e (E) são todas falsas: $\dim(S_1) = 2$ e $\dim\big(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\big) = 3$, portanto $S_1 \neq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$; $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$ e $\dim\big(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\big) = 2$, logo $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \nsubseteq S_1 \cap S_2$; se $S_1 \subseteq S_2$, teríamos $S_1 + S_2 = S_2$, mas esses espaços têm dimensões diferentes; $\dim(S_1 + S_2) = 4$ e $\dim\big(\mathcal{P}_4(\mathbb{R})\big) = 5$, portanto, $S_1 + S_2 \neq \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

Resta provar que (A) é, de fato, verdadeira. Sabemos que $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$. Procuremos uma base para esse subespaço. Dado $p \in S_1$, sabemos que p se escreve na forma $p(t) = a(t^2 - t) + b(t - 1) = -b + (-a + b)t + at^2$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Vamos impor as condições para que p seja, também, um elemento de S_2:

$$\begin{aligned} 0 &= p(1) = -b + (-a + b) + a \\ 0 &= p(-1) = -b - (a - b) + a = 2a - 2b \end{aligned}$$

A primeira equação não fornece informação nova, mas a segunda, sim: $b = a$, ou seja, os elementos de $S_1 \cap S_2$ são da forma

$$a(t^2 - t) + a(t - 1) = a(-1 + t^2), \text{ com } a \in \mathbb{R}.$$

Logo, $S_1 \cap S_2 = \big[-1 + t^2\big]$. E, com efeito, todo polinômio não nulo em $S_1 \cap S_2$ tem grau 2. *Resposta:* (A). $\Diamond$

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 39–49.

4.9 Soma direta de subespaços

A dimensão da soma de subespaços coincide com a soma das dimensões deles precisamente quando a interseção for nula. Esse fato segue diretamente do Teorema 4.8.7 e merece uma nomenclatura própria.

Definição. Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, dizemos que a soma $W_1 + W_2$ é *direta*. A notação, neste caso, para a soma dos subespaços W_1 e W_2 é $W_1 \oplus W_2$.

Exemplo 4.9.1. A soma dos subespaços

$$W_1 = \{ (x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R} \} \quad \text{e} \quad W_2 = \{ (0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \}$$

de $\mathbb{R}^3$ é direta, pois, claramente, $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}$. Em particular, $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 1 + 2 - 0 = 3$. Portanto, $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$. $\Diamond$

Proposição 4.9.2. *Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial de dimensão finita V. Então, a soma de W_1 e W_2 é direta se, e somente se,* $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

Demonstração. A soma $W_1 + W_2$ é direta, por definição, se, e somente se, $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, o que, por sua vez, é equivalente a $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$. Mas, pelo Teorema 4.8.7, isso ocorre precisamente quando $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$. $\square$

Exemplo 4.9.3. Retomando o Exemplo 4.8.2, em que consideramos os subespaços

$$W_1 = \big[(0, -1, 2), (2, -1, -1)\big] \quad \text{e} \quad W_2 = \big[(1, -1, 1), (1, 1, 0)\big]$$

de $\mathbb{R}^3$, podemos afirmar que a soma $W_1 + W_2$ não é direta, uma vez que $W_1 \cap W_2 = [(6, -8, 7)] \neq \{(0, 0, 0)\}$. Utilizando o critério visto na Proposição 4.9.2, poderíamos ter argumentado simplesmente que a soma não é direta porque $\dim(W_1) + \dim(W_2) = 2 + 2 = 4 \neq \dim(W_1 + W_2)$, uma vez que todos os subespaços de $\mathbb{R}^3$ têm dimensão limitada superiormente por $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, em particular, $W_1 + W_2$. Agora, como $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, segue que $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Assim, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, já que a soma $W_1 + W_2$ é um subespaço de dimensão 3 de um espaç de dimensão 3. (Veja a Proposição 4.7.1.) Isso quer dizer que todo vetor de $\mathbb{R}^3$ se escreve como uma soma de um vetor de W_1 com um vetor de W_2. Por exemplo, tome o vetor $(-3, 2, 7) \in \mathbb{R}^3$; esse vetor pode ser decomposto como uma soma

$$(-3, 2, 7) = (-4, -1, 8) + (1, 3, -1),$$

com
$$(-4,-1,8) = 3(0,-1,2) + (-2)(2,-1,-1) \in W_1$$
e
$$(1,3,-1) = (-1)(1,-1,1) + 2(1,1,0) \in W_2.$$
Porém, essa decomposição não é única, por exemplo, também é possível escrever
$$(-3,2,7) = (-16,15,-6) + (13,-13,13),$$
em que
$$(-16,15,-6) = (-7)(0,-1,2) + (-8)(2,-1,-1) \in W_1$$
e
$$(13,-13,13) = 13(1,-1,1) + 0(1,1,0) \in W_2.$$
A não unicidade da decomposição é consequência do fato de a soma $W_1 + W_2$ não ser direta, como veremos a seguir.[2] $\diamondsuit$

Proposição 4.9.4. *Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Então, a soma $W_1 + W_2$ é direta se, e somente se, todo vetor de $W_1 + W_2$ se escrever de maneira única na forma $u_1 + u_2$, com $u_1 \in W_1$ e $u_2 \in W_2$.*

Demonstração. Suponha que a soma $W_1 + W_2$ seja direta e tome $v \in W_1 + W_2$. Se
$$v = u_1 + u_2 \quad \text{e} \quad v = u_1' + u_2',$$
com $u_1, u_1' \in W_1$ e $u_2, u_2' \in W_2$, então teremos $u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$, o que implica $u_1 - u_1' = u_2' - u_2$, que é um vetor de $W_1 \cap W_2$ (uma vez que o lado esquerdo está em W_1, o direito em W_2 e eles são iguais). Mas, como a soma é direta, $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Portanto, $u_1 - u_1' = 0_V$ e $u_2' - u_2 = 0_V$. Portanto $u_1 = u_1'$ e $u_2 = u_2'$.

Reciprocamente, suponha que os vetores de $W_1 + W_2$ se decomponham de maneira única como soma de um vetor de W_1 com um vetor de W_2. Então, se $u \in W_1 \cap W_2$, temos a decomposição $u = u + 0_V$, com $u \in W_1$ e $0_V \in W_2$ e a decomposição $u = 0_V + u$, com $0_V \in W_1$ e $u \in W_2$. Da unicidade, segue que $u = 0_V$. Ou seja, o único vetor em $W_1 \cap W_2$ é o vetor nulo de V. Logo, a soma é direta. $\square$

A proposição que acabamos de demonstrar será especialmente útil, no próximo capítulo, quando estivermos tratando de projeções ortogonais.

[2] A título de curiosidade, todo vetor de $\mathbb{R}^3$ tem infinitas decomposições distintas. Vale em geral que
$$\begin{aligned}(a,b,c) = \big(&(-2a-3b-c+5t)(0,-1,2) + (-a-2b-c+3t)(2,-1,-1)\big)\\ &+ \big((3a+4b+2c-7t)(1,-1,1) + t(1,1,0)\big),\end{aligned}$$
para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Você consegue imaginar como essa expressão foi obtida?

Exemplo 4.9.5. Mostre que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$, em que S e T são os subespaços de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - z = 0 \}$$

e

$$T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0 \text{ e } -x + y + 3z = 0 \}.$$

Além disso, dado $v \in \mathbb{R}^3$, encontre $v_1 \in S$ e $v_2 \in T$ tais que $v = v_1 + v_2$.

Solução. Comecemos por mostrar que a soma $S + T$ é direta. Dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, teremos $v \in S \cap T$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

Como $\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 8 \neq 0$, segue que a única solução de (4.20) é $(0, 0, 0)$. Logo, $S \cap T = \{(0, 0, 0)\}$ e, portanto, a soma $S + T$ é direta. Utilizando as ideias da Seção 4.7, podemos encontrar

$$S = \big[(2, 1, 0), (1, 0, 1)\big] \quad \text{e} \quad T = \big[(-3, -6, 1)\big].$$

Segue que $\dim(S) = 2$ e $\dim(T) = 1$. Assim, $\dim(S \oplus T) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Logo, $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$.

Agora, dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, queremos encontrar $v_1 \in S$ e $v_2 \in T$ tais que $v = v_1 + v_2$. Como $v_1 \in S_1$, precisamos determinar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $v_1 = \alpha(2, 1, 0) + \beta(1, 0, 1)$. Analogamente, como $v_2 \in S_2$, precisamos determinar $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $v_2 = \gamma(-3, -6, 1)$. Resumindo, é preciso encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, y, z) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(-3, -6, 1),$$

ou, equivalentemente, tais que

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 3\gamma = x \\ \alpha - 6\gamma = y \\ \beta + \gamma = z \end{cases}$$

resolvendo esse sistema (possível determinado), obtemos

$$\alpha = \frac{3x - 2y - 3z}{4}, \quad \beta = \frac{-x + 2y + 9z}{8}, \quad \gamma = \frac{x - 2y - z}{8}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{3x-2y-3z}{4}(2,1,0) + \frac{-x+2y+9z}{8}(1,0,1) \\ &= \left(\frac{11x-6y-3z}{8}, \frac{3x-2y-3z}{4}, \frac{-x+2y+9z}{8}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{x-2y-z}{8}(-3,-6,1) \\ &= \left(\frac{-3x+6y+3z}{8}, \frac{-3x+6y+3z}{4}, \frac{x-2y-z}{8}\right). \end{aligned}$$

Note que, conforme esperado, v_1 e v_2 estão univocamente determinados por v. $\Diamond$

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 50–51.

5

Espaços vetoriais com produto interno

Na Seção 2.4, vimos que o espaço vetorial $\mathbb{V}^3$, dos vetores tridimensionais, está dotado de uma operação, à época denominada produto escalar, que permite dar um tratamento geométrico, por meio do conceito de ângulo, a algumas relações entre vetores.

Neste capítulo, apresentaremos, de modo axiomático, o conceito de produto interno em um espaço vetorial, que generaliza o de produto escalar de $\mathbb{V}^3$, e exploraremos várias de suas propriedades.

5.1 Produto interno

A Proposição 2.4.2 apresentava propriedades algébricas do produto escalar em $\mathbb{V}^3$. Muitos dos resultados obtidos a respeito da geometria de $\mathbb{V}^3$ eram consequência daquela proposição.

Aqui faremos uma alteração de ponto de vista e consideraremos, em um espaço vetorial abstrato, uma operação, a ser chamada de produto interno, por intermédio das propriedades que se deseja que ela tenha, a fim de que argumentos de natureza geométrica possam ser feitos nesse contexto mais geral.

Definição. Um *produto interno* em um espaço vetorial V é uma função

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \langle u, v \rangle \end{array}$$

que satisfaz

(1) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$, para todos $u_1, u_2, v \in V$;

(2) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, para todos $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;

(3) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, para todos $u, v \in V$;

(4) para todo $u \in V$, $u \neq 0_V$, vale $\langle u, u \rangle > 0$.

Ou seja, um produto interno em um espaço vetorial V é um modo de se atribuir a um par de vetores (u, v) de V um número real, denotado $\langle u, v \rangle$. Exige-se que essa atribuição satisfaça as condições (1)–(4). Veremos que essas quatro condição são suficientes para que a presença de um produto interno em um espaço vetorial permita que muitos dos resultados vistos no Capítulo 2 possam ser generalizados para o contexto de espaços vetoriais abstratos.

Como já mencionamos, no início da seção, o produto escalar em $\mathbb{V}^3$ é um produto interno. Isso segue do fato que as condições (1)–(4) estão todas satisfeitas em $\mathbb{V}^3$ tomando-se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v}$, como verificamos na Proposição 2.4.2.

Vejamos outros exemplos.

Exemplo 5.1.1. A função definida por

$$\big\langle (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \big\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

é um produto interno no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Que as condições (1)–(3) na definição de produto interno estão satisfeitas segue imediatamente da definição das operações de soma e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^n$. A condição (4) é consequência do fato de uma soma de quadrados de números reais ser sempre um número positivo se pelo menos um de seu termos for não nulo. Essa operação será doravante denominada *produto interno usual* de $\mathbb{R}^n$. $\diamondsuit$

Exemplo 5.1.2. Além do produto interno usual, existem outros produtos internos em $\mathbb{R}^2$. Por exemplo,

$$\big\langle (a, b), (c, d) \big\rangle = 2ac + bd$$

também define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, como o leitor pode facilmente verificar. (Veja o Exercício 53 da Lista 1 - Álgebra Linear II (2020) para ainda mais um exemplo de produto interno em $\mathbb{R}^2$.) $\diamondsuit$

Exemplo 5.1.3. Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, dos polinômios de grau menor ou igual a n, e a função definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt, \tag{5.1}$$

para todos $f, g \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Mostre que essa função é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Solução. Vale iniciar notando que, de fato, essa função está bem definida, uma vez que para todos $f, g \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, o produto fg é uma função contínua em $[0, 1]$ e, portanto, integrável nesse intervalo.

As condições (1) e (2) são propriedades da integração:

$$\begin{aligned}\langle f + g, h\rangle &= \int_0^1 \big(f(t) + g(t)\big)h(t)\, dt = \int_0^1 \big(f(t)h(t) + g(t)h(t)\big)\, dt \\ &= \int_0^1 f(t)h(t)\, dt + \int_0^1 g(t)h(t)\, dt = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle,\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $f, g, h \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, e

$$\langle \lambda f, g\rangle = \int_0^1 \lambda f(t)g(t)\, dt = \lambda \int_0^1 f(t)g(t)\, dt = \lambda \langle f, g\rangle,$$

para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. A condição (3) é óbvia. Resta (4); vejamos. Comecemos por lembrar que o vetor nulo de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é o polinômio nulo. Assim, se $f \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $f \neq 0_{\mathcal{P}_n(\mathbb{R})}$, existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que[1] $f(t_0) \neq 0$, o que implica que $f(t_0)^2 > 0$. Como f é uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, existem $c, d \in \mathbb{R}$ com $0 \leq c < d \leq 1$ tais que $f(t)^2 > 0$, para todo $t \in (c, d)$, enquanto $f(t)^2 \geq 0$ para todo $t \in [0, c] \cup [d, 1]$. Portanto,

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 f(t)^2\, dt = \int_0^c f(t)^2\, dt + \int_c^d f(t)^2\, dt + \int_d^1 f(t)^2\, dt > 0,$$

já que $\int_c^d f(t)^2\, dt > 0$ e os outros dois termos na soma acima não são negativos. $\diamondsuit$

O argumento utilizado acima também prova que (5.1) define um produto interno no espaço $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de todos os polinômios, sem limitação no grau. Ainda, não há nada de especial na escolha dos extremos de integração: para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$,

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt \tag{5.2}$$

define um produto interno em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Mais geralmente, a expressão (5.2) define um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}([a, b])$ de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $[a, b]$. (Mas não é um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Por quê?)

Há outro produto interno comumente utilizado em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, que é uma versão discreta do produto interno definido no exemplo anterior.:

---

[1] Um polinômio não nulo de grau no máximo n tem no máximo n raízes. Como o intervalo $[0, 1]$ é infinito, algum elemento nesse intervalo certamente não é raiz do polinômio.

Exemplo 5.1.4. Seja n um inteiro positivo. Fixe m números reais distintos $a_1, a_2, \dots, a_m$, com $m > n$. Dados $f, g \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, defina

$$\langle f, g \rangle = f(a_1)g(a_1) + f(a_2)g(a_2) + \cdots + f(a_m)g(a_m).$$

Fica a cargo do leitor verificar que as condições (1)–(3) estão satisfeitas (para elas, a hipótese $m > n$ não é necessária). Para a condição (4), suponha que $f \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ seja tal que $\langle f, f \rangle = 0$. Então,

$$f(a_1)^2 + f(a_2)^2 + \cdots + f(a_m)^2 = \langle f, f \rangle = 0.$$

Logo, $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_m) = 0$. Como f tem grau menor ou igual a n, se não for nulo, f terá no máximo n raízes distintas. Como os a_i são distintos entre si e $m > n$, segue que f tem que ser o polinômio nulo.[2] Assim, se f não for o polinômio nulo, pelo menos um dos termos $f(a_i)^2$ é estritamente positivo e, portanto, $\langle f, f \rangle > 0$. $\Diamond$

As propriedades listadas a seguir são consequências imediatas da definição.

Proposição 5.1.5. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Então,*

(i) $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$, *para todos* $u, v_1, v_2 \in V$;

(ii) $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, *para todos* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$;

(iii) $\langle u, 0_V \rangle = 0$, *para todo* $u \in V$;

(iv) *para todo* $u \in V$, $\langle u, u \rangle = 0$ *se, e somente se,* $u = 0_V$.

Demonstração. A propriedade (i) segue das condições (1) e (3) na definição de produto interno, e a (ii), das condições (2) e (3). Provemos (iii). De (i), que acabamos de demonstrar, sabemos que

$$\langle u, 0_V \rangle = \langle u, 0_V + 0_V \rangle = \langle u, 0_V \rangle + \langle u, 0_V \rangle.$$

Assim $a = \langle u, 0_V \rangle$ é um número real que satisfaz $a = 2a$. Logo, $a = 0$. Finalmente, para (iv), já sabemos, da condição (4), que se $u \neq 0_V$, então $\langle u, u \rangle \neq 0$. Reciprocamente, se $u = 0_V$, então $\langle u, u \rangle = \langle 0_V, 0_V \rangle = 0$, por (iii). $\square$

[2] A título de ilustração do argumento, considere o polinômio $p(t) = t^2 - 3t + 2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Se tomarmos apenas dois pontos, por exemplo, $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$, teremos $\langle p, p \rangle = p(1)^2 + p(2)^2 = 0$, ao passo que p não é o polinômio nulo.

Norma e distância. Continuando com a analogia que estabelecemos entre o produto escalar e o produto interno, definiremos norma e distância, em um espaço vetorial abstrato, em termos de um produto interno.

Definição. Seja V um espaço vetorial munido do produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Dado $u \in V$, definimos a *norma* de u por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Dados $u, v \in V$, definimos a *distância* entre u e v por

$$\operatorname{dist}(u, v) = \|u - v\|.$$

(Observe que, em vista da condição (4), a norma de um vetor está sempre definida. Além disso, a função dist satisfaz as condições esperadas de uma função distância.[3])

Exemplo 5.1.6. No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual (cf. Exemplo 5.1.1), dados $u = (a_1, a_2, \dots, a_n), v = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\|u\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

e

$$\operatorname{dist}(u, v) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

A norma e distância assim definidas em $\mathbb{R}^n$ costumam ser denominadas *euclidianas*. ◊

Observação. Não é demais enfatizar que norma e distância são conceitos relativos ao produto interno. Assim, por exemplo, se tomarmos em $\mathbb{R}^2$ os seguintes dois produtos internos

$$\big\langle (a,b), (c,d) \big\rangle_1 = ac + bd \qquad \text{e} \qquad \big\langle (a,b), (c,d) \big\rangle_2 = 2ac + bd,$$

teremos definidas em $\mathbb{R}^2$ duas normas (e, portanto, duas distâncias). Por exemplo,

$$\|(1,1)\|_1 = \sqrt{\big\langle (1,1), (1,1) \big\rangle_1} = \sqrt{2},$$

[3] Dado um conjunto X, chama-se distância ou métrica em X uma função d que associa a pares de elementos de X um número real satisfazendo

(i) $d(x, y) \geq 0$, para todos $x, y \in X$;
(ii) para todos $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
(iii) $d(x, y) = \operatorname{dist}(y, x)$, para todos $x, y \in X$;
(iv) $d(x, z) \leq \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}(y, z)$, para todos $x, y, z \in X$.

Essa última condição, no caso da função distância definida em termos da norma, em um espaço vetorial munido de um produto interno, é consequência do Corolário 5.1.12, que veremos adiante.

ao passo que
$$\|(1,1)\|_2 = \sqrt{\big\langle (1,1),(1,1)\big\rangle_2} = \sqrt{3},$$
diferentes, portanto. $\diamondsuit$

Algumas propriedades imediatas da norma estão enunciadas na próxima proposição.

Proposição 5.1.7. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno, e sejam $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem:*

(i) *se $u \neq 0_V$, então $\|u\| > 0$;*

(ii) *$\|u\| = 0$ se, e somente se, $u = 0_V$;*

(iii) *$\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$.*

Demonstração. Da condição (4) na definição de produto interno, segue que se $u \neq 0_V$, então $\langle u,u\rangle > 0$ e, portanto, $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} > 0$, provando (i). A equivalência em (ii) segue da Proposição 5.1.5 (iv). Para (iii), temos $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle u,u\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle u,u\rangle} = |\lambda|\,\|u\|$, em que a segunda igualdade segue da condição (2) na definição de produto interno e da Proposição 5.1.5 (ii). $\square$

Exemplo 5.1.8. Considere o produto interno definido por
$$\langle f,g\rangle = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,dt$$
no espaço vetorial $\mathcal{C}([0,\pi])$ e os vetores $u,v \in \mathcal{C}([0,\pi])$ dados por
$$u(t) = \cos(t), \quad v(t) = \operatorname{sen}(t).$$
Encontre $\|u\|$ e $\langle u,v\rangle$.

Solução. Por definição,
$$\begin{aligned}\|u\|^2 = \langle u,u\rangle = \int_0^{\pi} \cos^2(t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \big(1+\cos(2t)\big)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$
Portanto, $\|u\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Similarmente,
$$\langle u,v\rangle = \int_0^{\pi} \cos(t)\operatorname{sen}(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(2t)}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi},$$
que é 0. Ou seja, $\langle u,v\rangle = 0$. $\diamondsuit$

Quando estudamos o espaço vetorial $\mathbb{V}^3$ dos vetores tridimensionais, vimos que dois vetores eram ortogonais exatamente quando o produto escalar entre eles era igual a 0. Isso motiva nossa próxima definição.

Definição. Diremos que dois vetores u e v de um espaço vetorial munido do produto interno $\langle \, , \rangle$ são *ortogonais* se $\langle u, v\rangle = 0$, e, neste caso, usamos a notação $u \perp v$.

Vimos que em $\mathcal{C}([0,\pi])$, usando o produto interno definido no Exemplo 5.1.8, temos $\cos(t) \perp \operatorname{sen}(t)$.

Observação. Assim como norma e distância, ortogonalidade também é um conceito relativo ao produto interno. Assim, dois vetores de um espaço vetorial podem ser ortogonais com relação a um produto interno e deixarem de ser com relação a outro.

Por exemplo, considere os seguintes dois produtos internos definidos em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\langle p, q\rangle_1 = \int_0^1 p(t)q(t)\, dt \qquad \text{e} \qquad \langle p, q\rangle_2 = \int_{-1}^1 p(t)q(t)\, dt.$$

Se tomarmos os vetores $f(t) = t$ e $g(t) = t^2$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, então f e g não são ortogonais com relação a $\langle \, , \rangle_1$, pois

$$\langle f, g\rangle_1 = \int_0^1 t^3\, dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4} \neq 0;$$

mas, como

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_{-1}^1 t^3\, dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^1 = 0,$$

f e g são ortogonais com relação a $\langle \, , \rangle_2$. $\Diamond$

O conceito de ortogonalidade entre vetores em um espaço vetorial munido de um produto interno permite que obtenhamos, no contexto abstrato, versões de alguns resultados válidos conhecidos da geometria euclidiana, como por exemplo, a seguinte forma do teorema de Pitágoras.

Proposição 5.1.9. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e sejam $u, v \in V$ vetores ortogonais. Então,*

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Demonstração. Pela definição de norma de um vetor em V, temos

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

O resultado segue da hipótese $\langle u, v\rangle = 0$. $\square$

Há outros resultados que eram válidos em $\mathbb{V}^3$ e que têm versões análogas no contexto geral. Por exemplo, sabemos que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos de $\mathbb{V}^3$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\| \|v\| \cos(\theta)$, em que θ denota a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|u\| \|v\| |\cos(\theta)|$. Como $|\cos(\theta)| \leq 1$, segue $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|u\| \|v\|$. Esse fato continua valendo para espaços vetoriais arbitrários.

Teorema 5.1.10. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Então, para todos $u, v \in V$, vale*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\|. \tag{5.3}$$

Além disso, em (5.3)*, vale a igualdade se, e somente se, $\{u, v\}$ é LD.*

A desigualdade (5.3) é conhecida como *desigualdade de Cauchy-Schwarz* .

Demonstração. Se $v = 0_V$, então $\langle u, v\rangle = 0$ e $\|v\| = 0$. Portanto, neste caso, a desigualdade vale trivialmente (ela é, na realidade, uma igualdade). Suponha, então, que $v \neq 0_V$ e considere o vetor

$$w = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v.$$

Então, $u - w$ e w são ortogonais, pois

$$\begin{aligned}\langle u - w, w\rangle &= \langle u, w\rangle - \langle w, w\rangle \\ &= \left\langle u, \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v \right\rangle - \left\| \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v \right\|^2 \\ &= \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} \langle u, v\rangle - \left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} \right)^2 \|v\|^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como $u = (u - w) + w$, segue, da Proposição 5.1.9, que

$$\|u\|^2 = \|u - w\|^2 + \|w\|^2 \geq \|w\|^2,$$

e, portanto,

$$\|w\| \leq \|u\|. \tag{5.4}$$

Mas,

$$\|w\| = \left\| \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v \right\| = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|^2} \|v\| = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|},$$

o que, em vista de (5.4), fornece (5.3).

Para verificarmos a última afirmação no enunciado, comecemos por lembrar que já vimos que se $v = 0_V$, então vale a igualdade. Se $v \neq 0_V$, mas $\{u, v\}$ é LD, então $u = \lambda v$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e, neste caso,

$$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda| \|v\|^2 = \|\lambda v\| \|v\| = \|u\| \|v\|.$$

Reciprocamente, suponha que $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\,\|v\|$. Mostremos que $\{u,v\}$ é LD. Considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} \|u\|^2 & \langle u,v\rangle \\ \langle u,v\rangle & \|v\|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

nas incógnitas x e y. Como

$$\det \begin{bmatrix} \|u\|^2 & \langle u,v\rangle \\ \langle u,v\rangle & \|v\|^2 \end{bmatrix} = \|u\|^2\,\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2 = 0,$$

segue do Teorema 1.3.8 que (5.5) é indeterminado e, portanto, tem uma solução não trivial (α,β), isto é, uma em que α e β não são simultaneamente nulos. Agora,

$$\begin{aligned}
\|\alpha u + \beta v\|^2 &= \langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v\rangle \\
&= \alpha\big(\|u\|^2\alpha + \langle u,v\rangle\beta\big) + \beta\big(\langle u,v\rangle\alpha + \|v\|^2\beta\big) \\
&= \alpha 0 + \beta 0 \qquad \text{(pois } (\alpha,\beta) \text{ é solução de (5.5))} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o que implica $\alpha u + \beta v = 0_V$; ou seja, o vetor nulo pode ser expresso como uma combinação linear de u e v em que nem todos os coeficientes são nulos. Logo, $\{u,v\}$ é LD. □

Na demonstração da desigualdade de Cauchy-Schwarz que vimos acima, foi introduzimos um vetor auxiliar, $w = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v$, que terá um papel relevante nas próximas seções. Esse vetor será denominado projeção ortogonal de u sobre v (seguindo, portanto, a nomenclatura utilizada no estudo da projeção ortogonal no espaço $\mathbb{V}^3$).

Exemplo 5.1.11. Escreva, no contexto do Exemplo 5.1.8, como fica a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Solução. Segundo o Teorema 5.1.10, considerando o produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}([0,\pi])$ definido no Exemplo 5.1.8, vale

$$\left|\int_0^\pi f(t)g(t)\,dt\right| \leq \left(\int_0^\pi f(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\pi g(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

quaiquer que sejam $f,g \in \mathcal{C}([0,\pi])$. ♢

Uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz é o seguinte resultado.

Corolário 5.1.12. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Então,*

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|, \tag{5.6}$$

para todos $u, v \in V$.

Chama-se (5.6) de *desigualdade triangular* (pois ela evoca o fato de que a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo sempre excede o comprimento do terceiro).

Demonstração. Dados $u, v \in V$, temos

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle \\
&= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 \quad \text{(pelo Teorema 5.1.10)} \\
&= \big(\|u\| + \|v\|\big)^2,
\end{aligned}$$

o que implica a desigualdade desejada. □

Esse corolário tem a seguinte consequência. Se dist denota a função distância definida em termos da norma de um espaço vetorial V munido de um produto interno, conforme a definição na página 161, então

$$\operatorname{dist}(u, w) \leq \operatorname{dist}(u, v) + \operatorname{dist}(v, w),$$

para todos $u, v, w \in V$. Isso, pois, escrevendo $u - w = (u - v) + (v - w)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(u, w) &= \|u - w\| \\
&= \|(u - v) + (v - w)\| \\
&\leq \|u - v\| + \|v - w\| \\
&= \operatorname{dist}(u, v) + \operatorname{dist}(v, w).
\end{aligned}$$

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 52–56.

5.2 Bases ortonormais

Nesta seção, trataremos da tarefa de, dado um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, encontrar uma base que seja formada por vetores unitários, isto é, de norma 1, que sejam dois a dois ortogonais entre si. Tais bases, como veremos abaixo, são especialmente convenientes para introdução de coordenadas.

Definição. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e seja $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base de V. Dizemos que $\mathcal{B}$ é *ortogonal* se $u_i \perp u_j$, para todos $i \neq j$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é *ortonormal* se for ortogonal e, adicionalmente, $\|u_i\| = 1$, para todos $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 5.2.1. A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é ortonormal com relação ao produto interno usual. ◊

Exemplo 5.2.2. A função $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^t A)$ define um produto interno no espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, em que $\operatorname{tr}(X)$ denota o *traço* da matriz X, isto é, a soma dos elementos em sua diagonal principal, e X^t denota a matriz transposta da matriz X. (Veja o exercício 73 da Lista 1 - Álgebra Linear II (2020).) Explicitamente,

$$\left\langle \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

A base canônica $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$ é ortonormal com relação a esse produto interno, como é rotineiro verificar. Este exemplo se generaliza de maneira óbvia para espaços de matrizes de tamanho superior. $\diamondsuit$

Exemplo 5.2.3. A base canônica $\{1, t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ não é ortogonal (e, portanto, também não é ortonormal) com relação ao produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$, pois, conforme vimos, $t \not\perp t^2$. $\diamondsuit$

Coordenadas de vetores em relação a bases ortonormais são particularmente convenientes, um fenômeno já encontrado no estudo do espaço vetorial $\mathbb{V}^3$. (Veja a Proposição 2.4.1.)

Proposição 5.2.4. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal ordenada de V. Então,*

(i) *para todo $u \in V$,*

$$u = \big(\langle u, e_1\rangle, \langle u, e_2\rangle, \dots, \langle u, e_n\rangle \big)_{\mathcal{B}};$$

(ii) *dados $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}, w = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)_{\mathcal{B}} \in V$, valem:*

$$\langle v, w\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

e

$$\|v\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}.$$

Demonstração. Dado $u \in V$, sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}.$$

Mostremos que $\lambda_i = \langle u, e_i\rangle$, para todo $i = 1, \dots, n$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle u, e_i\rangle &= \langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, e_i\rangle \\ &= \lambda_1 \langle e_1, e_i\rangle + \lambda_2 \langle e_2, e_i\rangle + \cdots + \lambda_n \langle e_n, e_i\rangle \\ &= \lambda_i \|e_i\|^2, \end{aligned}$$

pois $\mathcal{B}$ é ortogonal. Como, adicionalmente, $\|e_i\| = 1$, segue que $\lambda_i = \langle u, e_i \rangle$, provando (i).

Vejamos (ii):

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle &= \langle \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n, \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n \rangle \\ &= \alpha_1\beta_1 \|e_1\|^2 + \alpha_2\beta_2 \|e_2\|^2 + \cdots + \alpha_n\beta_n \|e_n\|^2 \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n,\end{aligned}$$

uma vez que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$, e $\|e_i\| = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$. A afirmação sobre a norma de v é um caso particular. □

Observação. O trabalho para encontrar uma base ortonormal de um espaço vetorial V munido de um produto interno concentra-se na determinação de uma base ortogonal $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V, uma vez que, de posse de tal base, o conjunto

$$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$$

será uma base ortonormal de V.

A primeira (e mais trabalhosa) etapa desse processo será nosso próximo objeto de estudo. ◊

Vejamos um exemplo de aplicação da Proposição 5.2.4.

Exemplo 5.2.5. O conjunto $\{(0,0,1), (1,-1,0), (1,1,0)\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ com relação ao produto interno usual. Segue, da observação acima, que

$$\mathcal{B} = \left\{ (0,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $v = (-7,2,3)$ em relação à base $\mathcal{B}$.

Solução. Como $\mathcal{B}$ é ortonormal, podemos aplicar a Proposição 5.2.4(i):

$$\begin{gathered}\langle (-7,2,3), (0,0,1) \rangle = 3 \\ \left\langle (-7,2,3), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\rangle = -\frac{9}{\sqrt{2}} \\ \left\langle (-7,2,3), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\rangle = -\frac{5}{\sqrt{2}}\end{gathered}$$

Assim,

$$\left(3, -\frac{9}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right).$$

são as coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}$, ou, escrevendo mais compactamente, $v = \left(3, -\frac{9}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{B}}$. ◊

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Todo espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno tem bases ortonormais. Isso seguirá do Teorema 5.2.7, que veremos a seguir. Em sua demonstração, será apresentado um procedimento que origina, a partir de um conjunto LI de vetores, um conjunto ortogonal de vetores que gera o mesmo subespaço. Esse procedimento é conhecido como *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt*.

Para descrever o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, precisaremos de um lema que afirma que, como ocorria em $\mathbb{V}^3$, ortogonalidade garante independência linear.

Lema 5.2.6. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e sejam $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ vetores não nulos. Se $u_i \perp u_j$, para todo $i \neq j$, então o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é LI.*

Demonstração. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_V.$$

Então, para cada $i = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0_V, u_i \rangle \\ &= \langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n, u_i \rangle \\ &= \lambda_1 \langle u_1, u_i \rangle + \lambda_2 \langle u_2, u_i \rangle + \cdots + \lambda_n \langle u_n, u_i \rangle . \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\langle u_j, u_i \rangle = 0$, para todo $j \neq i$, o lado direito da expressão acima é igual a $\lambda_i \langle u_i, u_i \rangle = \lambda_i \|u_i\|^2$. Assim, $\lambda_i \|u_i\|^2 = 0$, mas o fato de u_i ser não nulo implica $\|u_i\| \neq 0$. Daí, obtemos $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é LI. □

Teorema 5.2.7. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e seja $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ um conjunto LI de vetores de V. Então, existem $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ vetores não nulos dois a dois ortogonais entre si tais que, para todo $i = 1, \dots, n$, $[v_1, \dots, v_i] = [u_1, \dots, u_i]$.*

Demonstração. Comecemos por definir $v_1 = u_1$. Então, é claro que $v_1 \neq 0_V$ e que $[v_1] = [u_1]$.

Agora, defina

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1.$$

Então, $v_2 \neq 0_V$, pois se v_2 fosse o vetor nulo, teríamos $u_2 \in [v_1] = [u_1]$, o que contradiz o fato de $\{u_1, u_2\}$ ser LI. Além disso, v_2 e v_1 são ortogonais, uma vez que

$$\begin{aligned}\langle v_2, v_1\rangle &= \left\langle u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1, v_1 \right\rangle = \langle u_2, v_1\rangle - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\langle v_1, v_1\rangle \\ &= \langle u_2, v_1\rangle - \langle u_2, v_1\rangle = 0.\end{aligned}$$

A penúltima igualdade segue do fato de que $\langle v_1, v_1\rangle = \|v_1\|^2$. Finalmente, como $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto formado por dois vetores não nulos que são ortogonais, $\{v_1, v_2\}$ é LI (pelo Lema 5.2.6). Mas, por sua própria definição, $v_2 \in [v_1, u_2]$; portanto, $[v_1, v_2] \subseteq [v_1, u_2] = [u_1, u_2]$ (já que $[v_1] = [u_1]$). Assim, $[v_1, v_2]$ é um subespaço de dimensão 2 do espaço $[u_1, u_2]$, que também tem dimensão 2. Segue, da Proposição 4.7.1, que $[v_1, v_2] = [u_1, u_2]$.

Repetimos o processo na definição de v_3, utilizando os vetores v_1 e v_2 já definidos:

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2.$$

Aqui, também $v_3 \neq 0_V$, uma vez que $u_3 \notin [u_1, u_2] = [v_1, v_2]$, pois o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é LI; e v_3 é ortogonal a v_1 e a v_2, pois

$$\begin{aligned}\langle v_3, v_1\rangle &= \left\langle u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2, v_1 \right\rangle \\ &= \langle u_3, v_1\rangle - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\langle v_1, v_1\rangle - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}\langle v_2, v_1\rangle \\ &= \langle u_3, v_1\rangle - \langle u_3, v_1\rangle \quad (\text{já que } \langle v_1, v_1\rangle = \|v_1\|^2 \text{ e } \langle v_2, v_1\rangle = 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$\langle v_3, v_2\rangle = 0.$$

Temos, assim, um conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ de três vetores não nulos, dois a dois ortogonais entre si, e, portanto, LI. Logo, $[v_1, v_2, v_3]$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $[v_1, v_2, u_3] = [u_1, u_2, u_3]$, que também tem dimensão 3. Logo, $[v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]$.

Prosseguimos dessa maneira: uma vez definidos $v_1, \ldots, v_i$, define-se

$$v_{i+1} = u_{i+1} - \frac{\langle u_{i+1}, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_{i+1}, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \cdots - \frac{\langle u_{i+1}, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i. \tag{5.7}$$

As verificações que $v_{i+1} \neq 0_V$, que v_{i+1} é ortogonal a $v_1, v_2, \ldots, v_i$ e que $[v_1, v_2, \ldots, v_{i+1}] = [u_1, u_2, \ldots, u_{i+1}]$ são análogas às que fizemos nos casos $i = 1$ e 2. □

Corolário 5.2.8. *Todo espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno tem base ortonormal.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita igual a n munido de um produto interno. Escolha uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de V. Após submetê-la ao processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obteremos um novo conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vetores não nulos, que são dois a dois ortogonais — e, portanto, LI —, e cujo subespaço gerado coincide com $[u_1, \dots, u_n] = V$. Logo, $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortogonal de V e, portanto, $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ é uma base ortonormal de V. □

Vejamos dois exemplos.

Exemplo 5.2.9. Em $\mathbb{R}^3$, encontre uma base ortonormal, em relação ao produto interno usual, para o subespaço $S = \big[(0,2,1), (-1,1,2)\big]$.

Solução. O conjunto $\{u_1, u_2\}$, em que $u_1 = (0,2,1)$ e $u_2 = (-1,1,2)$ é LI e, portanto, uma base de S. Podemos submetê-lo ao processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Faça $v_1 = u_1 = (0,2,1)$ e

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1.$$

Temos

$$\langle u_2, v_1\rangle = \big\langle (-1,1,2), (0,2,1) \big\rangle = 0 + 2 + 2 = 4$$

e

$$\|v_1\|^2 = \|(0,2,1)\|^2 = 0 + 4 + 1 = 5.$$

Logo,

$$v_2 = (-1,1,2) - \frac{4}{5}(0,2,1) = \left(-1, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

Assim, $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal de S. Temos $\|v_1\|^2 = 5$ (isso foi calculado acima) e

$$\|v_2\|^2 = \left\|\left(-1, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)\right\|^2 = 1 + \frac{9}{25} + \frac{36}{25} = \frac{70}{25}.$$

Portanto,

$$\|v_1\| = \sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad \|v_2\| = \frac{\sqrt{70}}{5}.$$

Logo,

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1) = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

e

$$\frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{70}/5}\left(-1, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{5}{\sqrt{70}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}\right).$$

Assim,

$$\left\{\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{5}{\sqrt{70}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}\right)\right\}$$

é uma base ortonormal de S. $\Diamond$

Exemplo 5.2.10. (Lista 1 - Álgebra Linear II (2020), ex. 66) Encontre uma base ortonormal para o subespaço $W = \left[1, t, t^2\right]$ do espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, com relação ao produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt.$$

Solução. Sejam $u_1 = 1$, $u_2 = t$ e $u_3 = t^2$. Por ser LI, $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de W. Apliquemos a ela o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Seja $v_1 = 1$ e seja

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1.$$

Como

$$\langle u_2, v_1 \rangle = \int_0^1 t\, dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \|v_1\|^2 = \int_0^1 1\, dt = t\Big|_0^1 = 1,$$

segue que

$$v_2 = t - \frac{1/2}{1} 1 = t - \frac{1}{2}.$$

Agora,

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2.$$

Já sabemos que $\|v_1\|^2 = 1$. Efetuando os cálculos dos demais escalares envolvidos nessa expressão, obtemos

$$\langle u_3, v_1 \rangle = \int_0^1 t^2\, dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}\langle u_3, v_2 \rangle &= \int_0^1 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \int_0^1 \left(t^3 - \frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \left.\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{6}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

e

$$\|v_2\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \left.\frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{12}.$$

Logo,

$$v_3 = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Assim,

$$\left\{1,\ t - \frac{1}{2},\ t^2 - t + \frac{1}{6}\right\}$$

é uma base ortogonal de W. Resta normalizá-la, isto é, dividir cada vetor pela sua norma. Já sabemos que $\|v_1\| = 1$ e $\|v_2\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Resta calcular $\|v_3\|$. Vejamos,

$$\begin{aligned}\|v_3\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4t^2}{3} - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right) dt \\ &= \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{4t^3}{9} - \frac{t^2}{6} + \frac{t}{36}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{180}.\end{aligned}$$

Logo, $\|v_3\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}$ e, portanto,

$$\left\{1,\ \sqrt{3}(2t-1),\ \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)\right\}$$

é uma base ortonormal para W. ◊

5.3 Projeção ortogonal

Vimos, na página 5.1, que, em um espaço vetorial munido de um produto interno, existe uma noção de distância entre vetores. Então, faz sentido considerar a seguinte questão.

Problema. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Dados um subespaço W de V e um vetor $u \in V$, é possível encontrar $w_0 \in W$ tal que

$$\operatorname{dist}(u, w_0) < \operatorname{dist}(u, w),$$

para todo $w \in W$, $w \neq w_0$?

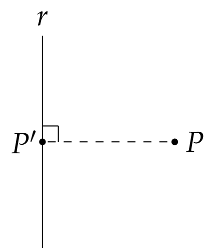
Em outras palavras, pode-se encontrar um elemento do subespaço W cuja distância a u seja a menor possível? Esse problema também é conhecido como *problema da melhor aproximação*. Quando ele tem solução, dizemos que o elemento $w_0 \in W$ encontrado é a melhor aproximação de u por elementos de W.

Veremos que quando o subespaço W tem de dimensão finita, o problema da melhor aproximação sempre terá solução.

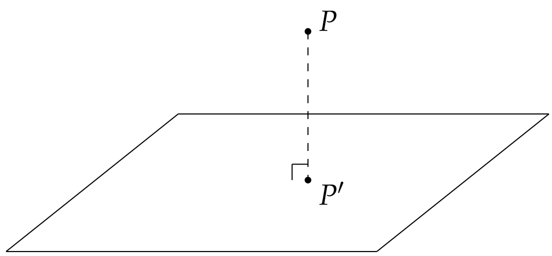
Observação. Se o problema da melhor aproximação tiver solução, ela é única.

Com efeito, dado um subespaço W de um espaço vetorial V munido de um produto interno e um vetor $u \in V$, se $w_0 \in W$ é tal que $\operatorname{dist}(u, w_0) < \operatorname{dist}(u, w)$, para todo $w \in W$, $w \neq w_0$, então qualquer outro vetor de W que não seja w_0 distará de u mais do que w_0 dista e, portanto, não será uma solução do problema da melhor aproximação; w_0 é a única. ◊

Sabemos que, na geometria euclidiana, a menor distância entre um determinado ponto P e os pontos de uma reta r ocorre precisamente entre esse ponto e sua projeção ortogonal P' sobre a reta, como na figura.



Analogamente, a menor distância entre um determinado ponto e os pontos de uma plano ocorre entre esse ponto e sua projeção ortogonal sobre o plano:



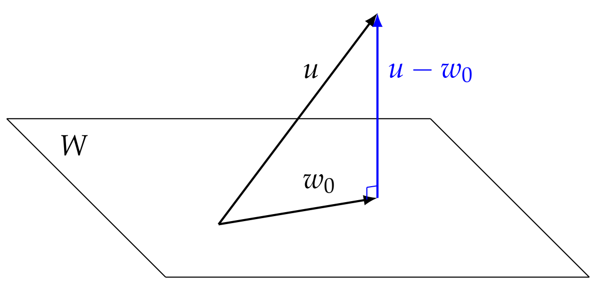
Em espaços vetoriais abstratos, temos uma versão análoga desse fato. Para enunciá-la, será útil introduzir uma notação.

Definição. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno, seja W um subespaço de V e seja $u \in V$. Dizemos que u é *ortogonal* a W, e escrevemos $u \perp W$ se $u \perp w$, para todo $w \in W$.

Podemos, agora, definir projeção ortogonal de um vetor sobre um subespaço.

Definição. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno, seja W um subespaço de V e seja $u \in V$. Se existir $w_0 \in W$ tal que $(u - w_0) \perp W$, dizemos que w_0 é uma *projeção ortogonal* de u sobre W.

Uma ilustração inspirada na geometria de $\mathbb{V}^3$ pode ajudar a compreensão desse conceito:



O próximo resultado relaciona a projeção ortogonal com o problema da melhor aproximação.

Proposição 5.3.1. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno, seja W um subespaço de V e seja $u \in V$. Se $w_0 \in W$ é uma projeção ortogonal de u sobre W, então w_0 é uma solução do problema da melhor aproximação de u por elementos de W.*

Demonstração. Precisamos mostrar que $\operatorname{dist}(u, w) > \operatorname{dist}(u, w_0)$, para todo $w \in W$, $w \neq w_0$. Com efeito, dado $w \in W$, $w \neq w_0$, temos

$$\begin{aligned}
\|u - w\|^2 &= \|(u - w_0) + (w_0 - w)\|^2 \\
&= \big\langle (u - w_0) + (w_0 - w), (u - w_0) + (w_0 - w) \big\rangle \\
&= \|u - w_0\|^2 + 2\,\langle u - w_0, w_0 - w\rangle + \|w_0 - w\|^2
\end{aligned}$$

Como w_0 é uma projeção ortogonal de u sobre W, o vetor $u - w_0$ é ortogonal a todo vetor de W, em particular, $u - w_0$ é ortogonal a $w_0 - w$. Assim, o termo central da soma acima é nulo: $\langle u - w_0, w_0 - w\rangle = 0$. Logo,

$$\|u - w\|^2 = \|u - w_0\|^2 + \|w_0 - w\|^2 > \|u - w_0\|^2,$$

uma vez que, $\|w_0 - w\| \neq 0$, pois w e w_0 são distintos. A conclusão desejada segue, lembrando que $\operatorname{dist}(u, w) = \|u - w\|$ e $\operatorname{dist}(u, w_0) = \|u - w_0\|$, por definição de distância em V. □

Segue, do resultado acima, que, quando existe, a projeção ortogonal de um vetor sobre um subespaço é única (uma vez que ela é uma solução do problema da melhor aproximação, que, como vimos, é única). Assim, faz sentido introduzir a seguinte notação: dados um espaço vetorial V munido de um produto interno, um subespaço W de V e um vetor $u \in V$, se existir, a projeção ortogonal de u sobre W será denotada por $\operatorname{proj}_W u$.

Resta-nos encontrar condições que garantam a existência da projeção ortogonal. Uma resposta é apresentada a seguir.

Teorema 5.3.2. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e seja W um subespaço de V de dimensão finita. Então, para todo $u \in V$, existe a projeção ortogonal de u sobre W e ela é dada por*

$$\operatorname{proj}_W u = \frac{\langle u, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle u, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 + \cdots + \frac{\langle u, w_n\rangle}{\|w_n\|^2} w_n, \tag{5.8}$$

em que $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ é uma base ortogonal de W.

Uma observação, neste momento, cabe. Comparando a expressão (5.8), acima, com a expressão (5.7), utilizada na definição iterativa dos vetores na demonstração do Teorema 5.2.7 (que apresenta o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt), vemos que (5.7) pode ser reescrita, em termos da projeção ortogonal, na forma

$$v_{i+1} = u_{i+1} - \operatorname{proj}_{[u_1,u_2,\dots,u_i]} u_{i+1}.$$

Isso segue do fato de $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ ser uma base ortogonal para o subespaço $[u_1, u_2, \dots, u_i]$.

Vamos à demonstração do teorema.

Demonstração. Seja $u \in V$ e seja $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ uma base ortogonal de W. (Lembre que, conforme vimos no Corolário 5.2.8, sempre haverá uma base ortogonal para W: basta tomarmos uma base qualquer de W e submetê-la ao processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.) Mostremos que o vetor

$$w = \frac{\langle u, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle u, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 + \dots + \frac{\langle u, w_n\rangle}{\|w_n\|^2} w_n$$

satisfaz as condições para ser a projeção ortogonal de u sobre W. Primeiramente, está claro que $w \in W$. Resta mostrar que $u - w \perp W$, isto é, que $u - w$ é ortogonal a todo vetor de W. Para tanto, basta mostrar que $u - w$ é ortogonal a w_i, para todo $i = 1, \dots, n$, já que essa condição implicará que $u - w$ é ortogonal a toda combinação linear de $w_1, \dots, w_n$. Assim, vejamos: dado $i = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned}\langle u - w, w_i\rangle &= \left\langle u - \left(\frac{\langle u, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle u, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 + \dots + \frac{\langle u, w_n\rangle}{\|w_n\|^2} w_n\right), w_i\right\rangle \\ &= \langle u, w_i\rangle - \frac{\langle u, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\langle w_1, w_i\rangle - \frac{\langle u, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\langle w_2, w_i\rangle - \dots \\ &\quad - \frac{\langle u, w_n\rangle}{\|w_n\|^2}\langle w_n, w_i\rangle.\end{aligned}$$

Como $\langle w_j, w_i\rangle = 0$ se $j \neq i$ e $\langle w_i, w_i\rangle = \|w_i\|^2$, a igualdade acima resume-se a

$$\langle u - w, w_i\rangle = \langle u, w_i\rangle - \frac{\langle u, w_i\rangle}{\|w_i\|^2}\langle w_i, w_i\rangle = 0.$$

Logo, $u - w \perp W$ e, portanto, $w = \operatorname{proj}_W u$. □

Em particular, se V é um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, W é um subespaço de V e $u \in V$, então a projeção ortogonal de u sobre W sempre existirá.

Exemplo 5.3.3. Em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, encontre $\operatorname{proj}_W v$, em que $v = (1, -1, 0)$ e

$$W = \big[(1,2,1), (2,1,2)\big].$$

Solução. Para utilizarmos a fórmula (5.8), necessitamos de uma base ortogonal de W. Chamemos $u_1 = (1,2,1)$ e $u_2 = (2,1,2)$, de modo que $W = [u_1, u_2]$. O conjunto $\{u_1, u_2\}$ é LI e, portanto, uma base de W; mas essa base não é ortogonal, uma vez que $\langle u_1, u_2 \rangle = 6 \neq 0$. Vamos ortogonalizá-la por meio do processo de Gram-Schmidt. Começamos fazendo $v_1 = u_1 = (1,2,1)$ e definimos

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1.$$

Como

$$\langle u_2, v_1 \rangle = \big\langle (2,1,2), (1,2,1) \big\rangle = 6$$

e

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = \big\langle (1,2,1), (1,2,1) \big\rangle = 6,$$

segue que

$$v_2 = (2,1,2) - \frac{6}{6}(1,2,1) = (1,-1,1).$$

Como v_1 e v_2 são ortogonais e geram o mesmo subespaço que u_1 e u_2, segue que $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal de W. Agora, podemos usar (5.8):

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_W v &= \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\
&= \frac{\big\langle (1,-1,0), (1,2,1) \big\rangle}{\|(1,2,1)\|^2}(1,2,1) + \frac{\big\langle (1,-1,0), (1,-1,1) \big\rangle}{\|(1,-1,1)\|^2}(1,-1,1) \\
&= \frac{-1}{6}(1,2,1) + \frac{2}{3}(1,-1,1) \\
&= \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right). \Diamond
\end{aligned}$$

Exemplo 5.3.4. Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2),$$

encontre o vetor de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ mais próximo de $q(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 3t)$.

Solução. Como $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, trata-se de encontrar a melhor aproximação de q por vetores de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. A Proposição 5.3.1 diz que a resposta é dada pela projeção ortogonal de q sobre $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Para utilizar (5.8), precisamos de uma base ortogonal de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Sabemos que $\{1, t\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, mas essa base não é ortogonal, uma vez que $\langle 1, t \rangle = (1)(0) + (1)(1) + (1)(2) = 3 \neq 0$. Apliquemos o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt: $v_1 = 1$ e

$$v_2 = t - \frac{\langle t, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1.$$

Temos
$$\langle t, 1\rangle = (0)(1) + (1)(1) + (2)(1) = 3$$
e
$$\|1\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3.$$
Assim, $v_2 = t - 1$. Como $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, segue que
$$\operatorname{proj}_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})} q = \frac{\langle q, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle q, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2.$$
Agora,
$$\begin{aligned}
\langle q, v_1\rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(t^2+3t), 1 \right\rangle = (0)(1) + (2)(1) + (5)(1) = 7,\\
\|v_1\|^2 &= \|1\|^2 = 3 \qquad \text{(como já vimos)},\\
\langle q, v_2\rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(t^2+3t), t-1 \right\rangle = (0)(-1) + (2)(0) + (5)(1) = 5,\\
\|v_2\|^2 &= \|t-1\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2.
\end{aligned}$$
Logo,
$$\operatorname{proj}_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})} q = \frac{7}{3} 1 + \frac{5}{2}(t-1) = \frac{5}{2}t - \frac{1}{6},$$
que é, de todos os vetores de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, o mais próximo de q.

Podemos interpretar o resultado da seguinte maneira. Pretende-se determinar dentre todas as retas (que são os gráficos de elementos de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$) aquela que "melhor se ajusta" à parábola $y = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)$ nos pontos $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$. O que vimos é que a reta procurada é a de equação $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{6}$. $\diamondsuit$

Observação. Vimos, no Teorema 5.3.2, uma fórmula para a projeção ortogonal de um vetor de um espaço vetorial V munido de um produto interno sobre um subespaço W de V que tenha dimensão finita. Essa fórmula era expressa em termos dos elementos de uma base *ortogonal* do subespaço W.

É possível encontrar a projeção ortogonal de qualquer vetor de V sobre W em termos dos elementos de uma base arbitrária de W, não necessariamente ortogonal. Indicamos ao leitor interessado nesse método a leitura das páginas 130–131 de **[2]**. $\diamondsuit$

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 57–74.

5.4 O complemento ortogonal

Dados um espaço vetorial V munido de um produto interno e um subconjunto X de V, definimos o *subespaço ortogonal* a X como sendo o seguinte subconjunto de V:

$$X^{\perp} = \{\, v \in V \mid v \perp x, \text{para todo } x \in X \,\}.$$

Por convenção, definimos $\varnothing^{\perp} = V$.

Observe que na definição não se exige que X seja um subespaço de V; X pode ser qualquer subconjunto de V. Apesar disso, $X^{\perp}$ é sempre um subespaço, o que justifica a nomenclatura introduzida. Esse é o conteúdo do nosso próximo resultado.

Proposição 5.4.1. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e seja X um subconjunto de V. Então, $X^{\perp}$ é um subespaço de V.*

Demonstração. Basta considerar o caso $X \neq \varnothing$. Primeiramente, $0_V \in X^{\perp}$, porque $0_V \perp v$, para todo $v \in V$, em particular, $0_V \perp x$, para todo $x \in X$. Sejam, agora, $u, v \in X^{\perp}$. É preciso mostrar que $u + v \in X^{\perp}$. Com efeito, para todo $x \in X$, temos $\langle u + v, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle v, x \rangle = 0 + 0 = 0$. Logo, de fato, $u + v \in X^{\perp}$. Finalmente, mostremos que $X^{\perp}$ é fechado para multiplicação por escalares: sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in X^{\perp}$; então, para todo $x \in X$, $\langle \lambda u, x \rangle = \lambda \langle u, x \rangle = \lambda 0 = 0$, o que mostra que $\lambda u \in X^{\perp}$. Assim, conclui-se que $X^{\perp}$ é um subespaço de V. $\square$

Sendo um subespaço, podemos aplicar ferramentas e conceitos da álgebra linear a $X^{\perp}$. Antes de tratar de um exemplo, notemos a seguinte

Observação. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e seja X um subconjunto finito de V. Então, $X^{\perp} = [X]^{\perp}$.

De fato, como $X \subseteq [X]$, então $[X]^{\perp} \subseteq X^{\perp}$. Para a outra inclusão, suponha que $X = \{u_1, \dots, u_n\}$, seja $v \in X^{\perp}$ e seja $w \in [X]$. Então, existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $w = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle v, w \rangle &= \langle v, \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \rangle \\
&= \lambda_1 \langle v, u_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle v, u_n \rangle \\
&= \lambda_1 0 + \cdots + \lambda_n 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $v \in [X]^{\perp}$, o que prova que vale, também $X^{\perp} \subseteq [X]^{\perp}$. $\Diamond$

Exemplo 5.4.2. Considere, em $\mathbb{R}^4$ o produto interno definido por

$$\big\langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \big\rangle = 2a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4.$$

Encontre uma base para $S^{\perp}$, em que $S = \big[(1, 2, 0, -1)\big]$.

Solução. Primeiramente, convença-se que a função definida é, de fato, um produto interno em $\mathbb{R}^4$. Em segundo lugar, como vimos na observação que precede este exemplo, $S^\perp = \{(1,2,0,-1)\}^\perp$. Agora, dado $v = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, temos $v \in \{(1,2,0,-1)\}^\perp$ se, e somente se, $v \perp (1,2,0,-1)$, isto é, se e somente se, $\big\langle (x,y,z,w),(1,2,0,-1)\big\rangle = 0$. Portanto,

$$v = (x,y,z,w) \in S^\perp \quad \text{se, e somente se,} \quad 2x + 2y - w = 0.$$

Assim, $S^\perp = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 2y - w = 0\}$. Agora, basta argumentarmos como vimos fazendo desde a Seção 4.7. Os vetores de $S^\perp$ são os vetores da forma

$$\left(-\alpha + \frac{\gamma}{2}, \alpha, \beta, \gamma\right) = \alpha(-1,1,0,0) + \beta(0,0,1,0) + \gamma\left(\frac{1}{2},0,0,1\right),$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, já que essas são as soluções do sistema linear $2x + 2y - w = 0$ (que tem uma equação e cujas incógnitas são x,y,z,w). Assim,

$$S^\perp = \left[(-1,1,0,0),(0,0,1,0),\left(\frac{1}{2},0,0,1\right)\right].$$

O conjunto gerador de $S^\perp$ apresentado acima é LI e, portanto, uma base dele. Em particular, $\dim(S^\perp) = 3$. $\diamondsuit$

Note que, no exemplo, a dimensão de $S^\perp$ é complementar (em relação à dimensão do espaço ambiente $\mathbb{R}^4$) à dimensão de S: $\dim(S) + \dim(S^\perp) = 1 + 3 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Isso é um fato geral, como mostra o próximo resultado.

Teorema 5.4.3. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e seja W um subespaço de dimensão finita de V. Então, $V = W \oplus W^\perp$.*

Em particular, se V tem dimensão finita, $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$, *para todo subespaço W de V.*

Demonstração. A última afirmação é uma propriedade de somas diretas, como vimos na Proposição 4.9.2.

Provemos a decomposição $V = W \oplus W^\perp$. É preciso mostrar duas coisas: que $V = W + W^\perp$ e que $W \cap W^\perp = \{0_V\}$. Comecemos pela primeira. Dado $u \in V$, como W tem dimensão finita, o Teorema 5.3.2 garante que existe a projeção ortogonal de u sobre W. Assim, temos

$$u = (\operatorname{proj}_W u) + (u - \operatorname{proj}_W u).$$

Como $\operatorname{proj}_W u \in W$ e $u - \operatorname{proj}_W u \in W^\perp$, segue $u \in W + W^\perp$. Assim, todo vetor de V se decompõe como soma de um vetor em W e um vetor em $W^\perp$. Logo, $V = W + W^\perp$. Para mostrar que a soma é direta, tome $v \in W \cap W^\perp$. Então, $\langle v, v\rangle = 0$ (pela própria definição de $W^\perp$). Logo, $v = 0_V$, o que implica $W \cap W^\perp = \{0_V\}$, como queríamos. $\square$

Como a decomposição de um vetor em uma soma de termos de uma soma direta é única (pela Proposição 4.9.4), segue que a decomposição que encontramos, na demonstração, para um vetor de V como soma de um elemento de W e um elemento de $W^\perp$ é única.

Em vista desse teorema, $W^\perp$ é, às vezes, chamado de *complemento ortogonal* de W.

Exemplo 5.4.4. Em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, decomponha o vetor $v = (1,2,2)$ como uma soma $v = x + y$, em que $x \in W = \big[(1,1,0),(0,1,1)\big]$ e $y \in W^\perp$.

Solução. Vimos, na demonstração do Teorema 5.4.3, que devemos tomar $x = \operatorname{proj}_W v$ e $y = v - x$. O conjunto $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ é uma base de W, mas não é ortogonal. Aplicando a ele o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtemos

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1,1,0),\\
v_2 &= (0,1,1) - \frac{\big\langle (0,1,1),(1,1,0)\big\rangle}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0)\\
&= (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0)\\
&= \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right).
\end{aligned}$$

Assim $\{v_1,v_2\}$ é uma base ortogonal de W. Portanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_W v &= \frac{\langle v,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 + \frac{\langle v,v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2\\
&= \frac{\big\langle (1,2,2),(1,1,0)\big\rangle}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) + \frac{\big\langle (1,2,2),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\big\rangle}{\left\|\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\right\|^2}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\\
&= \frac{3}{2}(1,1,0) + \frac{5/2}{3/2}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\\
&= \left(\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right).
\end{aligned}$$

Logo, a decomposição procurada é $v = x + y$, com

$$\begin{aligned}
x &= \operatorname{proj}_W v = \left(\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right),\\
y &= v - x = (1,2,2) - \left(\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Veja que, de fato, $x \in W$ e $y \in W^\perp$. $\Diamond$

Exemplo 5.4.5. (Prova 1, Álgebra Linear II, 2011) Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e sejam S e W subespaços de V. Assinale a afirmação **falsa**.

(A) Se $u \in S$, $v \in S^\perp$ e $u + v = 0_V$, então $u = v = 0_V$.

(B) Se $S \subseteq W$, então $W^\perp \subseteq S^\perp$.

(C) Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base ortogonal de V, então $v = \sum_{j=1}^n \operatorname{proj}_{[u_j]} v$, para todo $v \in V$.

(D) Se $S \subseteq W$, então $S^\perp \subseteq W^\perp$.

(E) Se $A = \{u_1, \dots, u_p\} \subseteq S$, $B = \{v_1, \dots, v_q\} \subseteq S^\perp$ e A e B são linearmente independentes, então $A \cup B$ é linearmente independente.

Solução. A afirmação falsa ocorre na alternativa (D); por exemplo, em qualquer espaço vetorial V não nulo, temos $\{0_V\}^\perp = V$ (pois todo vetor de V é ortogonal ao vetor nulo) e $V^\perp = \{0_V\}$ (pois se $v \in V$ é tal que $v \in V^\perp$, então $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = 0$). Assim, tomando $S = \{0_V\}$ e $W = V$, obtemos um contraexemplo de (D).

Mostremos, agora, que as demais afirmações são verdadeiras.

(A) Se $u + v = 0_V$, então, $u = -v$. Como $v \in S^\perp$ e $S^\perp$ é um subespaço de V segue que $-v \in S^\perp$. Logo temos um vetor $u = -v$ que pertence, simultaneamente, a S e a $S^\perp$. Portanto, ele é ortogonal a si mesmo: $0_V = \langle u, u \rangle = \|u\|^2$. Segue que $u = 0_V$ e, também, $v = -u = -0_V = 0_V$.

(B) Para mostrar que $W^\perp \subseteq S^\perp$, é preciso mostrar que todo vetor de $W^\perp$ é ortogonal a todo vetor de S. Mas isso é válido, uma vez que todo vetor de $W^\perp$ é ortogonal a todo vetor de W e W contém S.

(C) Dado $v \in V$, sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$. Para cada $i = 1, \dots, n$, temos $\langle v, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j, u_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle u_j, u_i \rangle = \lambda_i \|u_i\|^2$, uma vez que os vetores de $\{u_1, \dots, u_n\}$ são dois a dois ortogonais entre si. Segue que $\lambda_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2}$. Portanto, $\lambda_i u_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i = \operatorname{proj}_{[u_i]} v$.

(E) Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^q \beta_j v_j = 0_V$. A tarefa é mostrar que todos os α_i e todos os β_j são iguais a zero. Denote $u = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$ e $v = \sum_{j=1}^q \beta_j v_j$. Então, $u \in S$ e $v \in S^\perp$, já que $A \subseteq S$ e $B \subseteq S^\perp$. Pelo que vimos na alternativa (a) isso implica que $0_V = u = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$ e que $0_V = v = \sum_{j=1}^q \beta_j v_j$. Como A e B são LI, segue que $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, p$, e $\beta_j = 0$, para todo $j = 1, \dots, q$.

Resposta: (D) ◊

Exercícios. Lista 1 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 75–82.

6

Transformações lineares

Neste capítulo, estudaremos relações entre espaços vetoriais possivelmente distintos. A ferramenta para isso serão funções entre os espaços vetoriais que respeitam as operações.

6.1 Definição e exemplos

Definição. Sejam U e V espaços vetoriais. Dizemos que uma função

$$T\colon U \longrightarrow V$$

é uma *transformação linear* se satisfizer as seguintes condições:

(1) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, para todos $u_1, u_2 \in U$;

(2) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para todos $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Obverve que, na definição acima, embora os espaços U e V sejam possivelmente diferentes, e, portanto, possuam operações de soma e multiplicação por escalar diferentes, utilizamos as mesmas notações ($+$ e concatenação) para elas nos dois espaços. Esse abuso notacional ocorrerá com frequência. Em geral, o próprio contexto impedirá interpretações ambíguas.

As transformações lineares são as funções entre espaços vetoriais que permitem que se transporte informações conhecidas de um espaço a outro.

Antes de prosseguir explorando propriedades de transformações lineares e suas consequências para os espaços vetoriais envolvidos, vejamos uma série de exemplos de transformações lineares (e, também, de algumas funções que não são transformações lineares).

Exemplo 6.1.1. A função $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, definida por

$$T(a,b,c) = a + bt + ct^2,$$

para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, é uma transformação linear.[1]

A fim de justificar essa afirmação, é preciso mostrar que, de fato, T satisfaz as condições da definição. Dados $(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned}
T\big((a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2)\big) &= T(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2) \\
&= (a_1+a_2) + (b_1+b_2)t + (c_1+c_2)t^2 \\
&= (a_1 + b_1t + c_1t^2) + (a_2 + b_2t + c_2t^2) \\
&= T(a_1,b_1,c_1) + T(a_2,b_2,c_2).
\end{aligned}$$

Logo, T satisfaz a condição (1). Para a segunda condição, tome $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}
T\big(\lambda(a,b,c)\big) &= T(\lambda a, \lambda b, \lambda c) \\
&= (\lambda a) + (\lambda b)t + (\lambda c)t^2 \\
&= \lambda(a + bt + ct^2) \\
&= \lambda T(a,b,c).
\end{aligned}$$

Portanto, T satisfaz, também, a condição (2). Assim, T é uma transformação linear. $\diamondsuit$

É comum introduzir a definição uma função, em termos de seu domínio, contradomínio e da imagem de cada elemento de seu domínio, por um diagrama, como o que foi utilizado, por exemplo, na definição de espaço vetorial no início da Seção 4.1. Assim, no exemplo acima, poderíamos ter dito, simplesmente, que T é a função dada por

$$\begin{array}{rcl}
T\colon \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \\
(a,b,c) & \longmapsto & a + bt + ct^2
\end{array}$$

Daí, poderíamos concluir, a título de um exemplo, que $T(1,-1,0) = 1 - t$ e, também, que $T(0,-2,3) = -2t + 3t^2$.

Exemplo 6.1.2. A função

$$\begin{array}{rcl}
L\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
(x,y) & \longmapsto & (2x, x+y, 3y)
\end{array}$$

é uma transformação linear.

[1] Fizemos, aqui, um pequeno abuso da notação usual de função: deveríamos, a rigor, escrever $T\big((a,b,c)\big)$ para a imagem pela função T do elemento (a,b,c) de seu domínio. Essa simplificação notacional sempre será adotada quando não implicar ambiguidades.

Com efeito, L satisfaz a condição (1), pois

$$\begin{aligned} L\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) &= L(x_1+x_2,y_1+y_2) \\ &= \big(2(x_1+x_2),(x_1+x_2)+(y_1+y_2),3(y_1+y_2)\big) \\ &= (2x_1+2x_2,x_1+y_1+x_2+y_2,3y_1+3y_2) \\ &= (2x_1,x_1+y_1,3y_1)+(2x_2,x_2+y_2,3y_2) \\ &= L(x_1,y_1)+L(x_2,y_2), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$. E L satisfaz a condição (2), uma vez que

$$\begin{aligned} L\big(\lambda(x,y)\big) &= L(\lambda x,\lambda y) \\ &= (2\lambda x,\lambda x+\lambda y,3\lambda y) \\ &= \lambda(2x,x+y,3y) \\ &= \lambda L(x,y), \end{aligned}$$

para todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Diamond$

Algumas transformações geométricas familiares são lineares, como é o caso do próximo exemplo.

Exemplo 6.1.3. No plano cartesiano, a reflexão em relação ao eixo x é uma transformação linear. De fato, essa transformação é dada por

$$\begin{aligned} S\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x,-y) \end{aligned}$$

e é linear porque

$$\begin{aligned} S\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) &= S(x_1+x_2,y_1+y_2) = \big(x_1+x_2,-(y_1+y_2)\big) \\ &= (x_1+x_2,-y_1-y_2) = (x_1,-y_1)+(x_2,-y_2) \\ &= S(x_1,y_1)+S(x_2,y_2), \end{aligned}$$

para todos $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, e

$$S\big(\lambda(x,y)\big) = S(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x,-\lambda y) = \lambda(x,-y) = \lambda S(x,y),$$

para todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Diamond$

Se V é um espaço vetorial, uma transformação linear $T\colon V \to V$ é, também, chamada de *operador linear* de V. Esse é o caso do exemplo anterior.

Algumas funções familiares do Cálculo também são lineares.

Exemplo 6.1.4. O operador de derivação no espaço dos polinômios

$$\begin{aligned} D\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ p &\longmapsto p' \end{aligned}$$

é linear, pois, como visto no curso de Cálculo,

$$D(p+q) = (p+q)' = p' + q' = D(p) + D(q)$$

e

$$D(\lambda p) = (\lambda p)' = \lambda p',$$

para todos $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Exemplo 6.1.5. Se V é um espaço vetorial qualquer, então a função identidade $\mathrm{I}_V \colon V \to V$, definida por $\mathrm{I}_V(v) = v$, para todo $v \in V$, é uma transformação linear, chamada de *operador identidade* de V, como é fácil ver.

Se U e V são espaços vetoriais, também é fácil de ver que a função nula $N \colon U \to V$, dada por $N(u) = 0_V$, para todo $u \in U$, é uma transformação linear. $\diamondsuit$

Exemplo 6.1.6. A função

$$\begin{array}{rcl} F\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2, 0) \end{array}$$

não é uma transformação linear, pois, por exemplo, não satisfaz a condição (1), já que

$$F\big((1,0) + (1,1)\big) = F(2,1) = (4,0),$$

ao passo que

$$F(1,0) + F(1,1) = (1,0) + (1,0) = (2,0).$$

Observe que a condição (1) exigia que a igualdade expressa nela fosse satisfeita para todos os pares de elementos do domínio. Aqui, mostramos que ela não é satisfeita para uma determinada escolha de pares, o que é suficiente para garantir que F não é uma transformação linear. Note que F também não satisfaz a condição (2). $\diamondsuit$

Exemplo 6.1.7. A função

$$\begin{array}{rcl} G\colon \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+1, y+z) \end{array}$$

não é uma transformação linear, pois, por exemplo, não satisfaz a condição (2):

$$G\big(2(1,1,3)\big) = G(2,2,6) = (3,8),$$

mas

$$2G(1,1,3) = 2(2,4) = (4,8).$$

(Verifique que G também não satisfaz a condição (1).) $\diamondsuit$

Enunciamos, a seguir, duas propriedades satisfeitas por transformações lineares.

Proposição 6.1.8. *Sejam U e V espaços vetoriais e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Então,*

(i) $T(0_U) = 0_V$;

(ii) $T(-u) = -T(u)$, *para todo* $u \in U$.

Demonstração. Temos $T(0_U) = T(0_U + 0_U) = T(0_U) + T(0_U)$, pois T é linear. Somando $-T(0_U)$ a ambos os lados da igualdade, obtemos (i). Para (ii), basta lembrar que $-u = (-1)u$, para todo $u \in U$ (ver Proposição 4.1.8). □

Esse resultado pode ser utilizado para mostrar que uma determinada função entre espaços vetorias não é uma transformação linear. Por exemplo, no Exemplo 6.1.7, temos $G(0,0,0) = (1,0) \neq (0,0)$. Logo, G não pode ser linear. Entretanto, esse critério deve ser aplicado com cuidado, pois há funções entre espaços vetoriais que preservam o vetor nulo, mas não são lineares. Por exemplo, a função $\det\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ satisfaz $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$, mas não é linear. (Você consegue mostrar isso?)

O próximo resultado diz que uma transformação linear está completamente determinada uma vez determinadas as imagens dos elementos em uma base do domínio.

Proposição 6.1.9. *Seja U um espaço vetorial de dimensão finita e seja V um espaço vetorial qualquer. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de U e $v_1, \dots, v_n \in V$, então existe uma única transformação linear $T\colon U \to V$ tal que $T(e_i) = v_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.*

Como veremos na demonstração desse resutado, a sequência de vetores $v_1, \dots, v_n$ não precisa ser formada por elementos distintos.

Demonstração. Há duas coisas a demonstrar: (i) que existe uma transformação linear T com a propriedade desejada, e (ii) que T é a única transformação linear com essa propriedade.

Comecemos por (i). Vamos definir uma função $T\colon U \to V$, explicitando a imagem de cada elemento do domínio U. Dado $u \in U$, sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$. Defina

$$T(u) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

(Isto é, $T(u)$ é aquela combinação linear de $v_1, \dots, v_n$ cujos escalares são as coordenadas de u em relação à base $\{e_1, \dots, e_n\}$.) Então, $T(e_i) = v_i$, para todo $i = 1, \dots, n$, por definição. Falta mostra que T é uma transformação linear. Sejam $u, u' \in U$ e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \quad \text{e} \quad u' = \lambda'_1 e_1 + \cdots + \lambda'_n e_n.$$

Então, $u + u' = (\lambda_1 + \lambda_1')e_1 + \cdots + (\lambda_n + \lambda_n')e_n$ e, portanto,

$$\begin{aligned} T(u+u') &= (\lambda_1 + \lambda_1')v_1 + \cdots + (\lambda_n + \lambda_n')v_n \\ &= (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) + (\lambda_1' v_1 + \cdots + \lambda_n' v_n) \\ &= T(u) + T(u'), \end{aligned}$$

e, se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha u = (\alpha\lambda_1)e_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n)e_n$, o que implica, pela definição de T, que

$$T(\alpha u) = (\alpha\lambda_1)v_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n)v_n = \alpha(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \alpha T(u).$$

Logo, T é, de fato, linear e satisfaz, como vimos, a propriedade desejada.

(ii) Seja, agora, $S\colon U \to V$ uma transformação linear que satisfaz $S(e_i) = v_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dado $u \in U$, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são tais que $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, então,

$$\begin{aligned} S(u) &= S(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) \\ &= \lambda_1 S(e_1) + \cdots + \lambda_n S(e_n) \qquad \text{(pois } S \text{ é linear)} \\ &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \\ &= T(u). \end{aligned}$$

Logo, S e T são funções iguais (isto é, elas têm mesmo domínio, mesmo contradomínio e as imagens em cada elemento do domínio coincidem). Portanto, T é a única transformação linear de U em V que manda e_i em v_i, para todo $i = 1, \ldots, n$. □

Esse resultado é útil para construirmos exemplos de transformações lineares.

Exemplo 6.1.10. Encontre uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que satisfaça $T(1,1,1,1) = t^2$.

Solução. Vimos, na Proposição 6.1.9, que basta fixarmos as imagens dos elementos de uma base de $\mathbb{R}^4$ para definir uma transformação linear com domínio $\mathbb{R}^4$. Como queremos ter controle sobre a imagem de $(1,1,1,1)$, tomemos uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém esse elemento, por exemplo, $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$. (Convença-se que, de fato, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.) Agora, basta escolher as imagens, em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, desses quatro vetores, de modo a respeitar a condição exigida. Uma possibilidade é definir

$$\begin{aligned} T(1,1,1,1) &= t^2; \\ T(1,1,1,0) &= t + t^2; \\ T(1,1,0,0) &= 1; \\ T(1,0,0,0) &= 2 - 3t + 4t^2. \end{aligned}$$

A Proposição 6.1.9 garante que existe uma transformação linear T com essa propriedade (e que ela é a única satisfazendo essas condições). Essa escolha para as imagens dos elementos de $\mathcal{B}$ é totalmente arbitrária, desde que $(1,1,1,1)$ seja enviado em t^2, como requerido. Cada escolha dará origem a uma transformação linear diferente, todas satisfazendo a condição desejada.

Para darmos uma expressão explícita para a imagem por T de um elemento arbitrário de $\mathbb{R}^4$, basta conhecer suas coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$. Assim, dado $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, a decomposição desse vetor como combinação linear dos elementos da base $\mathcal{B}$ fornece, como o leitor pode ele mesmo verificar,

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) = d(1,1,1,1) &+ (c-d)(1,1,1,0) + (b-c)(1,1,0,0)\\ &+ (a-b)(1,0,0,0).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}T(a,b,c,d) &= T\big(d(1,1,1,1) + (c-d)(1,1,1,0) + (b-c)(1,1,0,0)\\ &\qquad + (a-b)(1,0,0,0)\big)\\ &= dT(1,1,1,1) + (c-d)T(1,1,1,0) + (b-c)T(1,1,0,0)\\ &\qquad + (a-b)T(1,0,0,0)\\ &= dt^2 + (c-d)(t+t^2) + (b-c)1 + (a-b)(2-3t+4t^2)\\ &= (2a-b-c) + (-3a+3b+c-d)t + (4a-4b+c)t^2.\end{aligned}$$

Veja que, como queríamos, $T(1,1,1,1) = t^2$. $\diamondsuit$

Veja que, no exemplo acima, havia muita liberdade para a definição de T. Mesmo a escolha da base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ poderia ser outra. Para garantir que a transformação linear T satisfaça $T(1,1,1,1) = t^2$, é suficiente que se tome uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo $(1,1,1,1)$ e que, ao se aplicar a Proposição 6.1.9, se defina a imagem de $(1,1,1,1)$ por T como sendo t^2. Todas as demais escolhas podem ser feitas de modo totalmente arbitrário. Por exemplo, poderíamos ter considerado a base $\{(1,1,1,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^4$ e definido uma transformação linear S satisfazendo $S(1,1,1,1) = t^2$ e $S(1,0,0,0) = S(0,1,0,0) = S(0,0,1,0) = 0$. Neste caso, teríamos uma outra transformação linear $S\colon \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que satisfaz a condição $S(1,1,1,1) = t^2$, mas que é diferente da transformação T. (Para essa transformação linear, temos $S(a,b,c,d) = dt^2$, para todo $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.) Em resumo, existem infinitas transformações lineares de $\mathbb{R}^4$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que mandam $(1,1,1,1)$ em t^2.

Há casos, entretanto, que a imposição de condições resulta na existência de uma única transformação linear.

Exemplo 6.1.11. Mostre que existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz $T(1,2) = (1,-1,0)$ e $T(2,1) = (0,2,3)$.

Solução. Como $\{(1,2),(2,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, a Proposição 6.1.9 garante que existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,2) = (1,-1,0) \quad \text{e} \quad T(2,1) = (0,2,3).$$

Para encontrar a imagem por essa transformação linear de um vetor arbitrário (x,y) de $\mathbb{R}^2$, é preciso decompô-lo como combinação linear dos elementos da base $\{(1,2),(2,1)\}$:

$$(x,y) = \frac{-x+2y}{3}(1,2) + \frac{2x-y}{3}(2,1),$$

e, assim,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T\left(\frac{-x+2y}{3}(1,2) + \frac{2x-y}{3}(2,1)\right) \\ &= \frac{-x+2y}{3}T(1,2) + \frac{2x-y}{3}T(2,1) \\ &= \frac{-x+2y}{3}(1,-1,0) + \frac{2x-y}{3}(0,2,3) \\ &= \left(\frac{-x+2y}{3}, \frac{5x-4y}{3}, 2x-y\right). \end{aligned}$$

A Proposição 6.1.9 diz mais; ela garante que existe uma *única* transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz as condições exigidas. Isso ficou claro acima: uma vez fixadas as imagens de $(1,2)$ e de $(2,1)$, ficaram determinadas as imagens de todos os elementos de $\mathbb{R}^2$. $\Diamond$

Nesse exemplo, não havia liberdade de escolha. Como estavam fixadas as imagens, pela transformação linear, nos elementos de uma base do domínio, a transformação ficou, automaticamente, completamente definida em todos os elementos de seu domínio.

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 1–4.

6.2 Núcleo e imagem

Estão associados a uma transformação linear dois subespaços vetoriais destacados, que serão definidos e estudados nesta seção. São eles o núcleo e a imagem da transformação linear.

Definição. Sejam U e V espaços vetoriais e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Definimos o *núcleo* de T como sendo o seguinte subconjunto de U:

$$\operatorname{Ker}(T) = \{\, u \in U \mid T(u) = 0_V \,\}.$$

Definimos a *imagem* de T como sendo o seguinte subconjunto de V:

$$\operatorname{Im}(T) = \left\{ v \in V \mid \text{existe algum } u \in U \text{ tal que } v = T(u) \right\}.$$

Esses subconjuntos têm estrutura de subespaço vetorial dentro do espaço vetorial respectivo em que estão definidos. É isso o que diz o próximo resultado.

Proposição 6.2.1. *Sejam U e V espaços vetoriais e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Então,* $\operatorname{Ker}(T)$ *é um subespaço de U, e* $\operatorname{Im}(T)$ *é um subespaço de V.*

Demonstração. Comecemos mostrando que o núcleo de T é um subespaço de U. Em primeiro lugar, $0_U \in \operatorname{Ker}(T)$, pois, segundo a Proposição 6.1.8, $T(0_U) = 0_V$. Agora sejam $u_1, u_2 \in \operatorname{Ker}(T)$. Mostremos que $u_1 + u_2 \in \operatorname{Ker}(T)$. Pela definição de núcleo, temos $T(u_1) = 0_V$ e $T(u_2) = 0_V$. Então, como T é linear,

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0_V + 0_V = 0_V,$$

o que prova que $u_1 + u_2 \in \operatorname{Ker}(T)$. Agora, tome $u \in \operatorname{Ker}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostremos que $\lambda u \in \operatorname{Ker}(T)$. Com efeito,

$$T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda 0_V = 0_V.$$

Portanto, $\lambda u \in \operatorname{Ker}(T)$. Logo, $\operatorname{Ker}(T)$ é um subespaço de U.

Tratemos, agora, da imagem de T. Como $T(0_U) = 0_V$, segue que $0_V \in \operatorname{Im}(T)$. Agora, sejam $v_1, v_2 \in \operatorname{Im}(T)$. Então, pela definição de imagem, existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $v_1 = T(u_1)$ e $v_2 = T(u_2)$. Assim,

$$v_1 + v_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \in \operatorname{Im}(T).$$

Finalmente, tome $v \in \operatorname{Im}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$. Portanto,

$$\lambda v = \lambda T(u) = T(\lambda u) \in \operatorname{Im}(T).$$

Segue que $\operatorname{Im}(T)$ é um subespaço de V. $\square$

Retomemos alguns dos exemplos de transformação linear que vimos na seção anterior.

Exemplo 6.2.2. Determine, nos Exemplos 6.1.1–6.1.5, o núcleo e a imagem de cada uma das transformações lineares lá definidas.

Solução. Para a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T(a,b,c) = a + bt + ct^2$, teremos $(a,b,c) \in \operatorname{Ker}(T)$ se, e somente se,

$$a + bt + ct^2 = T(a,b,c) = 0,$$

o que ocorre se, e só se, $a = b = c = 0$. Portanto, $\operatorname{Ker}(T) = \{(0,0,0)\}$. Por outro lado, é fácil ver que $\operatorname{Im}(T) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, pois qualquer que seja $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, digamos, $q = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, temos $q = T(a_0, a_1, a_2) \in \operatorname{Im}(T)$.

Consideremos, agora, $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $L(x,y) = (2x, x + y, 3y)$. Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos $(x,y) \in \operatorname{Ker}(L)$ se, e somente se,

$$(2x, x+y, 3y) = L(x,y) = (0,0,0),$$

o que implica $x = y = 0$. Portanto, $\operatorname{Ker}(L) = \{(0,0)\}$. Para a determinar imagem de L, tome $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e vejamos quais são condições precisas para que $v \in \operatorname{Im}(L)$. Teremos $v \in \operatorname{Im}(L)$ se, e somente se, existir $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $v = L(u)$, ou seja, se e somente se, existirem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $(a,b,c) = L(x,y) = (2x, x+y, 3y)$. Portanto, $v \in \operatorname{Im}(L)$ se, e somente se, existir solução para o sistema linear

$$\begin{cases} 2x = a \\ x + y = b \\ 3y = c \end{cases} \tag{6.1}$$

nas variáveis x, y, z. Escalonando a matriz aumentada do sistema, obtemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 3 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -\frac{a}{2} + b \\ 0 & 3 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -\frac{a}{2} + b \\ 0 & 0 & \frac{3a}{2} - 3b + c \end{array}\right]$$

Assim, (6.1) tem solução se, e só se, $\frac{3a}{2} - 3b + c = 0$. Portanto,

$$\operatorname{Im}(L) = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{3a}{2} - 3b + c = 0 \right\},$$

que é um subespaço de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$.

Para a reflexão $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $S(x,y) = (x, -y)$, é fácil de ver que $\operatorname{Ker}(S) = \{(0,0)\}$ e que $\operatorname{Im}(S) = \mathbb{R}^2$. (Isso que podia ser antecipado por argumentos de natureza puramente geométrica: o único vetor que é enviado na origem é a própria origem, e todo ponto do plano é reflexão de sua própria reflexão.)

Consideremos o operador de derivação $D\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $p \mapsto p'$. Se $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é tal que $p' = T(p) = 0$, então $a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1} = 0$, o que implica $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Assim, $\operatorname{Ker}(D) = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$. (Isso já era conhecido do Cálculo: os únicos polinômios de derivada nula são os constantes.) Já $\operatorname{Im}(D) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, uma vez que qualquer polinômio é derivada de um polinômio, uma primitiva dele: $a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = D\big(a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}\big)$.

Finalmente, $\operatorname{Ker}(\mathrm{I}_V) = \{0_V\}$ e $\operatorname{Im}(\mathrm{I}_V) = V$, como é fácil ver. E, se $N\colon U \to V$ é a transformação nula, então $\operatorname{Ker}(N) = U$ (todo vetor de U é mandado, via N, para 0_V) e $\operatorname{Im}(N) = \{0_V\}$ (o único vetor de V que é atingido via N é o vetor nulo). ◊

Como núcleo e imagem são subespaços, podemos utilizar as ferramentas desenvolvidas para o estudo de espaço vetoriais para analisá-los. Por exemplo, podemos tratar de bases e dimensões para eles.

Exemplo 6.2.3. Encontre uma base para o núcleo da transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y,z) = (x+y+z, 3x-2y)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Solução. Deixamos a cargo do leitor a verificação de que T, assim definida, é, de fato, linear. Seja $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Então,

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker}(T) &\iff T(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\iff (x+y+z, 3x-2y) = T(x,y,z) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

As soluções desse sistema são dadas por

$$\left(-\frac{2z}{5}, -\frac{3z}{5}, z\right), \quad z \in \mathbb{R},$$

como o leitor pode verificar. Assim, $u \in \operatorname{Ker}(T)$ se, e somente se, existir $z \in \mathbb{R}$ tal que $u = (-\frac{2z}{5}, -\frac{3z}{5}, z) = z(-\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, 1)$. Ou seja, o núcleo de T é formado pelos múltiplos do vetor $(-\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, 1)$, ou, equivalentemente,

$$\operatorname{Ker}(T) = \left[\left(-\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right)\right] = \big[(-2,-3,5)\big].$$

Como esse conjunto gerador unitário é LI, segue que $\{\,(-2,-3,5)\,\}$ é uma base de $\operatorname{Ker}(T)$. Em particular, obtemos $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 1$. ◊

Exemplo 6.2.4. Encontre uma base para a imagem da transformação linear

$$\begin{aligned} T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ p &\longmapsto tp' + t^2 p, \end{aligned}$$

em que p' denota a derivada de p.

Solução. A função T é uma transformação linear pois se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} T(p+q) &= t(p+q)' + t^2(p+q) \\ &= t(p'+q') + t^2(p+q) \\ &= tp' + tq' + t^2p + t^2q \\ &= (tp' + t^2p) + (tq' + t^2q) \\ &= T(p) + T(q) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T(\lambda p) &= t(\lambda p)' + t^2(\lambda p) \\
&= t\lambda p' + t^2\lambda p \\
&= \lambda t p' + \lambda t^2 p \\
&= \lambda(tp' + t^2 p) \\
&= \lambda T(p).
\end{aligned}$$

Vamos à determinação de sua imagem. Dado $h \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, temos: $h \in \mathrm{Im}(T)$ se, e somente se, existe $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $h = T(p) = tp' + t^2 p$, o que, por sua vez, é equivalente a existirem $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}
h(t) &= t(a_1 + 2a_2 t) + t^2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \\
&= a_0 t^2 + a_1(t + t^3) + a_2(2t^2 + t^4).
\end{aligned}$$

Assim, $h \in \mathrm{Im}(T)$ se, e somente se, $h \in \left[t^2,\, t + t^3,\, 2t^2 + t^4\right]$. Logo,

$$\mathrm{Im}(T) = \left[t^2,\, t + t^3,\, 2t^2 + t^4\right].$$

Como esse conjunto de três vetores é LI (uma vez que é formado por polinômios de graus distintos), segue que $\left\{\, t^2,\, t + t^3,\, 2t^2 + t^4 \,\right\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$. Em particular, $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$. $\Diamond$

Conhecer o núcleo de uma transformação linear permite que se afirme sobre sua eventual injetividade. (Referimos o leitor ao Apêndice C para os conceitos de injetividade, sobrejetividade e bijetividade no contexto de funções.)

Proposição 6.2.5. *Sejam U e V espaços vetoriais e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Então, T é injetora se, e somente se,* $\mathrm{Ker}(T) = \{0_U\}$.

Demonstração. Suponha que T é injetora. Mostremos que $\mathrm{Ker}(T) = \{0_U\}$. Já sabemos que $\{0_U\} \subseteq \mathrm{Ker}(T)$ (afinal de contas, $\mathrm{Ker}(T)$ é um subespaço de U). Verifiquemos que vale a inclusão reversa. Seja $u \in U$ tal que $u \in \mathrm{Ker}(T)$. Então, $T(u) = 0_V = T(0_U)$, como vimos na Proposição 6.1.8. Como T é injetora, segue que $u = 0_U$. Portanto, também temos $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \{0_U\}$, provando o que queríamos.

Reciprocamente, suponha que $\mathrm{Ker}(T) = \{0_U\}$. Mostremos que isso implica que T é injetora. Sejam $u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = T(u_2)$. Então, $T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2) = 0_V$ (a primera igualdade segue do fato de T ser linear). Ou seja, $u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker}(T)$, que, por hipótese, contém apenas o vetor nulo de U. Portanto, $u_1 - u_2 = 0_U$ e, assim, $u_1 = u_2$, provando que T é injetora. $\square$

O critério de injetividade contido na Proposição 6.2.5 é extremamente útil e será usado quase que exclusivamente quando tivermos que decidir se uma transformação linear é ou não injetora.

Exemplo 6.2.6. O operador linear

$$\begin{array}{rcl} T\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \\ p & \longmapsto & p' + p'', \end{array}$$

em que p' denota primeira derivada de p e p'', a segunda, é injetor?

Solução. Note que a função T está bem definida, uma vez que se $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, então, certamente, $p' + p'' \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Além disso, T é linear (como o leitor pode verificar). Para responder à pergunta, determinemos o núcleo de T. Dado $p = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, teremos $p \in \operatorname{Ker}(T)$ se, e somente se, $p' + p'' = T(p) = 0$. Essa última condição, em termos dos coeficientes de p pode, após alguma manipulação algébrica, que deixamos a cargo do leitor, ser expressa por

$$\sum_{i=1}^{n-1} \big(ia_i + (i+1)ia_{i+1}\big)t^{i-1} + na_n t^{n-1} = 0. \tag{6.2}$$

Comparando graus, do maior para o menor, concluímos que (6.2) só pode ocorrer se $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Assim, $\operatorname{Ker}(T) = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\}$, que não é o subespaço nulo. Logo, T não é injetor. $\lozenge$

Na sequência dos Exemplos 6.1.1–6.1.5, são injetoras apenas T, L, S e I_V. (A transformação nula $N\colon U \to V$ é injetora se, e somente se, $\dim(U) = 0$, um caso, por assim dizer, "patológico".)

Veremos, agora, um caso importante, por ser, em um sentido que ficará claro mais adiante, o exemplo paradigmático de transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita.

Exemplo 6.2.7. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e considere a função $T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $T_A(u) = Au$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Mais detalhadamente, estamos denotando os elementos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ por vetores-coluna, isto é, estamos fazendo a identificação natural entre $\mathbb{R}^n$ e $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e entre $\mathbb{R}^m$ e $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ que já vínhamos fazendo desde o estudo de sistemas lineares no Capítulo 1. Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e $u = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$T_A(u) = v,$$

com $v = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m$, em que, para cada $i = 1, \ldots, m$,

$$c_i = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + \cdots + a_{in}b_n,$$

pois

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}.$$

(i) Mostre que T_A é uma transformação linear.

(ii) Descreva $\mathrm{Ker}(T_A)$ e $\mathrm{Im}(T_A)$.

Solução. (i) Dados $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$, temos $T_A(u_1 + u_2) = A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 = T_A(u_1) + T_A(u_2)$; e, se $u \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $T_A(\lambda u) = A(\lambda u) = \lambda(Au) = \lambda T_A(u)$, o que prova que T_A é uma transformação linear.

(ii) Dado $u \in \mathbb{R}^n$, teremos $u \in \mathrm{Ker}(T_A)$ se, e somente se, $0_{\mathbb{R}^m} = T_A(u) = Au$, ou seja, se e somente se, u for solução do sistema linear $AX = 0$, de m equações e n incógnitas. Em outras palavras, $\mathrm{Ker}(T_A)$ coincide com o subespaço de $\mathbb{R}^n$ formado pelas soluções do sistema linear homogêneo cuja matriz de coeficientes é A. Segue da Proposição 4.7.6 que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T_A)\big) = n - t$, em que t é o número de pivôs de uma matriz escalonada obtida a partir de A por operações elementares sobre linhas.

Finalmente, dado $v \in \mathbb{R}^m$, teremos $v \in \mathrm{Im}(T_A)$ se, e somente se, existir $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $v = T_A(u) = Au$, o que, por sua vez, é equivalente a v ser uma combinação linear das colunas de A (com coeficientes dados pelas entradas de u, cada entrada multiplicando escalarmente a coluna correspondente[2]). Consequentemente, $\mathrm{Im}(T_A)$ coincide com o subespaço de $\mathbb{R}^m$

---

[2]Mais detalhadamente, dada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}$, para cada $j = 1, \ldots, n$, seja $C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{m_j} \end{bmatrix}$ a j-ésima coluna da matriz A, que é um vetor de $\mathbb{R}^m$. Dado um vetor $u = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} Au &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n, \end{aligned}$$

gerado pelas colunas de A. Assim, $\dim\big(\mathrm{Im}(T_A)\big)$ é igual ao posto-coluna de A, que, por sua vez, é igual a t (ver Apêndice B para os detalhes.) $\Diamond$

Veremos, na próxima seção, que essa relação entre as dimensões de $\mathrm{Ker}(T_A)$ e $\mathrm{Im}(T_A)$ é uma propriedade de todas as transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita.

Exemplo 6.2.8. Encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem de $T_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução. Como vimos no exemplo anterior, $\mathrm{Ker}(T_A)$ é o conjunto formado pelas soluções do sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando A, obtemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, x_2 e x_3 são variáveis livres, enquanto x_1 é variável pivô. As soluções do sistema são

$$(2x_3, x_2, x_3) = x_2(0,1,0) + x_3(2,0,1), \quad \text{com } x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Logo, $\mathrm{Ker}(T_A) = \big[(0,1,0),(2,0,1)\big]$. Como esse conjunto gerador com dois elementos é LI, ele é uma base para $\mathrm{Ker}(T_A)$. Vimos, também, que $\mathrm{Im}(T_A)$ é o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelas colunas de A, ou seja,

$$\mathrm{Im}(T_A) = \big[(2,-1),(0,0),(-4,2)\big] = \big[(2,-1)\big].$$

Assim $\big\{\ (2,-1)\ \big\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T_A)$. $\Diamond$

Para transformações lineares arbitrárias, o seguinte resultado é bastante útil na tarefa de descrever a imagem.

Proposição 6.2.9. *Sejam U e V espaços vetoriais e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Se $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ são tais que $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, então $\mathrm{Im}(T) = \big[T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\big]$.*

---

como o leitor pode, realizando as operações envolvidas na multiplicação de matrizes, verificar. Assim, dado $v \in \mathbb{R}^m$, teremos $v = Au$, para algum $u \in \mathbb{R}^n$, se e somente se, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n$, ou seja, se, e somente se, v for combinação linear de $C_1, C_2, \dots, C_n$. Portanto, $\mathrm{Im}(T_A) = [C_1, C_2, \dots, C_n]$.

Demonstração. Como $T(u_i) \in \operatorname{Im}(T)$, para todo $i = 1, \dots, n$, segue que

$$\big[T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\big] \subseteq \operatorname{Im}(T).$$

Para a outra inclusão, tome $v \in V$ tal que $v \in \operatorname{Im}(T)$. Então, existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$. Como $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$. Assim,

$$\begin{aligned} v = T(u) &= T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n) \\ &= \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) + \cdots + \lambda_n T(u_n), \end{aligned}$$

uma vez que T é uma transformação linear. Isso mostra que v está no subespaço $\big[T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\big]$. Como o argumento vale para qualquer vetor v de $\operatorname{Im}(T)$, obtemos

$$\operatorname{Im}(T) \subseteq \big[T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\big],$$

como queríamos. □

A Proposição 6.2.9 deve ser utilizada com cuidado. Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de U, então ela diz que $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ gera $\operatorname{Im}(T)$, mas, em geral, esse conjunto não será uma base de $\operatorname{Im}(T)$, pois não será LI.

Note que essa proposição permite argumentar mais diretamente, no Exemplo 6.2.7, por que $\operatorname{Im}(T_A)$ é o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas de A, já que se $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então, $\operatorname{Im}(T_A) = [T_A(e_1), T_A(e_2), \dots, T_A(e_n)]$. Mas, $T_A(e_j) = Ae_j$, e o leitor pode facilmente verificar que o vetor de $\mathbb{R}^m$ obtido pela multiplicação matricial Ae_j é precisamente a j-ésima coluna da matriz A.

Exemplo 6.2.10. Encontre uma base para a imagem da transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T\colon \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \\ (a, b, c) & \longmapsto & (a+b) + (a+c)t + (-b+c)t^2 + (a+c)t^3 \end{array}$$

Solução. Convença-se que T é, de fato, uma transformação linear. A base canônica

$$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ é, em particula, um conjunto gerador. Pela Proposição 6.2.9,

$$\operatorname{Im}(T) = \big[T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\big].$$

Por definição da transformação linear T,

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= 1 + t + t^3, \\ T(0,1,0) &= 1 - t^2, \\ T(0,0,1) &= t + t^2 + t^3. \end{aligned}$$

Logo, $\{1+t+t^3, 1-t^2, t+t^2+t^3\}$ gera $\operatorname{Im}(T)$, mas não é uma base, pois não é LI: $t+t^2+t^3 = (1+t+t^3) - (1-t^2)$. Por causa dessa relação de dependência linear existente entre os geradores de $\operatorname{Im}(T)$, sabemos que $\operatorname{Im}(T)$ pode ser gerado por $\{1+t+t^3, 1-t^2\}$. Como, agora sim, esse último conjunto é LI, ele é uma base de $\operatorname{Im}(T)$. $\Diamond$

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 5–16.

6.3 Teorema do núcleo e da imagem

O fenômeno ocorrido no Exemplo 6.2.7, em que as dimensões do núcleo e da imagem de uma transformação linear estão relacionadas, é geral, como mostra o próximo importante resultado.

Teorema 6.3.1. *Seja U um espaço vetorial de dimensão finita, seja V um espaço vetorial arbitrário e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Então,* $\operatorname{Ker}(T)$ *e* $\operatorname{Im}(T)$ *têm dimensão finita e vale*

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = \dim(U). \tag{6.3}$$

Demonstração. Como $\operatorname{Ker}(T)$ é um subespaço de U e U tem dimensão finita, segue que $\operatorname{Ker}(T)$ tem dimensão finita.

Vejamos, agora, o que se pode dizer de $\operatorname{Im}(T)$. Seja $\{u_1, \dots, u_k\}$ uma base de $\operatorname{Ker}(T)$ (em particular, estamos supondo que $k = \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big)$). Como esse subconjunto de U é LI, pelo Teorema do completamento (Teorema 4.5.14), ele pode ser completado a uma base de U, isto é, existem $u_{k+1}, \dots, u_n \in U$ tais que $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ é uma base de U (e, assim, $n = \dim(U)$). Mostremos que $\mathcal{D} = \{T(u_{k+1}), \dots, T(u_n)\}$ é uma base de $\operatorname{Im}(T)$. Com efeito, vimos, na Proposição 6.2.9, que

$$\operatorname{Im}(T) = \big[T(u_1), \dots, T(u_k), T(u_{k+1}), \dots, T(u_n)\big].$$

Mas, pela construção dessa base de U, $u_1, \dots, u_k \in \operatorname{Ker}(T)$, isto é, $T(u_1) = \cdots = T(u_k) = 0_V$. Assim, esses vetores podem ser removidos do conjunto gerador de $\operatorname{Im}(T)$, resultando em $\operatorname{Im}(T) = \big[\mathcal{D}\big]$. Para concluir, resta mostrar que $\mathcal{D}$ é LI. Sejam $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_{k+1}T(u_{k+1}) + \cdots + \lambda_n T(u_n) = 0_V. \tag{6.4}$$

Porque T é uma transformação linear, (6.4) é equivalente a

$$T(\lambda_{k+1}u_{k+1} + \cdots + \lambda_n u_n) = 0_V,$$

o que implica que $\lambda_{k+1}u_{k+1} + \cdots + \lambda_n u_n \in \operatorname{Ker}(T)$. Mas, lembremos que $\operatorname{Ker}(T) = [u_1, \dots, u_k]$. Assim, existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tais que

$$\lambda_{k+1}u_{k+1} + \cdots + \lambda_n u_n = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k. \tag{6.5}$$

Agora, de (6.5), segue que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k + (-\lambda_{k+1}) u_{k+1} + \cdots + (-\lambda_n) u_n = 0_U. \tag{6.6}$$

Como $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ é LI (pois é uma base de U), obtém-se que todos os coeficientes na combinação linear do lado esquerdo de (6.6) são nulos. Em particular, $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, provando que $\mathcal{D}$ é LI.

Assim $\mathcal{D}$ é uma base de $\operatorname{Im}(T)$ e, portanto, $\operatorname{Im}(T)$ tem dimensão finita. Além disso, a dimensão de $\operatorname{Im}(T)$ é igual ao número de vetores de $\mathcal{D}$; portanto, $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = n - k = \dim(U) - \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big)$, que, por sua vez, pode se reescrever na forma (6.3). $\square$

Esse resultado é conhecido como *Teorema do núcleo e da imagem* ou *Teorema da dimensão*.

O Teorema do núcleo e da imagem tem inúmeras aplicações. Por exemplo, é possível utilizá-lo para argumentar sobre a injetividade de uma transformação linear conhecendo a dimensão de sua imagem, como no próximo exemplo.

Exemplo 6.3.2. Mostre que a transformação linear

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ & p & \longmapsto & tp' + t^2 p \end{array}$$

é injetora.

Solução. Vimos, no Exemplo 6.2.4, que $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 3$. Usando o Teorema do núcleo e da imagem, conclui-se que

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = \dim\big(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\big) - \dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 3 - 3 = 0.$$

Logo, $\operatorname{Ker}(T) = \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\}$ e, portanto, segue da Proposição 6.2.5 que T é injetora. $\diamondsuit$

Uma função é dita sobrejetora quando todos os pontos de seu contradomínio são atingidos por imagens de pontos no domínio (ver Apêndice C). Assim, se $T\colon U \to V$ é uma transformação linear, T será sobrejetora precisamente quando $\operatorname{Im}(T) = V$. Visto isso, uma consequência útil do Teorema do núcleo e da imagem é a seguinte.

Corolário 6.3.3. *Sejam U e V espaços vetoriais, ambos de dimensão finita, com* $\dim(U) = \dim(V)$*, e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. São equivalentes:*

(a) *T é bijetora;*

(b) *T é injetora;*

(c) *T é sobrejetora.*

Demonstração. Juntanto a hipótese $\dim(U) = \dim(V)$ com (6.3), obtemos

$$\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(V) - \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big).$$

Assim, $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(V)$ se, e somente se, $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 0$. Em vista das Proposições 4.7.1 e 6.2.5, segue que T é sobrejetora se, e somente se, T for injetora. Portanto, as duas condições são equivalentes a T ser bijetora. $\square$

Não é demais ressalvar que a hipótese de U e V serem espaços vetoriais de *mesma dimensão finita* é essencial: no Exemplo 6.3.2, T é injetora, mas obviamente não é sobrejetora; no Exemplo 6.2.3, T não é injetora (pois $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1 \neq 0$), mas é sobrejetora (uma vez que $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$).

Exemplo 6.3.4. Neste ponto, retomaremos o Exemplo 6.2.7 para ver uma segunda demonstração (diferente da que foi apresentada no Apêndice B) de que o posto-linha e o posto-coluna de uma matriz coincidem.

Seja $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Podemos pensar nas linhas de A como vetores de $\mathbb{R}^n$: para cada $i = 1, \dots, m$, seja

$$u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n,$$

e nas colunas de A como elementos de $\mathbb{R}^m$: para cada $j = 1, \dots, n$, seja

$$v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m.$$

Denotamos por $L(A) = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas m linhas de A e por $C(A) = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas n colunas de A. Nosso objetivo será mostrar que $\dim\big(L(A)\big) = \dim\big(R(A)\big)$.

Conforme vimos no Exemplo 6.2.7, $C(A) = \mathrm{Im}(T_A)$, em que $T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a transformação linear definida por $T_A(u) = Au$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema do núcleo e da imagem, segue que $\dim\big(C(A)\big) = n - \dim\big(\mathrm{Ker}(T_A)\big)$. Agora, também vimos naquele exemplo que se t denota o número de pivôs de uma matriz escalonada R obtida a partir de A por operações elementares sobre linhas, então $\dim\big(\mathrm{Ker}(T_A)\big) = n - t$. Segue que $\dim\big(C(A)\big) = n - (n - t) = t$. Mas t é a dimensão do espaço gerado pelas linhas de R (porque R é escalonada), que coincide com $L(A)$ (pois operações elementares sobre linhas não alteram o espaço gerado pelas linhas). Portanto, $\dim\big(L(A)\big) = \dim\big(R(A)\big)$. Esse número é comumente chamado *posto* da matriz A. $\diamondsuit$

Transformações bijetoras. Toda função bijetora é inversível. Em particular, se U e V são espaços vetoriais e $T \colon U \to V$ é uma transformação linear bijetora, então existe uma função $T^{-1} \colon V \to U$ que é a inversa de T. Essa função é tal que para todos $v \in V$ e $u \in U$,

$$T^{-1}(v) = u \quad \text{se, e somente se,} \quad T(u) = v.$$

(Consulte o Apêndice C para detalhes sobre invertibilidade de funções.) Não é imediato da definição de função inversa que T^{-1} seja, também, linear. Esse é o conteúdo do próximo resultado.

Proposição 6.3.5. *Sejam U e V espaços vetoriais e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Se T é bijetora, então a função inversa $T^{-1}\colon V \to U$ é uma transformação linear.*

Demonstração. A tarefa é mostrar que T^{-1} satisfaz as condições (1) e (2) na definição de transformação linear, na página 183. Sejam $v_1, v_2 \in V$. Então, $v_1 = T\big(T^{-1}(v_1)\big)$ e $v_2 = T\big(T^{-1}(v_2)\big)$, e, portanto,

$$v_1 + v_2 = T\big(T^{-1}(v_1)\big) + T\big(T^{-1}(v_2)\big) = T\big(T^{-1}(v_1) + T^{-1}(v_2)\big),$$

pois T é linear. Segue que $T^{-1}(v_1 + v_2) = T^{-1}(v_1) + T^{-1}(v_2)$, e a condição (1) está satisfeita.

Tome, agora, $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$\lambda v = \lambda T\big(T^{-1}(v)\big) = T\big(\lambda T^{-1}(v)\big),$$

uma vez que T é linear. Daí, obtemos $T^{-1}\big(\lambda v\big) = \lambda T^{-1}(v)$, o que verifica a condição (2). Logo, T^{-1} é, de fato, uma transformação linear. $\square$

Exemplo 6.3.6. Mostre que a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T\colon \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a+c) + (a-c)t + bt^2 \end{array}$$

é bijetora e determine sua inversa.

Solução. Porque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim\big(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\big)$, segue do Corolário 6.3.3, que para mostrar que T é bijetora é suficiente mostrar, por exemplo, que T é injetora. Vejamos, dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, temos $(a,b,c) \in \operatorname{Ker}(T)$ se, e somente se, $(a+c) + (a-c)t + bt^2 = T(a,b,c) = 0$. Isso ocorre apenas quando $a = b = c = 0$. Assim, $\operatorname{Ker}(T) = \big\{(0,0,0)\big\}$, o que, pela Proposição 6.2.5, garante que T é injetora; e, como vimos, bijetora.

Agora, procuremos uma expressão para inversa $T^{-1}\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ de T. Dado $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, com $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, temos: $T^{-1}(p) = (a,b,c)$ se, e somente se, $T(a,b,c) = p$, o que, por sua vez, é equivalente a

$$(a+c) + (a-c)t + bt^2 = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2.$$

Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, a igualdade acima ocorre se, e só se,

$$\begin{cases} a + c = \alpha_0 \\ a - c = \alpha_1 \\ b = \alpha_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para a, b, c, em termos de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, obtemos

$$a = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}, \qquad b = \alpha_2, \qquad c = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2},$$

de modo que

$$T^{-1}(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2) = \left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}, \alpha_2, \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}\right).$$

é a expressão da inversa de T. $\Diamond$

Há outras consequências interessantes do Teorema do núcleo e da imagem. Por exemplo:

Corolário 6.3.7. *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Valem:*

(i) *Se T é injetora, então* $\dim(U) \leq \dim(V)$.

(ii) *Se T é sobrejetora, então* $\dim(U) \geq \dim(V)$.

(iii) *Se T é bijetora, então* $\dim(U) = \dim(V)$

Demonstração. Para mostrar (i), suponha que T seja injetora, ou seja, que $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 0$; logo, segue do Teorema do núcleo e da imagem que

$$\dim(U) = \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) + \dim\big((\operatorname{Im}(T)\big) = \dim\big((\operatorname{Im}(T)\big) \leq \dim(V),$$

pois $\operatorname{Im}(T)$ é um subespaço de V. Para ver que (ii) vale, suponha que T é sobrejetora, ou seja, que $\operatorname{Im}(T) = V$. Pelo Teorema do núcleo e da imagem, segue que

$$\begin{aligned}\dim(U) &= \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) + \dim\big((\operatorname{Im}(T)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) + \dim(V) \\ &\geq \dim(V).\end{aligned}$$

Finalmente, (iii) segue de (i) e (ii). $\square$

Esse corolário pode ser lido na contrapositiva: sejam U e V são espaços vetoriais de dimensão finita. Então,

- se $\dim(U) > \dim(V)$, não existe transformação linear $U \to V$ injetora;
- se $\dim(U) < \dim(V)$, não existe transformação linear $U \to V$ sobrejetora.

Exemplo 6.3.8. (Prova 1, Álgebra Linear II, 2016) Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T\colon V \to W$ uma transformação linear. Considere as seguintes afirmações:

I. Se T é injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$.

II. Se $\dim(V) \leq \dim(W)$, então T é injetora.

III. Se T é sobrejetora, então $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Está correto o que se afirma em

(A) I e II, apenas.

(B) II, apenas.

(C) II e III, apenas.

(D) I e III, apenas.

(E) I, II e III.

Solução. Vimos, no Corolário 6.3.7, que I e III são verdadeiras. A afirmação II é a recíproca da afirmação I. Ela é falsa. Há muitas transformações lineares $T\colon V \to W$ não injetoras quando $\dim(V) \leq \dim(W)$. Por exemplo, se $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$, a transformação nula (isto é, a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y) = (0,0,0)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) não é injetora, apesar de $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. *Resposta:* (D). $\Diamond$

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 17–27.

6.4 Operações com transformações lineares

Sejam U, V, W espaços vetoriais e sejam $T\colon U \to V$ e $S\colon V \to W$ transformações lineares. Então, está definida a função composta (ver Apêndice C) $S \circ T\colon U \to W$, que satisfaz

$$(S \circ T)(u) = S\big(T(u)\big), \quad \text{para todo } u \in U.$$

Se $T_1\colon U \to V$ é outra transformação linear, também está definida a função $T + T_1\colon U \to V$, por

$$(T + T_1)(u) = T(u) + T_1(u), \quad \text{para todo } u \in U.$$

E, finalmente, se $\alpha \in \mathbb{R}$ é um escalar fixado, podemos considerar a função $\alpha T\colon U \to V$, definida por

$$(\alpha T)(u) = \alpha T(u), \quad \text{para todo } u \in U.$$

Todas essas construções resultam em transformações lineares:

Proposição 6.4.1. *Sejam U, V e W espaços vetoriais, seja $\alpha \in \mathbb{R}$, e sejam $T, T_1\colon U \to V$ e $S\colon V \to W$ transformações lineares. Então $S \circ T$, $T + T_1$ e αT são transformações lineares.*

Demonstração. Sejam $u_1, u_2 \in U$. Temos:

$$\begin{aligned}(S \circ T)(u_1 + u_2) &= S\big(T(u_1 + u_2)\big)\\ &= S\big(T(u_1) + T(u_2)\big) \quad \text{(pois } T \text{ é linear)}\\ &= S\big(T(u_1)\big) + S\big(T(u_2)\big) \qquad \text{(pois } S \text{ é linear)}\\ &= (S \circ T)(u_1) + (S \circ T)(u_2).\end{aligned}$$

Similarmente, dados $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(S \circ T)(\lambda u) = S\big(T(\lambda u)\big) = S\big(\lambda T(u)\big) = \lambda\big(S(T(u)\big) = \lambda(S \circ T)(u).$$

Fica a cargo do leitor mostrar que $T + T_1$ e αT satisfazem as condições para serem transformações lineares. □

Dado um espaço vetorial U, se $T\colon U \to U$ é um operador linear de U, podemos considerar o operador $T \circ T\colon U \to U$, resultante da composição de T consigo mesmo. Esse operador linear será denotado por T^2. De maneira análoga, se n é um inteiro maior do que 2, denotaremos

$$T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T,$$

em que há n ocorrências de T.

Essas construções serão especialmente relevantes no estudo de autovalores de um operador linear, assunto a ser tratato no Capítulo 7.

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 28–30.

6.5 Matriz de uma transformação linear

Neste seção, será introduzida a mais importante ferramenta de análise de uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita, a matriz da transformação linear.

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, digamos $\dim(U) = n$ e $\dim(V) = m$, e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Fixe bases ordenadas $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de U e $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ de V.

Para cada $j = 1, \dots, n$, o vetor $T(u_j)$ pertence ao espaço vetorial V; logo, se escreve como combinação linear dos elementos da base $\mathcal{C}$, ou seja, existem $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj} \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m. \tag{6.7}$$

Considere, agora, a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$, de tamanho $m \times n$, cuja j-ésima coluna é formada pelas coordenadas $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ de $T(u_j)$ em relação à base $\mathcal{C}$:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Essa matriz é denominada *matriz da transformação linear T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.*

Veremos que esse elemento de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ codifica a informação completa sobre a transformação linear T. Mas, primeiramente, a fim de fixar a definição, vejamos exemplos de construção da matriz de uma transformação linear.

Exemplo 6.5.1. Considere a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T\colon \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \\ (a,b,c) & \longmapsto & (2a+c)+(b-2c)t \end{array}$$

e as bases canônicas $\mathcal{C}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\mathcal{D}=\{1,t\}$ de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, respectivamente. Encontre a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$.

Solução. Comecemos por deteminar o tamanho da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$. Conforme vimos, o número de colunas de $[T]_{\mathcal{BC}}$ é igual à dimensão do domínio de T, no caso, $3=\dim(\mathbb{R}^3)$; o número de linhas de $[T]_{\mathcal{BC}}$ é igual é igual à dimensão do contradomínio de T, no caso, $2=\dim\big(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\big)$. Assim, já sabemos que $[T]_{\mathcal{BC}}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Para determinar suas entradas, precisamos encontrar as coordenadas, em relação a $\mathcal{C}$, da imagem por T de cada um dos três vetores de $\mathcal{B}$. Vejamos,

$$T(1,0,0)=2=2\cdot 1+0\cdot t \tag{6.8}$$

$$T(0,1,0)=t=0\cdot 1+1\cdot t \tag{6.9}$$

$$T(0,0,1)=1-2t=1\cdot 1+(-2)\cdot t \tag{6.10}$$

A primeira coluna de $[T]_{\mathcal{BC}}$ contém as coordenadas, em relação a $\mathcal{C}$, da imagem por T do primeiro vetor da base ordenada $\mathcal{B}$ (que é $(1,0,0)$), assim, conforme (6.8), as duas entradas na primeira coluna de $[T]_{\mathcal{BC}}$ são 2 e 0:

$$[T]_{\mathcal{BC}}=\begin{bmatrix} 2 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}.$$

Falta preencher as outras duas colunas de $[T]_{\mathcal{BC}}$, temporariamente em branco. Para a segunda coluna, precisamos das coordenadas, em relação a $\mathcal{C}$, de $T(0,1,0)$, uma vez que $(0,1,0)$ é o segundo vetor de $\mathcal{B}$; logo, de (6.9), obtemos

$$[T]_{\mathcal{BC}}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{bmatrix}.$$

Finalmente, sendo $(0,0,1)$ o terceiro vetor da base ordenada $\mathcal{B}$, obtemos de (6.10) que as entradas na terceira coluna de $[T]_{\mathcal{BC}}$ são as coordenadas de $T(0,0,1)$ em relação à base $\mathcal{C}$:

$$[T]_{\mathcal{BC}}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \Diamond$$

O tamanho da matriz de uma transformação linear só depende das *dimensões* de seu domínio e contradomínio. Porém, suas entradas são sensíveis às *bases ordenadas* específicas que foram escolhidas.

Exemplo 6.5.2. Para a mesma transformação linear do exemplo anterior, determine $[T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_1}$ e $[T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}$, em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, respectivamente, a base ordenada $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{ (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0) \},$$

e a base ordenada $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ é dada por

$$\mathcal{C}_1 = \{ 1+t, 2+t \}.$$

Solução. Note que $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{C}_1$ são, de fato, bases de seus respectivos espaços. As três matrizes têm tamanho 2×3. Comecemos por $[T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}}$. Precisamos das coordenadas, em relação à base $\mathcal{C}$, das imagens, por T, dos vetores de $\mathcal{B}_1$. Como

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= 3 - t = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot t \\ T(1,1,0) &= 2 + t = 2 \cdot 1 + 1 \cdot t \\ T(1,0,0) &= 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot t, \end{aligned}$$

segue que

$$[T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_1}$, é preciso decompor as imagens, por T, de cada um dos elementos de $\mathcal{B}$ como combinação linear dos elementos de $\mathcal{C}_1$. Efetuando os cálculos necessários[3], obtemos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= 2 = (-2)(1+t) + 2(2+t) \\ T(0,1,0) &= t = 2(1+t) + (-1)(2+t) \\ T(0,0,1) &= 1 - 2t = (-5)(1+t) + 3(2+t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

[3] Por exemplo, para determinar as coordenadas de $T(0,0,1) = 1 - 2t$ em relação à base $\mathcal{C}_1$, escrevemos $1 - 2t = \alpha(1+t) + \beta(2+t) = (\alpha + 2\beta) + (\alpha + \beta)t$, donde segue que $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha + \beta = -2 \end{cases}$. A solução desse sistema é $\alpha = -5$ e $\beta = 3$.

Finalmente, de

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= 3 - t = (-5)(1+t) + 4(2+t) \\ T(1,1,0) &= 2 + t = 0(1+t) + 1(2+t) \\ T(1,0,0) &= 2 = (-2)(1+t) + 2(2+t), \end{aligned}$$

segue que

$$[T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Todas as matrizes obtidas têm tamanho 2×3. $\diamondsuit$

Aas quatro matrizes $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_1}$ e $[T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}$ obtidas nos dois exemplos anteriores são diferentes, mas são, todas, matrizes da *mesma* transformação linear. Qual é a relação que existe entre elas? Essa pergunta será abordada na Seção 6.7.

Quando se trata de um operador linear, podemos considerar a matriz do operador em relação à mesma base na "saída" e "chegada".

Exemplo 6.5.3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita igual a n, seja I_V o operador identidade de V e seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de V. Descreva $[\mathrm{I}_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

Solução. O operador identidade satisfaz $\mathrm{I}_V(v) = v$, para todo $v \in V$, em particular, fixa também os elementos de $\mathcal{B}$. Mais detalhadamente, se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, então, $\mathrm{I}_V(v_j) = v_j$, para todo $i = 1, \dots, n$. Isso que dizer que a j-ésima coluna de $[\mathrm{I}_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ contém zeros em todas as suas entradas, exceto na posição j, onde ocorre o número 1. Essa matriz é a matriz identidade: $[\mathrm{I}_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n$. $\diamondsuit$

Tomando bases diferentes, a matriz do operador identidade deixa de ser a matriz identidade, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 6.5.4. Calcule $[\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, em que $\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}$ denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$ e as bases ordenadas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ são dadas por

$$\mathcal{B} = \{\, (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0) \,\}$$

e

$$\mathcal{C} = \{\, (-1,0,-1), (-1,1,0), (0,1,0) \,\}.$$

Solução. Sabemos, do exemplo anterior, que $[\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = I_3$. Mas,

$$[\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que, como o leitor pode, ele mesmo, calcular,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}(1,1,1) &= (1,1,1) = (-1)(-1,0,-1) + 0(-1,1,0) + 1(0,1,0)\\
\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}(1,1,0) &= (1,1,0) = 0(-1,0,-1) + (-1)(-1,1,0) + 2(0,1,0)\\
\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}(1,0,0) &= (1,0,0) = 0(-1,0,-1) + (-1)(-1,1,0) + 1(0,1,0)\Diamond
\end{aligned}$$

Exemplo 6.5.5. Voltemos à família de transformações lineares estudadas no Exemplo 6.2.7. Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, seja $T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a transformação linear definida por $T_A(u) = Au$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Então, $[T_A]_{\mathcal{BC}} = A$.

Com efeito, se $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\mathcal{D} = \{f_1, \dots, f_m\}$, então

$$T(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{mj}f_m,$$

para todo $j = 1, \dots, n$. $\Diamond$

Como usar a matriz de uma transformação linear. Como já dito, o principal uso da matriz de uma transformação linear é no sentido de codificá-la (a transformação) em um objeto compacto, uma matriz. É disso que trataremos agora.

Antes de começar, introduziremos um notação. Vimos, na Seção 4.6, que, dado um espaço vetorial U de dimensão finita igual a n e uma base ordenada $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de U, associamos a cada elemento $u \in U$ um elemento de $\mathbb{R}^n$, suas coordendas: se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são tais que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$, escrevemos

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}.$$

Também nos será útil, por meio da identificação usual dos elementos de $\mathbb{R}^n$ com matrizes de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, utilizar a seguinte notação para nos referirmos às coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}$:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

É comum denominar $[u]_{\mathcal{B}}$ o *vetor de coordenadas* de u em relação à base ordenada $\mathcal{B}$.

Aqui, é importante notar que, como demonstra a Proposição 4.6.1, as operações de soma e multiplicação por escalar em U, por meio da associação de cada elemento de U com seu vetor de coordenadas, refletem-se precisamente nas operações usuais que conferem a $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ uma estrutura de espaço vetorial (conforme o Exemplo 4.1.4). Em resumo, se $u, v \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$[u+v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}} \qquad \text{e} \qquad [\lambda u]_{\mathcal{B}} = \lambda[u]_{\mathcal{B}}.$$

Voltemos, agora, à matriz de uma transformação linear. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, digamos $\dim(U) = n$ e $\dim(V) = m$, e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Fixe uma base ordenada $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de U e uma base ordenada $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ de V e considere a matriz $[T]_{\mathcal{BC}} = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Tomemos, agora, um elemento $u \in U$ e vejamos como utilizar a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ para descrever $T(u)$. Suponha que $u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}$. Então,

$$\begin{aligned}
T(u) &= T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n) \\
&= \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) + \cdots + \lambda_n T(u_n) \\
&= \lambda_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{m1}v_1) + \lambda_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{m2}v_1) \\
&\qquad + \cdots + \lambda_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{m1}v_n) \quad \text{(por (6.7))} \\
&= (a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1n}\lambda_n)v_1 + (a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2n}\lambda_n)v_2 \\
&\qquad + \dots (a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_n)v_m.
\end{aligned}$$

A expressão que obtivemos acima permite descrever as coordenadas de $T(u)$ em relação a $\mathcal{C}$ em termos das coordenadas de u em relação a $\mathcal{B}$ e das entradas de $[T]_{\mathcal{BC}}$: mostramos que a i-ésima coordenada de $T(u)$ em relação à base $\mathcal{C}$ coincide com o produto da i-ésima linha da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ pelo vetor de coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}$, ou em termos de um produto entre matrizes,

$$[T(u)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = [T]_{\mathcal{BC}}[u]_{\mathcal{B}}.$$

Essa igualdade é tão importante, que vamos enunciá-la na forma de um teorema (que acabamos de demonstrar).

Teorema 6.5.6. *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de U e de V, respectivamente. Então,*

$$[T(u)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{BC}}[u]_{\mathcal{B}}, \tag{6.11}$$

para todo $u \in U$.

Vejamos um exemplo em que usamos (6.11) para encontrar a imagem de um elemento por uma transformação linear.

Exemplo 6.5.7. Retomando os Exemplos 6.5.1 e 6.1.2, vimos que para a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T\colon \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \\ (a,b,c) & \longmapsto & (2a+c) + (b-2c)t \end{array}$$

temos

$$[T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{6.12}$$

em que as bases envolvidas são

$$\mathcal{B}_1 = \{\, (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0) \,\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{C}_1 = \{\, 1+t, 2+t \,\}.$$

Considere o vetor $u = (2,1,-1)$ de $\mathbb{R}^3$. Encontre o vetor $T(u)$ de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ usando a matriz $[T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}$.

Solução. Sabemos, do Teorema 6.5.6, que

$$[T(u)]_{\mathcal{C}_1} = [T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}[u]_{\mathcal{B}_1}. \tag{6.13}$$

A matriz $[T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}$ é conhecida. Consideremos o segundo fator no produto do lado direito da igualdade, o vetor de coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}_1$. Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, temos: $u = (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}_1}$ se, e somente se,

$$(2,1,-1) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0).$$

Resolvendo o sistema linear que decorre dessa igualdade, obtemos

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 2, \qquad \gamma = 1.$$

Assim,

$$[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.14}$$

Logo, substituindo (6.12) e (6.14) em (6.13), obtemos

$$[T(u)]_{\mathcal{C}_1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isso quer dizer que $T(u) = 3(1+t) + 0(2+t) = 3 + 3t$, já que os vetores de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ que compõem a base $\mathcal{C}_1$ são $1+t$ e $2+t$, nessa ordem. $\diamondsuit$

O exemplo anterior é um tanto artificial, pois já conhecíamos a expressão de $T(a,b,c)$ para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. O fato é que podemos fornecer apenas a matriz de uma transformação linear a fim de descrevê-la completamente.

Exemplo 6.5.8. Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{D}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

em que as bases ordenadas de $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ são dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{D} = \{\, (0,1), (1,1) \,\}, \qquad \mathcal{E} = \{\, (0,-1,0), (2,1,0), (0,1,2) \,\}.$$

Encontre a expressão de $T(x,y)$ e determine $\operatorname{Im}(T)$.

Solução. Antes de começar, cabem dois comentários. Note que $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$, de fato, são LI, e, portanto, bases de seus respectivos espaços. Observe, também, que $[T]_{\mathcal{D}\mathcal{E}} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, o que está de acordo com as dimensões de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Sabemos, pelo Teorema 6.5.6, que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, vale:

$$[T(x,y)]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{D}\mathcal{E}}[(x,y)]_{\mathcal{D}}.$$

Fixado um vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, suponha que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sejam tais que

$$[(x,y)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Isso quer dizer que $(x,y) = \alpha(0,1) + \beta(1,1) = (\beta, \alpha+\beta)$. Assim,

$$\begin{cases} \beta = x \\ \alpha + \beta = y \end{cases},$$

donde segue que $\alpha = -x + y$ e $\beta = x$. Portanto,

$$[T(x,y)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x+y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y \\ -3x+2y \\ 4x-3y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= (-x+y)(0,-1,0) + (-3x+2y)(2,1,0) + (4x-3y)(0,1,2) \\ &= (-6x+4y, 2x-2y, 8x-6y). \end{aligned}$$

Agora, para determinar a imagem de T, sabemos, da Proposição 6.2.9, que, como $\mathcal{D}$ gera $\mathbb{R}^2$, então,

$$\operatorname{Im}(T) = \big[T(0,1), T(1,1)\big] = \big[(4,-2,-6), (-2,0,2)\big].$$

Poderíamos ter encontrado $\operatorname{Im}(T)$ sem ter tido que encontrar, antes, uma expressão da imagem por T de um elemento genérico do domínio. O argumento seria o seguinte. Como

$$[(0,1)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [(1,1)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

segue que

$$[T(0,1)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

e

$$[T(1,1)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathrm{Im}(T) = \big[T(0,1), T(1,1)\big] = \big[(1,2,-3)_{\mathcal{E}}, (0,-1,1)_{\mathcal{E}}\big]$, que resulta no mesmo conjunto gerador para a imagem que encontramos acima.

Observe que, para essa segunda solução, a informação a respeito de quais são os elementos de $\mathcal{D}$ é dispensável, uma vez que sabemos que a imagem de T é gerada pelas imagens dos elementos em uma base de $\mathbb{R}^2$ e as colunas de $[T]_{\mathcal{DE}}$ são precisamente as coordenadas, em relação a $\mathcal{E}$, das imagens dos elementos da base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Este fato é, assim, suficiente para descrevermos $\mathrm{Im}(T)$: ela é gerada pelas colunas de $[T]_{\mathcal{DE}}$ lidas como coordenadas em relação à base $\mathcal{E}$. $\Diamond$

Observação. O argumento que fizemos no final do exemplo acima generaliza-se. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, digamos $\dim(U) = n$ e $\dim(V) = m$, sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de U e de V, respectivamente, e seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear $T\colon U \to V$ tal que $[T]_{\mathcal{BC}} = A$. Então, $\mathrm{Im}(T)$ é gerada pelas colunas de A lidas como vetores de coordenadas em relação à base $\mathcal{C}$. $\Diamond$

Exemplo 6.5.9. Considere a transformação linear $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que satisfaz

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

em que a base ordenada $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$ é dada por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e $\mathcal{C}$ denota uma base ordenada fixa de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Descreva o núcleo de T.

Solução. Os dados são compatíveis: o tamanho de $[T]_{\mathcal{BC}}$ está de acordo com as dimensões de $M_2(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, e $\mathcal{B}$, de fato, é uma base de $M_2(\mathbb{R})$. Mas parece haver falta de informação no enunciado, uma vez que não é dito quem são os elementos de $\mathcal{C}$. Veremos que, apesar de não termos informação completa sobre T, ainda assim, com a informação de que dispomos, é possível descrever completamente seu núcleo.

Dado $u \in M_2(\mathbb{R})$, sabemos que $u \in \mathrm{Ker}(T)$ se, e somente se, $T(u) = 0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$. Dois vetores são iguais precisamente quando têm as mesmas coordenadas em relação a uma base; além disso, o vetor nulo é o único vetor cujas coordenadas são todas nulas. Assim, usando (6.11), podemos escrever

$$u \in \mathrm{Ker}(T) \iff \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C}} = [T(u)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{BC}}[u]_{\mathcal{B}}. \tag{6.15}$$

Suponha que $u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)_{\mathcal{B}}$. Então, a condição que define os vetores de $\mathrm{Ker}(T)$, em (6.15), pode ser reescrita em termos de as coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}$ serem soluções de um sistema linear homogêneo:

$$u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para resolver esse sistema, recorremos ao processo de escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que é escalonada. Assim, β e δ são variáveis livres, e, escrevendo as variáveis pivô em termos das livres, concluímos que os vetores de $\operatorname{Ker}(T)$ são exatamente os vetores da forma

$$\left(-2\beta + \frac{\delta}{2}, \beta, \frac{\delta}{2}, \delta\right)_{\mathcal{B}} = \beta(-2,1,0,0)_{\mathcal{B}} + \delta\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)_{\mathcal{B}},$$

com $\beta, \delta \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\operatorname{Ker}(T) = \left[(-2,1,0,0)_{\mathcal{B}}, \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)_{\mathcal{B}}\right] = \left[(-2,1,0,0)_{\mathcal{B}}, (1,0,1,2)_{\mathcal{B}}\right].$$

Como

$$\begin{aligned}(-2,1,0,0)_{\mathcal{B}} &= (-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(1,0,1,2)_{\mathcal{B}} &= 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

concluímos que

$$\operatorname{Ker}(T) = \left[\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right]. \Diamond$$

Observação. Aqui, também, o método pode ser generalizado. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, digamos $\dim(U) = n$ e $\dim(V) = m$, sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de U e de V, respectivamente, e seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear $T \colon U \to V$ tal que $[T]_{\mathcal{BC}} = A$.

Então, $\mathrm{Ker}(T)$ é formado pelas soluções do sistema linear homogêneo cuja matriz de coeficientes é A lidas como coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$. Em particular, $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = n - \mathrm{posto}(A)$ e, usando o Teorema do núcleo e da imagem (Teorema 6.3.1), $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \mathrm{posto}(A)$. ♢

Nos Exemplos 6.5.8 e 6.5.9 foi tacitamente assumido que existem transformações com as matrizes especificadas. Elas, de fato, existem. Na realidade, se estão fixadas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de espaços vetoriais de dimensão finita U e V, respectivamente, dada qualquer matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, em que $m = \dim(V)$ e $n = \dim(U)$, existe uma, e somente uma, transformação linear $T\colon U \to V$ tal que $[T]_{\mathcal{BC}} = A$, conforme o enunicado do nosso próximo resultado.

Teorema 6.5.10. *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, digamos $\dim(U) = n$ e $\dim(V) = m$, e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de U e de V, respectivamente.*

Se $T\colon U \to V$ é uma transformação linear, então existe uma única matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$[T(u)]_{\mathcal{C}} = A[u]_{\mathcal{B}},$$

para todo $u \in U$. Essa matriz é chamada matriz da transformação linear T em relação à bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ *e é denotada por $[T]_{\mathcal{BC}}$.*

Além disso, se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, então existe uma única transformação linear $T\colon U \to V$ tal que $[T]_{\mathcal{BC}} = A$.

Demonstração. Dada a transformação linear $T\colon U \to V$, a existência de uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ que satisfaz $[T(u)]_{\mathcal{C}} = A[u]_{\mathcal{B}}$, para todo $u \in U$, foi provada na construção no início da seção e no Teorema 6.5.6: basta tomar $A = [T]_{\mathcal{BC}}$.

Tratemos da unicidade de A. Suponha que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Comecemos por observar que para cada $j = 1, \dots, n$, o vetor de coordenadas de u_j em relação à base $\mathcal{B}$ é a matriz $n \times 1$ cujas entradas são todas nulas, exceto a j-ésima, que é igual a 1. Assim, se M é qualquer matriz com n colunas, então

$$M[u_j]_{\mathcal{B}} = M \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

que é precisamente a j-ésima coluna da matriz M. Isso implica que se $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz satisfaz $[T(u)]_{\mathcal{C}} = B[u]_{\mathcal{B}}$, para todo $u \in U$, em particular, para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$B[u_j]_{\mathcal{B}} = [T(u_j)]_{\mathcal{C}} = A[u_j]_{\mathcal{B}}.$$

Ou seja, a j-ésima coluna de B coincide com a j-ésima coluna de A. Como isso vale para todo $j = 1, \ldots, n$, segue que $B = A$.

Por fim, mostremos a última afirmação do enunciado. Dada $A = (\lambda_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, pela Proposição 6.1.9, existe uma transformação linear $T\colon U \to V$ que satisfaz

$$T(u_j) = \lambda_{1j}v_1 + \lambda_{2j}v_2 + \cdots + \lambda_{mj}v_m$$

para cada $j = 1, \ldots, n$. Fica claro, pela própria definição de T, que $[T]_{\mathcal{BC}} = A$. E essa transformação linear é a única cuja matriz em relação à bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é A, pois se $S\colon U \to V$ é uma transformação linear com $[S]_{\mathcal{BC}} = A$, então, para cada $j = 1, \ldots, n$, teremos

$$[S(u_j)]_{\mathcal{C}} = A[u_j]_{\mathcal{B}} = [T(u_j)]_{\mathcal{C}},$$

o que, por sua vez, implica que $S(u_j) = T(u_j)$. Como $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base de U, segue que $S(u) = T(u)$, para todo $u \in S$. Em outras palavras, S e T são a mesma transformação linear. $\square$

O teorema que acabamos de demonstrar pode ser formulado nos seguintes termos. Seja U um espaço vetorial de dimensão n, seja V um espaço vetorial de dimensão m e denote por $\mathcal{L}(U, V)$ o conjunto formado por todas as transformações lineares de U em V. Fixe uma base ordenada $\mathcal{B}$ de U e uma base ordenada $\mathcal{C}$ de V. O Teorema 6.5.10 afirma que a associação de cada elemento T de $\mathcal{L}(U, V)$ (isto é, de cada transformação linear $T\colon U \to V$) à matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ estabelece uma bijeção entre os conjuntos $\mathcal{L}(U, V)$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. (É claro que se trocarmos o par de bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ por outro, obteremos uma outra bijeção entre $\mathcal{L}(U, V)$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Existem infinitas bijeções entre $\mathcal{L}(U, V)$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, uma para cada par de bases de U e V!)

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 31–39.

6.6 Matriz da transformação composta

Nesta seção, veremos o efeito nas matrizes das operações de soma, multiplicação por escalar e composição envolvendo transformações lineares de que tratamos na Seção 6.4.

Começamos com a soma e a multiplicação por escalar. A composição será tratada separadamente, adiante.

Proposição 6.6.1. *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de U e de V, respectivamente, e sejam $T_1, T_2\colon U \to V$ transformações lineares. Então,*

(i) $[T_1 + T_2]_{\mathcal{BC}} = [T_1]_{\mathcal{BC}} + [T_2]_{\mathcal{BC}}$, *e*

(ii) $[\lambda T_1]_{\mathcal{BC}} = \lambda [T_1]_{\mathcal{BC}}$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Ainda, escreva $[T_1]_{\mathcal{BC}} = (a_{ij})$ e $[T_2]_{\mathcal{BC}} = (b_{ij})$. Então, para cada $j = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(u_j) &= T_1(u_j) + T_2(u_j) \\ &= (a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m) \\ &\quad + (b_{1j}v_1 + b_{2j}v_2 + \cdots + b_{mj}v_m) \\ &= (a_{1j} + b_{1j})v_1 + (a_{2j} + b_{2j})v_2 + \cdots + (a_{mj} + b_{mj})v_m.\end{aligned}$$

Daí segue que $[T_1 + T_2]_{\mathcal{BC}} = (c_{ij})$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todos $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Isso demonstra (i). Agora, tome $\lambda \in \mathbb{R}$, Então, para todo $j = 1, \dots, n$, vale

$$\begin{aligned}T_1(\lambda u_j) &= \lambda T_1(u_j) \\ &= \lambda(a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m) \\ &= (\lambda a_{1j})v_1 + (\lambda a_{2j})v_2 + \cdots + (\lambda a_{mj})v_m,\end{aligned}$$

donde segue (ii). □

Costumamos dizer que "a matriz da soma é a soma das matrizes" e que "a matriz de uma multiplicação por escalar é a multiplicação do escalar pela matriz". Para a composição, uma outra operação familiar entre matrizes surge: o produto.

Proposição 6.6.2. *Sejam U, V, W espaços vetoriais de dimensão finita e sejam $T\colon U \to V$ e $S\colon V \to W$ transformações lineares. Sejam $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases ordenadas de U, de V e de W, respectivamente. Então, a transformação linear composta $S \circ T\colon U \to W$ está definida e*

$$[S \circ T]_{\mathcal{BD}} = [S]_{\mathcal{CD}}[T]_{\mathcal{BC}},$$

em que a concatenação de matrizes do lado direito da igualdade expressa o produto entre elas.

Observe que o produto matricial do lado direito da igualdade está definido e resulta em uma matriz que tem tamanho igual à matriz do lado esquerdo. O que resta demonstrar é que essas matrizes são iguais.

Demonstração. Como o contradomínio de T coincide com o domínio de S, a composta $S \circ T\colon U \to W$ está definida e é uma transformação linear, como vimos na Proposição 6.4.1.

Para todo $u \in U$, temos

$$\begin{aligned}
[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}[u]_{\mathcal{B}} &= [(S \circ T)(u)]_{\mathcal{D}} && \text{pelo Teorema 6.5.6 aplicado a } S \circ T \\
&= \big[S\big(T(u)\big)\big]_{\mathcal{D}} && \text{por definição da composta} \\
&= [S]_{\mathcal{C}\mathcal{D}}[T(u)]_{\mathcal{C}} && \text{pelo Teorema 6.5.6 aplicado a } S \\
&= [S]_{\mathcal{C}\mathcal{D}}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}} && \text{pelo Teorema 6.5.6 aplicado a } T
\end{aligned}$$

A unicidade expressa na primeira parte do enunciado do Teorema 6.5.10 implica $[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{D}} = [S]_{\mathcal{C}\mathcal{D}}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.

□

Será útil introduzir uma simplificação na notação de matriz de um operador linear, a ser adotada deste ponto em diante. Se U é um espaço vetorial de dimensão finita, $T\colon U \to U$ é um operador linear e $\mathcal{B}$ é uma base ordenada de U, então a matriz (quadrada) $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ será denotada simplesmente por $[T]_{\mathcal{B}}$.

Exemplo 6.6.3. Considere os seguintes operadores lineares de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} F\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x-y) \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} G\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x) \end{array}$$

Determine as matrizes dos operadores lineares $F+G$, $3F$, $F \circ G$, $G \circ F$ e F^2 em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Solução. Seja $\mathsf{can} = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Neste exemplo, usaremos as Proposições 6.6.1 e 6.6.2. Para encontrar $[F]_{\mathsf{can}}$, calculamos

$$\begin{aligned}
F(1,0) &= (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1), \\
F(0,1) &= (0,-1) = 0(1,0) + (-1)(0,1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$[F]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
G(1,0) &= (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1), \\
G(0,1) &= (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)
\end{aligned}$$

fornecem

$$[G]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[F+G]_{\mathsf{can}} = [F]_{\mathsf{can}} + [G]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$[3F]_{\mathsf{can}} = 3[F]_{\mathsf{can}} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$

$$[F\circ G]_{\mathsf{can}} = [F]_{\mathsf{can}}[G]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[G\circ F]_{\mathsf{can}} = [G]_{\mathsf{can}}[F]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

E, como $F^2 = F \circ F$,

$$[F^2]_{\mathsf{can}} = [F]^2_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em particular, note que os operadores lineares $F \circ G$ e $G \circ F$ são diferentes. Além disso, o fato de $[F^2]_{\mathsf{can}} = I_2$ permite que se conclua que $F^2 = \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}$. Isso segue da última parte do enunciado do Teorema 6.5.10 e do fato de que $[\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathsf{can}} = I_2$. ♢

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 40–43.

6.7 Mudança de base

Esta seção será dedicada a responder à pergunta surgida ao final do Exemplo 6.5.2: qual é a relação entre matrizes de uma mesma transformação linear em relação a diferentes escolhas de pares de bases?

Começamos com um resultado fundamental na construção de uma resposta adequada.

Proposição 6.7.1. *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de U e de V, respectivamente. Então, T é bijetora se, e somente se, a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ for inversível. Além disso, neste caso, $[T]^{-1}_{\mathcal{BC}} = [T^{-1}]_{\mathcal{CB}}$.*

Demonstração. Seja n a dimensão do espaço vetorial U.

Suponha, primeiramente, que T é bijetora. Pelo Corolário 6.3.7, V também tem dimensão igual a n; portanto, $[T]_{\mathcal{BC}}$ é uma matriz quadrada de tamanho n. Ainda, a bijetividade de T implica, pela Proposição 6.3.5, que existe a transformação inversa $T^{-1}\colon V \to U$ e ela satisfaz $T \circ T^{-1} = \mathrm{I}_V$ e $T^{-1} \circ T = \mathrm{I}_U$. Logo, usando a fórmula para a matriz da composta, obtida na Proposição 6.6.2,

$$[T]_{\mathcal{BC}}[T^{-1}]_{\mathcal{CB}} = [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{C}} = [\mathrm{I}_V]_{\mathcal{C}} = I_n,$$

como vimos no Exemplo 6.5.3. Analogamente,

$$[T^{-1}]_{\mathcal{CB}}[T]_{\mathcal{BC}} = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{I}_U]_{\mathcal{B}} = I_n.$$

Logo, $[T]_{\mathcal{BC}}$ é inversível, e $[T]_{\mathcal{BC}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{CB}}$.

Reciprocamente, suponha que $[T]_{\mathcal{BC}}$ é inversível. Em particular, $[T]_{\mathcal{BC}}$ é uma matriz quadrada de tamanho n, e, assim, $\dim(U) = \dim(V) = n$. Seja $A = [T]_{\mathcal{BC}}^{-1}$. Considere a transformação linear $S\colon V \to U$ tal que $[S]_{\mathcal{CB}} = A$. Mostremos que $S \circ T = \mathrm{I}_U$ e que $T \circ S = \mathrm{I}_V$. Isso implicará que T é bijetora (e que $S = T^{-1}$). Por um lado,

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{CB}}[T]_{\mathcal{BC}} = A[T]_{\mathcal{BC}} = I_n = [\mathrm{I}_U]_{\mathcal{B}}.$$

Isso quer dizer que as transformações lineares $S \circ T$ e I_U, que já têm domínio e contradomínio comuns, coincidem em todos os elementos da base $\mathcal{B}$. Logo, $S \circ T = \mathrm{I}_U$. De modo análogo,

$$[T \circ S]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{BC}}[S]_{\mathcal{CB}} = [T]_{\mathcal{BC}}A = I_n = [\mathrm{I}_V]_{\mathcal{C}},$$

e isso implica $T \circ S = \mathrm{I}_V$, como queríamos. □

Exemplo 6.7.2. Mostre que a transformação linear

$$\begin{aligned} L\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \\ (x, y) &\longmapsto (3x - 4y) + (-x + 2y)t \end{aligned}$$

é bijetora e encontre uma expressão para sua inversa.

Solução. Considere as bases canônicas $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathcal{C} = \{1, t\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, respectivamente. Então, como $L(1,0) = 3 - t$ e $L(0,1) = -4 + 2t$, segue que

$$[L]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como $\det \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$, essa matriz é inversível. Pelo que vimos acima, L é bijetora e a transformação linear inversa $L^{-1}\colon \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ é tal que

$$[L^{-1}]_{\mathcal{CB}} = [L]_{\mathcal{BC}}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Isso quer dizer que $L^{-1}(1) = 1(1,0) + \frac{1}{2}(0,1) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ e que $L^{-1}(t) = 2(1,0) + \frac{3}{2}(0,1) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$. Mas, conhecendo as imagens por L^{-1} de elementos de uma base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, conhecemos a imagem por L^{-1} de qualquer elemento de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} L^{-1}(a + bt) &= aL^{-1}(1) + bL^{-1}(t) = a\left(1, \frac{1}{2}\right) + b\left(2, \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(a + 2b, \frac{a + 3b}{2}\right), \end{aligned}$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$. $\lozenge$

Já temos condição de responder à questão colocada no início da seção.

Teorema 6.7.3. *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear, sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de U e sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ bases ordenadas de V. Então,*

$$[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = P[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}Q^{-1}, \tag{6.16}$$

em que $P = [\mathrm{I}_V]_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$ e $Q = [\mathrm{I}_U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Demonstração. Para efeitos de verificação de compatibilidade de tamanhos das matrizes envolvidas, suponha que $\dim(U) = n$ e que $\dim(V) = m$. Então, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}, [T]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Além disso, $P = [\mathrm{I}_V]_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} \in M_m(\mathbb{R})$ e $Q = [\mathrm{I}_U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in M_n(\mathbb{R})$. Como a transformação identidade I_U é obviamente bijetora, segue da Proposição 6.7.1 que Q é inversível (e sua inversa Q^{-1} tem mesmo tamanho que Q). Portanto, o produto de três matrizes no lado direito de (6.16) está definido e tem tamanho igual ao da matriz no lado esquerdo. Resta-nos, assim, demonstrar a igualdade.

Considere a transformação composta $T \circ \mathrm{I}_U\colon U \to V$. Como I_U é a transformação identidade de U, é claro que $T \circ \mathrm{I}_U = T$. De modo análgo, $\mathrm{I}_V \circ T = T$. Da Proposição 6.6.2, obtemos, por um lado, usando que $T = T \circ \mathrm{I}_U$,

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}'} = [T \circ \mathrm{I}_U]_{\mathcal{B}\mathcal{C}'} = [T]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}[\mathrm{I}_U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'},$$

e, por outro, usando que $T = \mathrm{I}_V \circ T$,

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}'} = [\mathrm{I}_V \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}'} = [\mathrm{I}_V]_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}.$$

Ou seja, vale

$$[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}Q = P[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}.$$

Para obter, finalmente, (6.16), basta, agora, multiplicar ambos os termos dessa igualdade por Q^{-1} à direita. $\square$

Aqui cabem alguns comentários. O primeiro é que para lembrar da expressão (6.16), o seguinte diagrama pode ser útil:

$$\begin{tikzcd}
U_{\mathcal{B}} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathrm{I}_U"'] & V_{\mathcal{C}} \arrow[d, "\mathrm{I}_V"] \\
U_{\mathcal{B}'} \arrow[r, "T"] & V_{\mathcal{C}'}
\end{tikzcd}$$

Veja que, no diagrama, indicamos, além dos espaços vetoriais e das transformações entre eles, as bases envolvidas na determinação das matrizes de transformações lineares. A idéia central utilizada na demonstração de

(6.16) é que as duas transformações compostas representadas nesse diagrama coincidem, pois ambas são iguais a T. Como a composta no canto superior direito é $\mathrm{I}_V \circ T$ e a no canto inferior esquerdo, $T \circ \mathrm{I}_U$, segue

$$\mathrm{I}_V \circ T = T \circ \mathrm{I}_U \,.$$

Aplicando a fórmula para a matriz da composta, obtida na Proposição 6.6.2, obtemos

$$[\mathrm{I}_V]_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}[\mathrm{I}_U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'},$$

donde (6.16) é facilmente obtida.

Em segundo lugar, observe que, como I_V também é uma transformação linear bijetora, a matriz P também é inversível. Assim, (6.16) poderia ter sido apresentada na seguinte forma alternativa:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}Q. \tag{6.17}$$

(Enquanto (6.16) fornece $[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}$ a partir de $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, (6.17) faz o oposto, dá uma expressão para $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ em função de $[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}$. Claro que uma das fórmula pode ser obtida a partir da outra, e ambas a partir do diagrama acima.)

O Teorema 6.7.3 será mais frequentemente utilizado para o estudo de operadores lineares. O corolário a seguir é uma consequência imediada do teorema (na forma (6.17), com $U = V$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ e $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$).

Corolário 6.7.4. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, seja $T\colon V \to V$ um operador linear e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de V. Então,*

$$[T]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P, \tag{6.18}$$

em que $P = [\mathrm{I}_V]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.

Aqui, o diagrama também ajuda:

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{C}} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathrm{I}_V"'] & V_{\mathcal{C}} \arrow[d, "\mathrm{I}_V"] \\
V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "T"] & V_{\mathcal{B}}
\end{tikzcd}$$

As matrizes dos operadores identidade que aparecem nas fórmula vistas acima são chamadas *matrizes de mudança de base*. Elas, além de relacionarem $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ e $[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}$, também servem para "mudar coordenadas", como mostra o próximo resultado.

Proposição 6.7.5. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de V. Então, para todo $u \in V$, temos*

$$[u]_{\mathcal{B}} = P[u]_{\mathcal{C}},$$

em que $P = [\mathrm{I}_V]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.

Demonstração. Sabemos, do Teorema 6.5.6 (aplicado ao operador linear identidade $\mathrm{I}_V \colon V \to V$, usando as bases $\mathcal{C}$ no domínio e $\mathcal{B}$ no contradomínio), que

$$[u]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{I}_V(u)]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{I}_V]_{\mathcal{CB}}[u]_{\mathcal{C}},$$

que é o que desejávamos. □

Note que, como $\mathrm{I}_V(u) = u$, para todo $u \in V$, as colunas de $[\mathrm{I}_V]_{\mathcal{CB}}$ são precisamente as coordenadas, em relação à base $\mathcal{B}$ dos vetores que compõem a base $\mathcal{C}$, na ordem em que eles estão listados em $\mathcal{C}$.

Mais um comentário a respeito de matrizes de mudança de base merece registro. Sabemos que uma matriz de mudança de base é sempre inversível (já que é a matriz do operador identidade, que é bijetor), mas vale mais.

Proposição 6.7.6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de V. Então, $[\mathrm{I}_V]_{\mathcal{CB}} = [\mathrm{I}_V]_{\mathcal{BC}}^{-1}$.*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 6.7.1 ao operador identidade I_V e lembrar do fato óbvio que $(\mathrm{I}_V)^{-1} = \mathrm{I}_V$. □

Observação. O conceito de matriz de mudança de base já havia surgido no contexto de vetores de $\mathbb{V}^3$, mais especificamente, na ocasião em que vimos o Teorema 2.6.1. Veja que a notação que foi utilizada então se expressa, agora, da seguinte maneira: $M_{\mathcal{CB}} = [\mathrm{I}_{\mathbb{V}^3}]_{\mathcal{CB}}$, de sorte que há uniformidade na nomenclatura. ♢

Exemplo 6.7.7. Considere o operador linear de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x-y, x+2y). \end{aligned}$$

Encontre as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}}$, em que $\mathcal{B}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C} = \{(1,3), (-1,0)\}$.

Solução. Temos $T(1,0) = (1,1)$ e $T(0,1) = (-1,2)$, o que acarreta

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Agora, usaremos (6.18) para determinar $[T]_{\mathcal{C}}$. Para tanto, é preciso encontrar $P = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{CB}}$. Como

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}(1,3) &= (1,3) = 1(1,0) + 3(0,1), \\ \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}(-1,0) &= (-1,0) = (-1)(1,0) + 0(0,1), \end{aligned}$$

segue que $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Logo[4],

$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Obviamente, uma outra solução seria calcular diretamente

$$\begin{aligned} T(1,3) &= (-2,7) = \frac{7}{3}(1,3) + \frac{13}{3}(-1,0), \\ T(-1,0) &= (-1,-1) = \left(-\frac{1}{3}\right)(1,3) + \frac{2}{3}(-1,0), \end{aligned}$$

e montar a matriz com esses dados. $\diamondsuit$

Exemplo 6.7.8. (Prova 2, Álgebra Linear II, 2015) Sabendo que a matriz da transformação linear $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases ordenadas $\mathcal{B} = \{1, x + x^2, x^2\}$ e $\mathcal{C} = \{(1,-1),(1,1)\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e de $\mathbb{R}^2$, respectivamente, é $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $T(x^2 - x + 1)$ é

(A) $(5,-3)$

(B) $(2,-8)$

(C) $(5,3)$

(D) $(-2,-8)$

(E) $(-5,-5)$

Solução. Seja $v = x^2 - x + 1$. Sabemos, pelo Teorema 6.5.6, que

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{BC}}[v]_{\mathcal{B}}. \tag{6.19}$$

A matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$, ocorrendo no produto do lado direito dessa igualdade, é dada no enunicado da questão:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

[4]Aqui usaremos a utilíssima fórmula

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

que vale sempre que $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Tratemos de determinar o outro fator do produto, a matriz $[v]_{\mathcal{B}}$. Temos, pela Proposição 6.7.5,

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{D}},$$

em que $\mathcal{D} = \{1, x, x^2\}$ denota a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, e

$$P = [\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{D}\mathcal{B}}.$$

É fácil ver que

$$[v]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resta determinar P. Sabemos, da Proposição 6.7.6, que

$$P = [\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{D}\mathcal{B}} = [\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}^{-1},$$

e essa segunda matriz é fácil de descrever:

$$[\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B}\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(O que foi feito aqui foi escrever as coordenadas dos vetores de $\mathcal{B}$ em relação à base $\mathcal{D}$, o que é fácil, pois $\mathcal{D}$ é a base canônica.) Procedemos, agora, à inversão dessa matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim,

$$P = [\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{D}\mathcal{B}} = [\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concluímos, portanto, que

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, voltando a (6.19),

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Assim, $T(v) = 5(1, -1) + (-3)(1, 1) = (2, -8)$. *Resposta:* (B)

Poderíamos ir além e encontrar a expressão para $T(a+bx+cx^2)$. Basta fazer

$$[a+bx+cx^2]_{\mathcal{B}} = P[a+bx+cx^2]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -b+c \end{bmatrix},$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} [T(a+bx+cx^2)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{BC}}[a+bx+cx^2]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ -b+c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3a-b+c \\ a+3b-c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T(a+bc+cx^2) &= (3a-b+c)(1,-1) + (a+3b-c)(1,1) \\ &= (4a+2b, -2a+4b-2c), \end{aligned}$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$. $\Diamond$

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 44–48.

7

Diagonalização de operadores

Neste capítulo, procedemos a uma análise mais aprofundada de operadores lineares em espaço de dimensão finita a fim de descrevê-los da maneira mais simples possível, em um sentido que ficará claro à medida que progredirmos.

Os resultados obtidos neste capítulo têm diversas aplicações relevantes. Em particular, eles originarão um método para encontrar soluções para sistemas de equações diferenciais (abordado na Seção 7.5) e um procedimento para reconhecer superfícies quádricas (tema da Seção 8.3).

Para introduzir o conceito principal deste capítulo, o de autovetor de um operador linear, comecemos por um exemplo simples, aparentemente não diretamente relacionado com o estudo de operadores lineares.

Seja n um inteiro positivo. Dizemos que uma matriz $D = (d_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ é *diagonal* se $d_{ij} = 0$ para todos $i, j = 1, \dots, n$ tais que $i \neq j$. Em outras palavras, D é diagonal se apenas as entradas em sua diagonal principal são eventualmente não nulas, isto é, se D tem o seguinte formato:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Em algumas ocasiões, quando for conveniente, a matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{R})$ cujas entradas na diagonal principal são $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, nessa ordem, será denotada por $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

De acordo com a definição do produto entre matrizes, fica claro que as potências da matriz diagonal D são também matrizes diagonais, dadas por

$$D^r = \begin{bmatrix} \lambda_1^r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^r & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1}^r & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n^r \end{bmatrix},$$

para todo inteiro positivo r. Usando a notação introduzida acima, se $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, então $D^r = \operatorname{diag}(\lambda_1^r, \lambda_2^r, \dots, \lambda_n^r)$.

Em geral, calcular a potência de uma matriz quadrada é muito custoso, pois são muitas as operações envolvendo suas entradas a serem efetuadas. Porém, se D é diagonal, como vimos, suas potências são calculadas de modo imediado. Há um caso intermediário, em que, apesar de não se tratar de uma matriz diagonal, é bastante rápido o cálculo de suas potências. Este é o caso destacado na definição a seguir.

Definição. Seja n um inteiro positivo. Dizemos que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é *diagonalizável* se existir uma matriz inversível $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

Voltando à nossa discussão sobre potências, se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável, digamos, $P^{-1}AP = D$, com $P, D \in M_n(\mathbb{R})$, P inversível e D diagonal, então, para calcular a r-ésima potência de A, procedemos da seguinte maneira: de $P^{-1}AP = D$, segue que $A = PDP^{-1}$; assim,

$$A^r = (PDP^{-1})^r = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}),$$

em que o produto do lado direito tem r fatores da forma PDP^{-1}. Nessa expressão, toda ocorrência da matriz P, exceto pela mais à esquerda, vem acompanhada de P^{-1} multiplicada por ela à esquerda:

$$\begin{aligned} &(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &\qquad = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D \dots D(P^{-1}P)DP^{-1}. \end{aligned}$$

Cada um dos produtos $P^{-1}P$ é igual à matriz identidade I_n. Portanto, todas as ocorrências de P e P^{-1} entre D's se cancelam, de modo que temos, ao final,

$$A^r = (PDP^{-1})^r = PD^rP^{-1},$$

que resulta em uma expressão para a potência de A envolvendo um número muito menor de cálculos.

Em resumo, se A for diagonalizável, suas potências são fáceis de serem calculadas. Nem toda matriz é diagonalizável, entretanto. Será objeto deste capítulo determinar condições necessárias e suficientes para tanto. E, em caso afirmativo, veremos como encontrar as matrizes P e D.

7.1 Autovalores e autovetores

Introduzimos o conceito principal deste capítulo. (E, posteriormente, veremos como ele se relaciona ao conceito de matriz diagonalizável.)

Definição. Seja V um espaço vetorial e seja $T\colon V \to V$ um operador linear em V. Dizemos que um vetor $v \in V$ é um *autovetor* de T se $v \neq 0_V$ e existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Neste caso, λ é chamado *autovalor* de T, e dizemos que v é um autovetor de T associado ao autovalor λ.

Autovetores também são conhecidos, na literatura, como *vetores próprios* ou *vetores característicos*. Similarmente, autovalores são também chamados de *valores próprios* ou *valores característicos*.

Exemplo 7.1.1. Considere o operador linear T de $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (x,-y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Como

$$T(1,0) = (1,0) = 1(1,0),$$

de acordo com a definição acima, 1 é um autovalor de T e $(1,0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 1. Ainda,

$$T(0,1) = (0,-1) = (-1)(0,1),$$

donde segue que -1 é um autovalor de T e $(0,1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor -1. Agora, $(2,3)$ **não é** um autovetor de T, pois $T(2,3) = (2,-3)$ e não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfaça $(2,-3) = T(2,3) = \lambda(2,3)$. $\diamondsuit$

Um autovetor só pode estar associado a um único autovalor, pois se $v \in V$ é um vetor não nulo tal que $T(v) = \lambda v$ e $T(v) = \mu v$, como $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, então $\lambda v = \mu v$, o que implica $(\lambda - \mu)v = 0_V$. Como v não é o vetor nulo, segue (do item (iii) da Proposição 4.1.8) que $\lambda - \mu = 0$, ou, ainda, que $\lambda = \mu$.

Mas, se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de um operador linear T, então há infinitos autovetores de T associados a λ. Isso é o que veremos a seguir.

Dado um espaço vetorial V e um operador linear $T\colon V \to V$, se $\lambda \in \mathbb{R}$, utilizaremos a seguinte notação:

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T, então $V(\lambda)$ é o conjunto formado por todos os autovetores de T associados a λ, mais o vetor nulo (uma vez que $T(0_V) = 0_V = \lambda 0_V$). A proposição abaixo mostra que se λ é um autovalor de T, então $V(\lambda)$ não é apenas um subconjunto de V, é um subespaço de V.

Proposição 7.1.2. *Seja V um espaço vetorial, seja $T\colon V \to V$ um operador linear de V e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,*

$$V(\lambda) = \operatorname{Ker}(T - \lambda\, \mathrm{I}_V).$$

Em particular, $V(\lambda)$ é um subespaço de V.

Demonstração. Tome $v \in V$. Então, $v \in V(\lambda)$ se, e somente se, $T(v) = \lambda v$, ou, equivalentemente, $\big(T - \lambda\,\mathrm{I}_V\big)(v) = T(v) - \lambda v = 0_V$. Assim, $v \in V(\lambda)$ se, e somente se, $v \in \operatorname{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{I}_V)$, que é o que desejávamos mostrar. $\square$

Repare que ser um elemento de $V(\lambda)$ é ser um elemento do núcleo de um operador — não do operador T, mas do operador $T - \lambda\,\mathrm{I}_V$.

Definição. Se T é um operador linear no espaço vetorial V e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T, o subespaço $V(\lambda)$ é chamado *autoespaço* de V associado ao autovalor λ.

Dados um operador linear T em um espaço vetorial V e um escalar λ, como vimos na Proposição 7.1.2, $V(\lambda)$ é sempre um subespaço de V e, portanto, sempre contém, pelo menos, o vetor nulo de V. Para λ ser um autovalor de T é preciso que haja, em $V(\lambda)$, pelo menos um vetor não nulo (isto é, que T tenha um autovetor associado λ). Assim, temos o seguinte critério: λ é um autovalor de T se, e somente se, $V(\lambda) \neq \{0_V\}$.

Exemplo 7.1.3. Determine todos os autovalores e todos os autovetores do operador linear de $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (x,-y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, vejamos para que valores de λ existe $(x,y) \neq (0,0)$ tal que $T(x,y) = \lambda(x,y)$. Então, $T(x,y) = \lambda(x,y)$ se, e somente se, $(x,-y) = (\lambda x, \lambda y)$, o que, por sua vez, ocorre se, e somente se

$$\begin{cases} x = \lambda x \\ -y = \lambda y \end{cases}$$

Se $x \neq 0$, a primeira equação implica $\lambda = 1$ e, assim, da segunda, obtemos $y = 0$. Se $x = 0$, como estamos procurando soluções com $(x,y) \neq (0,0)$, então $y \neq 0$ e, neste caso, $\lambda = -1$ e $x = 0$.

Conclusão: os únicos autovalores de T são 1 e -1. Além disso, $V(1) = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $V(-1) = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Em outras palavras, os autovetores de T associados ao autovalor 1 são os vetores da forma $(x,0)$, com $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$; os autovetores de T associados ao autovalor -1 são os vetores da forma $(0,y)$, com $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$. (Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1, -1$, temos $V(\lambda) = \{(0,0)\}$.) $\Diamond$

Exemplo 7.1.4. Considere o operador linear T em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -10 & 4 & 6 \\ -8 & 2 & 6 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B} = \{1+t, 1+t^2, t+t^2\}$. Mostre que -2 é um autovalor de T e determine $\dim\big(V(-2)\big)$.

Solução. Sabemos que -2 será um autovalor de T se, e somente se, $V(-2) \neq \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\}$, o que, em vista de $V(-2)$ ser um subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, é equivalente a $\dim\big(V(-2)\big) \neq 0$. Assim, se determinarmos $\dim\big(V(-2)\big)$, respondemos às duas questões simultaneamente. Vimos que $V(-2) = \operatorname{Ker}\big(T - (-2)\,\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\big)$. Vamos, assim, estudar o núcleo do operador $T - (-2)\,\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = T + 2\,\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$. Dado $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, sabemos que

$$
\begin{aligned}
p \in \operatorname{Ker}(T + 2\,\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}) \quad &\Longleftrightarrow \quad (T + 2\,\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})})(p) = 0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} \\
&\Longleftrightarrow \quad \big[(T + 2\,\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})})(p)\big]_{\mathcal{B}} = [0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad [T + 2\,\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B}}[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(pelo Teorema 6.5.6)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \big([T]_{\mathcal{B}} + 2[\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B}}\big)[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(pela Proposição 6.6.1)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \big([T]_{\mathcal{B}} + 2I_3\big)[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\qquad\qquad \text{(pois } [\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B}} = I_3\text{, como vimos no Exemplo 6.5.3)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} -10 & 4 & 6 \\ -8 & 2 & 6 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) [p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -8 & 4 & 6 \\ -8 & 4 & 6 \\ -8 & 4 & 6 \end{bmatrix} [p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Assim, $p \in \operatorname{Ker}\big(T + 2\,\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\big)$ se, e somente se, suas coordenadas, em relação à base $\mathcal{B}$, são solução do sistema linear homogêneo (em notação matricial)

$$
\begin{bmatrix} -8 & 4 & 6 \\ -8 & 4 & 6 \\ -8 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.1}
$$

Sabemos, pela Proposição 4.7.6, que o subespaço de $\mathbb{R}^3$ formado pelas soluções de (7.1) tem dimensão igual ao número de variáveis livres do sistema, que, no caso, fica claro ser igual a 2. Portanto, as soluções de (7.1) são combinações lineares de dois vetores, digamos u_1 e u_2, em $\mathbb{R}^3$ com $\{u_1, u_2\}$ LI. Segue da Proposição 4.6.1, que os elementos de $V(-2) = \operatorname{Ker}(T +$

$2\,\mathrm{I}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\big)$ são as combinações lineares dos vetores q_1 e q_2 de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ cujas coordenadas, em relação à base $\mathcal{B}$, são u_1 e u_2. Logo, $\{q_1, q_2\}$ é uma base de $V(-2)$, e, portanto, $\dim\big(V(-2)\big) = 2$.

Para determinar explicitamente q_1 e q_2, é preciso encontrar as soluções de (7.1). Resolvendo esse sistema, obtemos soluções

$$\left(\frac{y}{2} + \frac{3z}{4}, y, z\right) = y\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) + z\left(\frac{3}{4}, 0, 1\right), \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Segue que o subespaço de $\mathbb{R}^3$ formado pelas soluções de (7.1) é

$$\left[\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{3}{4}, 0, 1\right)\right] = [(1,2,0),(3,0,4)].$$

Assim,

$$V(-2) = [(1,2,0)_{\mathcal{B}}, (3,0,4)_{\mathcal{B}}] = \left[3 + t + 2t^2, 3 + 7t + 4t^2\right],$$

uma vez que $(1,2,0)_{\mathcal{B}} = 3 + t + 2t^2$ e $(3,0,4)_{\mathcal{B}} = 3 + 7t + 4t^2$. $\Diamond$

Exemplo 7.1.5. Seja V um espaço vetorial. Determine todos os autovalores e autovetores do operador identidade I_V e do operador nulo N de V.

Solução. Para todo $v \in V$, temos $\mathrm{I}_V(v) = v = 1v$. Assim, 1 é o único autovalor de I_V e $V(1) = V$. Logo, todo vetor não nulo de V é um autovetor de I_V associado a 1. (Note que $\mathrm{I}_V - 1\,\mathrm{I}_V = N$, e, portanto, $V(1) = \mathrm{Ker}(\mathrm{I}_V - 1\,\mathrm{I}_V) = \mathrm{Ker}(N) = V$.)

O operador nulo N de V satisfaz $N(v) = 0_V = 0v$, para todo $v \in V$. Assim, 0 é o único autovalor de N e $V(0) = V$. (Aqui, $N - 0\,\mathrm{I}_V = N$, e, assim, $V(0) = \mathrm{Ker}(N - 0\,\mathrm{I}_V) = \mathrm{Ker}(N) = V$.)

Mais geralmente, fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere o operador T_λ de V definido por $T_\lambda(v) = \lambda v$, para todo $v \in V$. (Em outras palavras, $T_\lambda = \lambda\,\mathrm{I}_V$.) Então, λ é o único autovalor de T_λ e $V(\lambda) = \mathrm{Ker}(T_\lambda - \lambda\,\mathrm{I}_V) = \mathrm{Ker}(N) = V$. Os dois operadores de que tratamos acima são casos especiais: $\mathrm{I}_V = T_1$ e $N = T_0$. $\Diamond$

Terminamos esta seção registrando que há uma íntima relação entre a injetividade de um operador linear e o conjunto de seus autovalores.

Proposição 7.1.6. *Se T é um operador linear em um espaço vetorial V, então são equivalentes:*

(a) *T é injetor;*

(b) *0 é não é autovalor de T;*

(c) $\dim\big(V(0)\big) = 0$.

Demonstração. Já vimos que 0 é autovalor de T se, e somente se, $V(0) \neq \{0_V\}$, o que, por sua vez é equivalente a $\dim\big(V(0)\big) \neq 0$. Portanto, (b) e (c) são equivalentes entre si. A equivalência entre (a) e (b) segue da observação que $V(0) = \mathrm{Ker}(T - 0\,\mathrm{I}_V) = \mathrm{Ker}(T)$ e da Proposição 6.2.5. $\square$

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 49–55.

7.2 O polinômio característico

Vimos, na seção anterior, que se λ é um autovalor de um operador linear T no espaço vetorial V, então o autoespaço de T associado a λ é dado por $V(\lambda) = \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{I}_V)$, e, portanto, os autovetores de T associados a λ são todos os vetores de $V(\lambda)$ com exceção do vetor nulo. Resta dispormos de um instrumento para determinar o conjunto completo de autovalores de T. Isso será provido pelo polinômio característico de T, como veremos nesta seção.

Definição. Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. O *polinômio característico* p_A de A é definido por

$$p_A(t) = \det(A - tI_n) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{bmatrix}.$$

Observe que p_A é, de fato, um polinômio (na variável t) que tem grau n. Isso segue do fato de que ao expandirmos o determinante que define o polinômio característico de A, obteremos uma soma de $n!$ termos, cada um deles sendo um produto de n fatores que são entradas da matriz $A - tI_n$; além disso, em cada termo dessa soma ocorre apenas um fator de cada linha e de cada coluna da matriz. O único desses termos que resultará em um polinômio de grau n é dado pelo produto dos elementos na diagonal principal de $A - tI_n$; os demais termos no determinante serão polinômios de grau menor do que n. O coeficiente do termo líder desse termo de grau n é dado por $(-1)^n$. Além disso, sabemos que o termo de grau zero de p_A é dado por $p_A(0) = \det(A - 0I_n) = \det(A)$. Assim,

$$p_A(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0,$$

em que $\alpha_n = (-1)^n$ e $\alpha_0 = \det(A)$. (Os demais coeficientes do polinômio característico de A também podem ser expressos em termos das entradas de A; em especial, não é difícil ver que $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)$, mas, para os objetivos destas notas, não será necessário entrar nesses detalhes.)

Duas matrizes diferentes podem ter o mesmo polinômio característico. Isso ocorre, especialmente, em um caso que já encontramos antes.

Definição. Dadas $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, dizemos que A e B são *semelhantes* se existir uma matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversível tal que $A = P^{-1}BP$.

É claro que se existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversível tal que $A = P^{-1}BP$, então também existe $Q \in M_n(\mathbb{R})$ inversível tal que $B = Q^{-1}AQ$, basta tomar

$Q = P^{-1}$. Ou seja, a semelhança entre A e B independe da ordem em que essas matrizes são listadas.

Proposição 7.2.1. *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.*

Demonstração. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e seja $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversível tal que $A = P^{-1}BP$. Então,

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det(A - tI_n) = \det(P^{-1}BP - tI_n) \\ &= \det(P^{-1}BP - tP^{-1}I_nP) = \det\big(P^{-1}(B - tI_n)P\big) \\ &= \det(P^{-1})\det(B - tI_n)\det(P) = \det(B - tI_n)\det(P^{-1})\det(P) \\ &= \det(B - tI_n)\det(P)^{-1}\det(P) = \det(B - tI_n) \\ &= p_B(t), \end{aligned}$$

como desejávamos. □

Observação. Mesmo matrizes não semelhantes podem ter o mesmo polinômio característico. Por exemplo, isso ocorre com $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (Você consegue ver por que essas matrizes não são semelhantes?) ◊

Havíamos encontrado matrizes semelhantes no Corolário 6.7.4: se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases ordenadas de um espaço vetorial V de dimensão finita e T é um operador linear de V, então $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}}$ são matrizes semelhantes. Assim, podemos falar em polinômio característico de um operador linear, conforme a definição a seguir.

Definição. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. O *polinômio característico* p_T de T é definido por

$$p_T(t) = p_A(t),$$

em que $A = [T]_{\mathcal{B}}$ e $\mathcal{B}$ é uma base ordenada qualquer de V.

O polinômio característico de T não depende da escolha da base ordenada $\mathcal{B}$ de V: se $\mathcal{C}$ é outra base ordenada de V, as matrizes $A = [T]_{\mathcal{B}}$ e $B = [T]_{\mathcal{C}}$ são semelhantes, e, pela Proposição 7.2.1, $p_A(t) = p_B(t)$.

Vale registrar que p_T é um polinômio de grau $n = \dim(V)$, uma vez que a matriz de T em relação a uma base ordenada de V tem tamanho $n \times n$.

A importância do polinômio característico reside no fato de ele conter, nas suas raízes, os autovalores do operador linear, como veremos na próxima proposição, cuja demonstração movimentará diversos resultados que vimos acumulando ao longo dessas notas.

Proposição 7.2.2. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, seja $T\colon V \to V$ um operador linear de V e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, λ é um autovalor de T se, e somente se, $p_T(\lambda) = 0$.*

Demonstração. Suponha que $\dim(V) = n$ e fixe uma base ordenada $\mathcal{B}$ de V. Sabemos que λ é um autovalor de T se, e somente se, $V(\lambda) \neq \{0_V\}$. Mas, vimos na Proposição 7.1.2 que $V(\lambda) = \mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{I}_V)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ é um autovalor de } T \quad &\iff \quad \mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{I}_V) \neq \{0_V\} \\
&\iff \quad T - \lambda\,\mathrm{I}_V \text{ não é injetor} \quad \text{(pela Proposição 6.2.5)} \\
&\iff \quad T - \lambda\,\mathrm{I}_V \text{ não é bijetor} \quad \text{(pelo Corolário 6.3.3)} \\
&\iff \quad [T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_n = [T - \lambda\,\mathrm{I}_V]_{\mathcal{B}} \text{ não é inversível} \\
&\qquad\qquad \text{(pela Proposição 6.7.1)} \\
&\iff \quad p_T(\lambda) = \det\big([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_n\big) = 0 \quad \text{(pelo Teorema 1.3.8)},
\end{aligned}$$

demonstrando, assim, a equivalência no enunciado. □

Como um polinômio de grau n tem no máximo n raízes distintas, essa proposição estabelece um limite superior para o número de autovalores que um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita:

Corolário 7.2.3. *Seja T um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita igual a n. Então, T possui no máximo n autovalores distintos.*

Exemplo 7.2.4. Determine os autovalores e autovetores do operador linear T de $\mathbb{R}^2$ que satisfaz

$$[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$

em que can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Solução. Vimos, na Proposição 7.2.2, que os autovalores de T são as raízes de

$$\begin{aligned}
p_T(t) = \det\big([T]_{\mathsf{can}} - tI_2\big) &= \det\left(\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\begin{bmatrix} 8-t & -10 \\ 3 & -3-t \end{bmatrix} = (8-t)(-3-t) + 30 \\
&= t^2 - 5t + 6 = (t-3)(t-2)
\end{aligned}$$

Assim, T tem dois autovalores: 2 e 3.

Passamos, agora, à determinação dos autoespaços $V(2)$ e $V(3)$.

Sabemos que $V(2) = \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2})$. Logo, dado $v \in \mathbb{R}^2$, temos que $v \in V(2)$ se, e somente se, $(T - 2\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2})(v) = (0,0)$. Tomando coordenadas em relação à base canônica, se $v = (x,y)$, então $v = (x,y)_{\mathsf{can}}$, e teremos que $v \in V(2)$ se, e somente se, $\big([T]_{\mathsf{can}} - 2I_2\big)[v]_{\mathsf{can}} = [(0,0)]_{\mathsf{can}}$, isto é, se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7.2}$$

já que $[T]_{\mathsf{can}} - 2I_2 = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$. As soluções de (7.2) são

$$\left(\frac{5y}{3}, y\right) = y\left(\frac{5}{3}, 1\right),$$

com $y \in \mathbb{R}$. Logo, $V(2) = \left[\left(\frac{5}{3}, 1\right)\right] = [(5,3)]$. Em particular, descobrimos que $\dim\big(V(2)\big) = 1$, pois $\{(5,3)\}$ é uma base de $V(2)$.

Por outro lado, $V(3) = \operatorname{Ker}(T - 3\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2})$. Como

$$[T]_{\mathsf{can}} - 3I_2 = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 3 & -6 \end{bmatrix},$$

argumentando de maneira análoga, concluí-se que os vetores de $V(3)$ são as soluções de

$$\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7.3}$$

que são

$$(2y, y) = y(2,1),$$

com $y \in \mathbb{R}$. Logo, $V(3) = [(2,1)]$, e $\dim\big(V(3)\big) = 1$, já que $\{(2,1)\}$ é uma base de $V(3)$.

Cabe registrar que o conjunto $\mathcal{B} = \{(5,3), (2,1)\}$, formado pela união das bases de $V(2)$ e $V(3)$ que encontramos, é LI. Como $\mathcal{B}$ contém 2 vetores, segue que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. E é uma base muito especial: ela é formada por autovetores de T. Vejamos como é a matriz de T em relação a essa base $\mathcal{B}$.

Como $(5,3)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 2, temos

$$\begin{aligned} T(5,3) &= 2(5,3) \\ &= 2(5,3) + 0(2,1). \end{aligned}$$

E, como $(2,1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 3, temos

$$\begin{aligned} T(2,1) &= 3(2,1) \\ &= 0(5,3) + 3(2,1). \end{aligned}$$

Segue, portanto,que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

ou, dito de outra forma, $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal, contendo os autovalores de T em sua diagonal principal.

Esse fenômeno — $\mathbb{R}^2$ ter uma base formada por autovetores de T — será mais detalhadamente investigado na próxima seção. $\Diamond$

Exemplo 7.2.5. Determine os autovalores e autovetores do operador linear T de $\mathbb{R}^2$ que satisfaz $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução. O polinômio característico de T é dado por

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det\big([T]_{\mathsf{can}} - tI_2\big) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{bmatrix} = t^2 + 1. \end{aligned}$$

Como $p_T(t)$ não tem raízes reais, T não tem autovalores (e, portanto, não tem autovetores). ♢

Exemplo 7.2.6. Determine os autovalores e autovetores do operador linear T de $\mathbb{R}^3$ que satisfaz $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução. O polinômio característico de T é dado por

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det\big([T]_{\mathsf{can}} - tI_3\big) = \det\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} -4-t & 0 & -3 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 6 & 0 & 5-t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo esse determinante por expansão em cofatores ao longo da segunda linha, obtemos

$$\begin{aligned} p_T(t) &= (2-t)\det\begin{bmatrix} -4-t & -3 \\ 6 & 5-t \end{bmatrix} = (2-t)\big((-4-t)(5-t) + 18\big) \\ &= (2-t)(t^2 - t - 2) = -(t-2)^2(t+1). \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores de T são 2 e -1, as raízes de $p_T(t)$.

Sabemos que $V(2) = \operatorname{Ker}(T - 2\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})$. Como

$$[T]_{\mathsf{can}} - 2I_3 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

segue que $V(2)$ é formado pelas soluções de

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que são da forma

$$\left(-\frac{z}{2}, y, z\right) = y(0,1,0) + z\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right),$$

com $y, z \in \mathbb{R}$. Portanto, $V(2) = \big[(0,1,0), \big(-\frac{1}{2},0,1\big)\big] = [(0,1,0),(-1,0,2)]$.

Já $V(-1) = \operatorname{Ker}\big(T - (-1)\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}\big) = \operatorname{Ker}(T + \mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})$. Porque $[T]_{\mathsf{can}} + I_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, o autoespaço $V(-1)$ é formado pelas soluções de

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e essas são da forma

$$(-z, 0, z) = z(-1,0,1),$$

com $z \in \mathbb{R}$. Logo, $V(-1) = [(-1,0,1)]$.

Aqui, também, se unirmos as bases

$$\big\{(0,1,0),\ (-1,0,2)\big\}$$

de $V(2)$ e

$$\big\{(-1,0,1)\big\}$$

de $V(-1)$, obtemos o conjunto

$$\mathcal{B} = \big\{(0,1,0),\ (-1,0,2),\ (-1,0,1)\big\},$$

que é LI e contém 3 vetores. Logo, $\mathcal{B}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$, e, como seus elementos são autovetores de T, a matriz de T em relação a $\mathcal{B}$, dada por

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

é uma matriz diagonal. $\Diamond$

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 56–58.

7.3 Diagonalização

Nesta seção, será estabelecida uma relação entre matrizes diagonalizáveis e operadores em espaços que possuem bases formadas por autovetores.

Definição. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear de V. Dizemos que T é *diagonalizável* se existir uma base ordenada $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ seja uma matriz diagonal.

A seguinte caracterização de operadores diagonalizáveis é extremamente útil.

Proposição 7.3.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear de V. Então, T é diagonalizável se, e somente se, V possuir uma base formada por autovetores de T.*

Demonstração. Suponha que T seja diagonalizável. Tome uma base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Então, pela própria definição de matriz de um operador, segue que, para todo $i = 1, \dots, n$, temos $T(v_i) = \lambda_i v_i$. Como os vetores de $\mathcal{B}$ são todos não nulos, eles são, todos, autovetores de T. (Precisamente, v_i é um autovetor de T associado ao autovalor λ_i).

Reciprocamente, suponha que V tenha uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, em que, para todo $i = 1, \dots, n$, v_i é um autovetor de T. Então, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (não necessariamente distintos) tais que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, considerando $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ordenada, $[T]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. $\square$

Os Exemplos 7.2.4 e 7.2.6, que vimos na seção anterior, são exemplos de operadores diagonalizáveis.

Exemplo 7.3.2. O operador linear S de $\mathbb{R}^2$ definido por $S(x, y) = (x + y, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, não é diagonalizável. Vejamos por quê.

Os autovalores de S são as raízes de seu polinômio característico; para encontrar o polinômio característico de S, é necessária a matriz de S em relação a alguma base de $\mathbb{R}^2$, por exemplo, can, a canônica. Como $S(1, 0) = (1, 0)$ e $S(0, 1) = (1, 1)$, segue que $[S]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$p_S(t) = \det \begin{bmatrix} 1 - t & 1 \\ 0 & 1 - t \end{bmatrix} = (1 - t)^2.$$

Assim, o único autovalor de S é 1. Os autovetores de S são todos associados ao autovalor 1 e coincidem com os vetores não nulos de $V(1) = \operatorname{Ker}(S - 1\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}) = \operatorname{Ker}(S - \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2})$. Porque $[S]_{\mathsf{can}} - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sabemos que $V(1)$ é formado pelas soluções de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $V(1) = [(1, 0)]$. Não existe base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de S, pois qualquer autovetor de S é múltiplo de $(1, 0)$, o que implica que um conjunto formado por dois autovetores de S será sempre LD. Logo, S não é diagonalizável. (Ou, colocando de modo equivalente, não existe base de $\mathbb{R}^2$ com a propriedade de a matriz de S em relação a ela ser diagonal.) $\Diamond$

Operadores diagonalizáveis são especialmente bem comportados. Por exemplo, é simples encontrar suas iterações.

Exemplo 7.3.3. Considere o operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por

$$T(x,y) = (8x - 10y, 3x - 3y),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então, $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, em que can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Assim, T é exatamente o operador linear de $\mathbb{R}^2$ de que tratamos no Exemplo 7.2.4. Naquela ocasião, vimos que T é diagonalizável e que tomando a base $\mathcal{B} = \{(5,3),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vamos procurar uma expressão para T^n, a n-ésima potência de T, para um inteiro positivo n. (Como vimos na página 205, T^n é o operador de $\mathbb{R}^2$ que resulta da composição de T consigo mesmo $(n-1)$ vezes.)

Pelo Corolário 6.7.4,

$$P^{-1}[T]_{\mathsf{can}}P = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

em que $P = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}}$. Assim, como fizemos no início deste capítulo,

$$P^{-1}[T]_{\mathsf{can}}^n P = \left(P^{-1}[T]_{\mathsf{can}}P\right)^n = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}. \tag{7.4}$$

A Proposição 6.6.2 nos diz que $[T]_{\mathsf{can}}^n = [T^n]_{\mathsf{can}}$. Utilizando esse fato junto com (7.4), obtemos

$$P^{-1}[T^n]_{\mathsf{can}}P = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix},$$

que, multiplicada por P à esquerda e por P^{-1} à direita, resulta em

$$[T^n]_{\mathsf{can}} = P \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{7.5}$$

O cálculo de P é imediato (por can se tratar da base canônica de $\mathbb{R}^2$):

$$P = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, obtemos de (7.5), que

$$\begin{aligned}
[T^n]_{\mathsf{can}} &= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \cdot 3^{n+1} - 5 \cdot 2^n & 10(2^n - 3^n) \\ 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n & 3 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dessa expressão, extrai-se que

$$\begin{aligned} T^n(1,0) &= \left(2 \cdot 3^{n+1} - 5 \cdot 2^n,\, 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n\right), \\ T^n(0,1) &= \left(10(2^n - 3^n),\, 3 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n\right). \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se

$$\begin{aligned} T^n(x,y) &= T^n\big(x(1,0) + y(0,1)\big) = xT^n(1,0) + yT^n(0,1) \\ &= x\big(2 \cdot 3^{n+1} - 5 \cdot 2^n,\, 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n\big) \\ &\qquad + y\big(10(2^n - 3^n),\, 3 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n\big) \\ &= \big((2 \cdot 3^{n+1} - 5 \cdot 2^n)x + 10(2^n - 3^n)y, \\ &\qquad (3^{n+1} - 3 \cdot 2^n)x + (3 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n)y\big). \end{aligned}$$

A expressão obtida para $T^n(x,y)$ é o que menos importa. Mais importante é perceber que se um operador é diagonalizável, podemos encontrar a imagem de um elemento de seu domínio por uma potência do operador, por maior que ela seja, sem precisar realizar o esforço de compor o operador com ele mesmo o número de vezes necessário. $\diamondsuit$

Observação. Cabe, neste momento, a fim de relacionar o conceito de matriz diagonalizável, visto no início deste capítulo, com o de operador linear diagonalizável, retomar o Exemplo 6.2.7 no caso em que $m = n$.

Vimos que cada matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ define um operador linear

$$T_A \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

dado por $T_A(v) = Av$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Sabemos, também, que, se can denota a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então $[T_A]_{\mathsf{can}} = A$ (ver Exemplo 6.5.5). O resultado é o que se espera: A é uma matriz diagonalizável se, e somente se, T_A é um operador diagonalizável. Vejamos por quê.

Suponha que A seja diagonalizável. De acordo com a definição na página 228, existe uma matriz inversível $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$. Vamos mostrar que P é uma matriz de mudança de base apropriada.

Para tanto, para cada $j = 1, \dots, n$, considere o vetor $v_j \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$v_j = (p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{nj}).$$

(Isto é, v_j coincide com a j-ésima coluna de P). Nossa tarefa será mostrar que $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$ e que a matriz de T_A em relação a $\mathcal{B}$ é a matriz diagonal D.

Como $\mathcal{B}$ contém n vetores, será suficiente verificar que esse conjunto é LI. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{R}^n}$. Em coordenadas (em relação à base canônica) isso é equivalente a

$$P \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como P é inversível, segue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Assim $\mathcal{B}$ é, de fato, uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$. Além disso, pela escolha que fizemos dos elementos de $\mathcal{B}$, temos $[\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}} = P$. Daí segue, do Corolário 6.7.4, que

$$[T_A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T_A]_{\mathsf{can}}P = P^{-1}AP = D,$$

que é diagonal. Portanto, T_A é diagonalizável (os elementos de $\mathcal{B}$ — lembre, as colunas de P — são autovetores de T_A e as entradas na diagonal principal de D são os autovalores correspondentes).

Reciprocamente, suponha, agora, que T_A seja diagonalizável e seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de T_A. Então, denotando $P = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}}$, segue, do Corolário 6.7.4, que

$$P^{-1}AP = P^{-1}[T_A]_{\mathsf{can}}P = [T_A]_{\mathcal{B}},$$

que é uma matriz diagonal (uma vez que os elementos de $\mathcal{B}$ são autovetores de T). Logo, A é diagonalizável. $\diamondsuit$

Por causa dessa observação, dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, dizemos que um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$ é um *autovetor* de A se v for um autovetor do operador linear T_A, e dizemos que um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um *autovalor* de A se λ for um autovalor de T_A.

Ainda, sempre que virmos uma relação matricial da forma

$$AP = PD,$$

com A, P, D matrizes quadradas de mesmo tamanho, em que P é uma matriz inversível e D é uma matriz diagonal, saberemos que a j-ésima coluna de P é um autovetor de A associado ao autovalor que ocupa a j-ésima posição na diagonal principal de D.

Podemos utilizar essa relação entre uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ e o operador linear T_A de $\mathbb{R}^n$ para calcular potências de A.

Exemplo 7.3.4. Dada $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 12 & 2 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, encontre A^{500}.

Solução. Considere o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = A$, em que can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$ (ou seja, $T = T_A$). Vejamos se T é diagonalizável. Temos

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} -5-t & -1 & -2 \\ 12 & 2-t & 6 \\ 8 & 2 & 3-t \end{bmatrix} = -t^3 + 3t + 2 = -(t+1)^2(t-2).$$

Assim, os autovalores de T são -1 e 2. Vejamos se é possível encontrar uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

Os autovetores de T associados ao autovalor -1 são os vetores não nulos em $V(-1) = \operatorname{Ker}\big(T - (-1)\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}\big) = \operatorname{Ker}(T + \mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})$. Dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos: $v \in V(-1)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, se e somente se, para quaisquer escolhas de $y, z \in \mathbb{R}$, tivermos $x = -\frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z$. Logo, os vetores em $V(-1)$ são da forma

$$\left(-\frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z, y, z\right) = y\left(-\frac{1}{4}, 1, 0\right) + z\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right),$$

com $y, z \in \mathbb{R}$. Portanto, $\{(-1, 4, 0), (-1, 0, 2)\}$ é uma base para $V(-1)$.

Os elementos do autoespaço $V(2) = \operatorname{Ker}(T - 2\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})$ são os vetores de $\mathbb{R}^3$ cujas coordenadas são soluções do sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} -7 & -1 & -2 \\ 12 & 0 & 6 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $V(2) = \big\{\big(-\frac{1}{2}z, \frac{3}{2}, z\big) \mid z \in \mathbb{R}\big\}$, donde segue que $V(2) = [(-1, 3, 2)]$.

Observe, agora, que $\mathcal{B} = \{(-1, 4, 0), (-1, 0, 2), (-1, 3, 2)\}$ é LI (aqui é preciso fazer as contas para se convencer desse fato), e, portanto, uma base de $\mathbb{R}^3$, que é formada por autovetores de T, os dois primeiros associados a -1 e o terceiro, a 2. Assim,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Denotando $P = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}}$, segue, do Corolário 6.7.4, que

$$A = [T]_{\mathsf{can}} = P[T]_{\mathcal{B}}P^{-1},$$

donde obtemos

$$A^{500} = \big(P[T]_{\mathcal{B}}P^{-1}\big)^{500} = P[T]_{\mathcal{B}}^{500}P^{-1}. \tag{7.6}$$

É fácil ver que $P = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Invertendo-a, obtemos

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 \\ -8 & -2 & -1 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores encontrados em (7.6), obtemos

$$\begin{aligned} A^{500} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{500} \left(\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 \\ -8 & -2 & -1 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{500} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{500} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{500} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 \\ -8 & -2 & -1 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{500} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 \\ -8 & -2 & -1 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 - 2^{502} & 1 - 2^{500} & 2 - 2^{501} \\ -12 + 3 \cdot 2^{502} & 3 \cdot 2^{500} & -6 + 3 \cdot 2^{501} \\ -8 + 2^{503} & -2 + 2^{501} & -1 + 2^{502} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

uma expressão explícita para cada uma das entradas de A^{500}. $\Diamond$

Como último exemplo nesta seção, vejamos como dada uma matriz diagonaliável encontrar informações sobre o operador linear definido por ela.

Exemplo 7.3.5. (Prova 2, Álgebra Linear II, 2019) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$$M^{-1}[T]_{\mathsf{can}}M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

em que $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Então, $T(5,3,4)$ é igual a

(A) $(5,11,13)$

(B) $(8,5,9)$

(C) $(10,6,8)$

(D) $(9,8,5)$

(E) $(7,7,6)$

Solução. A igualdade no enunciado nos mostra que T é diagonalizável, com autovalores $1,2,3$ e que $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ (o conjunto formado pelas colunas de M) é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T associados, respectivamente, a $1,2,3$. (Isso, pois $M = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}}$ e, assim, usando o Corolário 6.7.4, $[T]_{\mathcal{B}} = M^{-1}[T]_{\mathsf{can}}M$.) Portanto,

$$\begin{aligned} T(1,0,1) &= 1(1,0,1) = (1,0,1) \\ T(0,1,1) &= 2(0,1,1) = (0,2,2) \\ T(1,1,0) &= 3(1,1,0) = (3,3,0). \end{aligned}$$

Temos informação suficiente sobre T (imagens dos vetores em uma base do domínio) para determinar a imagem por T de qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$. Em particular, como[1]

$$(5,3,4) = 3(1,0,1) + 1(0,1,1) + 2(1,1,0),$$

segue que

$$\begin{aligned} T(5,3,4) &= 3T(1,0,1) + 1T(0,1,1) + 2T(1,1,0) \\ &= 3(1,0,1) + 1(0,2,2) + 2(3,3,0) \\ &= (9,8,5). \end{aligned}$$

Resposta: (D). $\Diamond$

Nosso objetivo, na próxima seção, será sistematizar as ideias exploradas nesta seção e determinar condições necessárias e suficientes para um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita ser diagonalizável.

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 59–63.

7.4 Operadores diagonalizáveis

Esta seção será dedicada ao Teorema 7.4.3, que caracteriza os operadores diagonalizáveis de um espaço vetorial de dimensão finita, e algumas de suas consequências.

É preciso começar com dois resultados preliminares.

Lema 7.4.1. *Seja T um operador linear em um espaço vetorial V e sejam λ_1, λ_2, $\dots$, λ_k autovalores de T dois a dois distintos entre si. Se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k$ são conjuntos LI finitos satisfazendo $\mathcal{B}_i \subseteq V(\lambda_i)$, para todo $i = 1,\dots,k$, então a união $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ é LI.*

[1] Você deve ser capaz de encontrar as coordenadas, em relação à base $\mathcal{B}$ de um vetor arbitrário:

$$(x,y,z) = \frac{x-y+z}{2}(1,0,1) + \frac{-x+y+z}{2}(0,1,1) + \frac{x+y-z}{2}(1,1,0).$$

Demonstração. Comecemos por demonstrar o lema no caso em que $k = 2$. Sejam, então, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ autovalores de T, com $\lambda \neq \mu$ e sejam $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ um conjunto LI de autovetores de T associados a λ e $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ um conjunto LI de autovetores de T associados a μ. Para mostrar que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_q\}$, é LI, precisamos tomar uma combinação linear dos elementos desse conjunto que resulta no vetor nulo de V e mostrar que todos os escalares na combinação linear são nulos. Assim, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_q v_q = 0_V. \tag{7.7}$$

Aplicando o operador T em ambos os lados de (7.7), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 T(u_1) + {} & \alpha_2 T(u_2) + \cdots + \alpha_p T(u_p) \\ & + \beta_1 T(v_1) + \beta_2 T(v_2) + \cdots + \beta_q T(v_q) = T(0_V) = 0_V. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Como os u_i são autovetores de T associados a λ, temos $T(u_i) = \lambda u_i$, para cada $i = 1, \dots, k$. De maneira análoga, $T(v_j) = \mu v_j$, para cada $j = 1, \dots, q$. Assim, (7.8) implica

$$\alpha_1 \lambda u_1 + \alpha_2 \lambda u_2 + \cdots + \alpha_p \lambda u_p + \beta_1 \mu v_1 + \beta_2 \mu v_2 + \cdots + \beta_q \mu v_q = 0_V. \tag{7.9}$$

Por outro, lado, multiplicando os dois lados de (7.7) por λ resulta em

$$\alpha_1 \lambda u_1 + \alpha_2 \lambda u_2 + \cdots + \alpha_p \lambda u_p + \beta_1 \lambda v_1 + \beta_2 \lambda v_2 + \cdots + \beta_q \lambda v_q = 0_V. \tag{7.10}$$

Subtraindo (7.9) de (7.10), obtemos

$$(\lambda - \mu)\beta_1 v_1 + (\lambda - \mu)\beta_2 v_2 + \cdots + (\lambda - \mu)\beta_q v_q = 0_V.$$

Mas o conjunto $\mathcal{C}$ é, por hipótese, LI. Assim, necessariamente, $(\lambda - \mu)\beta_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, q$. Como $\lambda \neq \mu$, segue que $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0$. Substituindo esses valores em (7.7), obtemos

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_V,$$

que, por sua vez, implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$, já que $\mathcal{B}$ também é LI. Isso prova que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é LI.

O passo seguinte é mostrar que o resultado vale para $k = 3$. Seremos um pouco mais econômicos nos detalhes. Sejam λ, μ, ρ autovalores de T distintos, e sejam

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{u_1, \dots, u_p\} \subseteq V(\lambda), \\ \mathcal{C} &= \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V(\mu), \\ \mathcal{D} &= \{w_1, \dots, w_t\} \subseteq V(\rho) \end{aligned}$$

conjuntos LI. Dados $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \gamma_1, \dots, \gamma_t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1\, u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_q v_q + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_t w_t = 0_V, \tag{7.11}$$

aplicando T a (7.11), por um lado, e multiplicando (7.11) por λ, por outro, após subtrair uma expressão da outra, obteremos

$$(\lambda-\mu)\beta_1 v_1 + \dots (\lambda-\mu)\beta_q v_q + (\lambda-\rho)\gamma_1 w_1 + \dots (\lambda-\rho)\gamma_t w_t = 0_V,$$

que é uma combinação linear dos elementos de $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ resultando no vetor nulo de V. Mas, vimos que o resultado é válido para $k = 2$. Assim, necessariamente, essa combinação linear deve ser trivial, isto é, $(\lambda-\mu)\beta_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, q$, e $(\lambda-\rho)\gamma_j = 0$, para todo $j = 1, \dots, t$. Como $\lambda \neq \mu$ e $\lambda \neq \rho$, segue que $\beta_1 = \dots = \beta_q = \gamma_1 = \dots = \gamma_t = 0$, o que substituído em (7.11) implica que $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. Logo, $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ é LI.

Como vimos acima, a validade do resultado para $k = 2$ implica sua validade para $k = 3$. De modo análogo, podemos demonstrar que o caso $k = 4$ é consequência do caso $k = 3$, já demonstrado, e assim por diante, obtendo a validade do resultado para qualquer valor inteiro positivo de k.[2] □

O próximo lema, além de ser necessário na demonstração do resultado que o segue (Teorema 7.4.3), tem interesse em si próprio e será utilizado diversas vezes nas análises de operadores que veremos nos exercícios e aplicações.

Como vimos na Seção 7.2, os autovalores de um operador linear T em um espaço vetorial de dimensão finita são precisamente as raízes do polinômio característico p_T de T. Assim, se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T, então $p_T(t)$ é divisível por $t - \lambda$. Chamamos de *multiplicidade* de λ como raiz de p_T o maior inteiro positivo r tal que $p_T(t)$ seja divisível por $(t-\lambda)^r$. (É frequente chamar r também de *multiplicidade algébrica* de λ.) O resultado a seguir estabelece uma relação entre a multiplicidade de um autovalor como raiz do polinômio característico e a dimensão do autoespaço associado.

Lema 7.4.2. *Seja T um operador linear em um espaço vetorial V de dimensão finita e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T de multiplicidade r como raiz do polinômio característico de T. Então,* $1 \leq \dim\big(V(\lambda)\big) \leq r$.

Demonstração. Como V tem dimensão finita, $V(\lambda)$ tem, também, dimensão finita. Que $\dim\big(V(\lambda)\big) \geq 1$ segue do fato de λ ser um autovalor de T. Demonstremos a segunda desigualdade. Tome uma base $\{v_1, \dots, v_s\}$ de $V(\lambda)$ (estamos, assim, denotando $s = \dim\big(V(\lambda)\big)$) e estenda-a a uma base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$ de V (o que é sempre possível, pelo Teorema 4.5.14). Então, a matriz $[T]_\mathcal{B}$ tem a forma

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \lambda I_s & P \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

[2] Esse é um exemplo de argumento em que se utiliza o chamado *princípio de indução finita*.

em que $P \in M_{s\times(n-s)}(\mathbb{R})$, $Q \in M_{n-s}(\mathbb{R})$ e 0 denota a matriz nula de tamanho $(n-s)\times s$. Logo,

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det\big([T]_{\mathcal{B}} - tI_n\big) = \det\begin{bmatrix}(\lambda-t)I_s & P\\ 0 & Q-tI_{n-s}\end{bmatrix}\\ &= (\lambda-t)^s\det(Q-tI_{n-s}). \end{aligned} \tag{7.12}$$

A última igualdade pode ser obtida, por exemplo, por expansão em cofatores, sucessivamente, ao longo da primeira coluna. Podemos reescrever a igualdade obtida em (7.12) da seguinte maneira: $p_T(t) = (t-\lambda)^s q(t)$, com $q(t) = (-1)^s p_Q(t)$. Assim, há, pelo menos, s fatores $t-\lambda$ em $p_T(t)$. Isso quer dizer que $r \geq s = \dim\big(V(\lambda)\big)$. □

Para um autovalor λ de um operador linear T em um espaço vetorial de dimensão finita, costuma-se chamar o número $\dim\big(V(\lambda)\big)$ de *multiplicidade geométrica* de λ. Usando essa linguagem, o Lema 7.4.2 diz que para qualquer autovalor de T, sua multiplicidade geométrica está limitada superiormente por sua multiplicidade algébrica.

Um operador pode não ser diagonalizável por não ter autovalores suficientes (isso é o que ocorreu no Exemplo 7.2.5), ou por não ter autovetores suficientes (como no Exemplo 7.3.2). Esses são, essencialmente, os dois únicos possíveis obstáculos que podem impedir um operador de ser diagonalizável, como veremos no próximo resultado (que já estamos prontos para demonstrar), em que apresentamos condições necessárias e suficientes para um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita ser diagonalizável.

Teorema 7.4.3. *Seja T um operador linear em um espaço vetorial V de dimensão finita. Então, T é diagonalizálvel se, e somente se,*

(i) *todas as raízes do polinômio característico p_T de T forem reais, e*

(ii) *para cada autovalor λ de T, sua multiplicidade como raiz de p_T for igual a $\dim\big(V(\lambda)\big)$.*

Demonstração. Suponha, inicialmente, que T seja diagonalizável e que λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ seja a lista completa de seus autovalores distintos. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V formada por autovetores de T que foi ordenada de modo que os r_1 primeiros elementos de $\mathcal{B}$ sejam autovetores associados a λ_1, que os r_2 seguintes elementos de $\mathcal{B}$ sejam associados a λ_2 e, assim por diante, até os r_k últimos elementos de $\mathcal{B}$, que são autovetores de T associados a λ_k. Assim,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\lambda_1 I_{r_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 I_{r_2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k I_{r_k}\end{bmatrix},$$

em que os 0s são blocos nulos de tamanhos apropriados. Como essa matriz é diagonal, segue que

$$p_T(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}(\lambda_2 - t)^{r_2} \dots (\lambda_k - t)^{r_k}.$$

Logo, as raízes de $p_T(t)$ são $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_k$ (de multiplicidades $r_1, r_2, \dots, r_k$, respectivamente), que são, todas, números reais. Resta-nos, portanto, mostrar que para cada $i = 1, \dots, k$, a multiplicidade algébrica de λ_i coincide com sua multiplicidade geométrica. Pelo Lema 7.4.2, já temos uma desigualdade: $\dim\big(V(\lambda_i)\big) \leq r_i$. Mas, o conjunto de r_i autovetores de T associados a λ_i que estão em $\mathcal{B}$ formam um subconjunto LI do espaço vetorial $V(\lambda_i)$. Portanto, $r_i \leq \dim\big(V(\lambda_i)\big)$. (Isso é consequência do Teorema 4.5.10: o tamanho dos subconjuntos LI está limitado superiormente pelo tamanho dos subconjuntos geradores, em particular, está limitado superiormente pela dimensão do espaço vetorial em que se encontram.) Logo, $r_i = \dim\big(V(\lambda_i)\big)$.

Reciprocamente, suponha, agora, que valem (i) e (ii) no enunciado do teorema e denote $n = \dim(V)$. Como todas as raízes de $p_T(t)$ são reais, esse polinômio se fatora completamente:

$$p_T(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}(\lambda_2 - t)^{r_2} \dots (\lambda_k - t)^{r_k}, \tag{7.13}$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ distintos. Assim, os autovalores de T são λ_1, λ_2, $\dots$, λ_k. Para cada $i = 1, \dots, k$, seja $\mathcal{B}_i$ uma base de $V(\lambda_i)$. O Lema 7.4.1 garante que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ é LI. Além disso, esse conjunto contém $r_1 + r_2 + \dots + r_k$ elementos, pela condição (ii). De (7.13), segue que essa soma coincide com o grau de $p_T(t)$, que, como sabemos, é igual a n. Em resumo, $\mathcal{B}$ é um conjunto LI contendo n elementos. Logo, $\mathcal{B}$ é uma base de V. Como seus elementos são todos autovetores de T, concluímos que T é diagonalizável. $\square$

Veremos uma sequência de exemplos em que as condições do teorema serão exploradas. Porém, uma observação bastante útil a respeito da aplicação do teorema deve ser feita antes.

Observação. Uma vez dado um operador linear T em um espaço vetorial de dimensão finita, para decidirmos se ele é ou não diagonalizável, precisamos, primeiramente verificar se todas as raízes de seu polinômio característico p_T são reais. Se p_T tiver uma raiz complexa não real, já temos nossa resposta: T não é diagonalizável.

Suponha, agora, que todas as raízes de p_T sejam números reais. Ainda assim, é possível que T não seja diagonalizável, basta que, para um de seus autovalores, a multiplicidade geométrica seja diferente da algébrica. Assim, para mostrar que T é diagonalizável (caso ele, de fato, o seja), é preciso verificar, para cada um dos autovalores de T se as multiplicidades algébricas e geométricas coincidem. As multiplicidades algébricas dos autovalores se obtêm de uma fatoração completa do polinômio característico como produto de fatores lineares. Já as multiplicidades geométricas são obtidas por meio do cálculo das dimensões dos autoespaços associados.

O que se quer destacar aqui é que se λ é um autovalor de T de multiplicidade algébrica igual a 1, não há cálculo necessário a ser feito. Do Lema 7.4.2 segue que, neste caso, $1 \leq \dim\big(V(\lambda)\big) \leq 1$; consequentemente, não há outra possibilidade senão $\dim\big(V(\lambda)\big) = 1$. Ou seja, a igualdade desejada entre as multiplicidades do autovalor λ está garantida.

Assim, um operador linear cujos autovalores são todos reais só deixa eventualmente de ser diagonalizável se algum de seus autovalores de multiplicidade algébrica *maior* do que 1 tiver multiplicidade geométrica menor do que ela. $\Diamond$

Exemplo 7.4.4. Decida se é ou não diagonalizável o operador linear $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Solução. Começamos por determinar os autovalores de T:

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det \begin{bmatrix} -t & 3 & 3 \\ -1 & -4-t & -1 \\ 2 & 2 & -1-t \end{bmatrix} = -t^3 - 5t^2 - 3t + 9 \\ &= -(t-1)(t+3)^2. \end{aligned}$$

(As raízes de p_T foram encontradas por inspeção: sabemos que se p_T tiver raízes racionais, elas pertencerão ao conjunto $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$. Veja o Apêndice D para alguns fatos sobre polinômios e suas raízes.) Assim, os autovalores de T são 1, de multiplicidade 1, e -3, de multiplicidade 2. Como vimos na observação que precede este exemplo, sabemos que $\dim\big(V(1)\big) = 1$. Resta verificar a condição (ii) no Teorema 7.4.3 para o autovalor -3. Temos $V(-3) = \operatorname{Ker}(T + 3\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})$. Para calcular a dimensão desse autoespaço podemos proceder de maneira indireta, por meio do Teorema do núcleo e da imagem (Teorema 6.3.1). Sabemos, pela Observação na página 213, que a imagem de $T + 3\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}$ é gerada pelas colunas de

$$[T + 3\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathsf{can}} = [T]_{\mathsf{can}} + 3[\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathsf{can}} = [T]_{\mathsf{can}} + 3I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Isto é, $\operatorname{Im}(T + 3\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}) = [(3, -1, 2)]$, que, obviamente, tem dimensão igual a 1. Segue que

$$\begin{aligned} \dim\big(V(-3)\big) &= \dim\big(\operatorname{Ker}(T + 3\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})\big) \\ &= \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(\operatorname{Im}(T + 3\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})\big) \\ &= 3 - 1 = 2, \end{aligned}$$

coincidindo, portanto, com a multiplicidade algébrica de -3. Logo, pelo Teorema 7.4.3, T é um operador diagonalizável.

Conseguimos dar uma resposta para o que se pediu sem precisar exibir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Mas sabemos que uma tal base existe. Vejamos, agora, como encontrá-la.

Sabemos que se encontramos uma base para $V(1)$ (que será formada por um único vetor, uma vez que $\dim\big(V(1)\big) = 1$) e uma base para $V(-3)$ (que terá dois vetores), a união dessas duas bases será um conjunto LI (pelo Lema 7.4.1) de 3 vetores em $\mathbb{R}^3$, portanto, uma base de $\mathbb{R}^3$, que é formada por autovetores de T. Tratemos de um autoespaço por vez.

Como $V(1) = \operatorname{Ker}(T - \mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})$, os elementos de $V(1)$ são os vetores $v \in \mathbb{R}^3$ tais que $[T - \mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathsf{can}}[v]_{\mathsf{can}} = [(T - \mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})(v)]_{\mathsf{can}} = [0_{\mathbb{R}^3}]_{\mathsf{can}}$. Porque

$$[T - \mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathsf{can}} = [T]_{\mathsf{can}} - [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathsf{can}} = [T]_{\mathsf{can}} - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

segue que, dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos $v \in V(1)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.14}$$

Escalonando a matriz de coeficientes desse sistema, obtemos

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Essa matriz tem dois pivôs, o que implica que o subespaço de $\mathbb{R}^3$ formado pelas soluções do sistema (7.14) tem dimensão $3 - 2 = 1$, o que não se trata de novidade, uma vez que esse subespaço é justamente $V(1)$, cuja dimensão já sabíamos ser igual a 1.) Assim, z é a única variável livre e, por retrossubstituição, obtemos $y = -\frac{z}{2}$ e $x = \frac{3z}{2}$. Logo, os vetores em $V(1)$ são da forma

$$\left(\frac{3z}{2}, -\frac{z}{2}, z\right) = z\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right),$$

com $z \in \mathbb{R}$. Portanto, $V(1) = \big[\big(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\big)\big] = [(3, -1, 2)]$.

Procedamos à determinação de uma base de $V(-3)$. Por definição, $V(-3) = \operatorname{Ker}(T - 3\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})$. Logo, dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos: $v \in V(-3)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O escalonamento é imediato; y e z são variáveis livres e $x = -y - z$. Assim, os elementos de $V(-3)$ são da forma

$$(-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $V(-3) = [(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)]$.

O conjunto $\mathcal{B} = \{(3, -1, 2), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Em particular,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, podemos utilizar o Corolário 6.7.4 para concluir que

$$P^{-1}[T]_{\mathsf{can}} P = [T]_{\mathcal{B}},$$

em que

$$P = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou, explicitamente,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

que é uma expressão que "diagonaliza" a matriz $[T]_{\mathsf{can}}$. ◊

Exemplo 7.4.5. Decida se é ou não diagonalizável o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 13 & 8 & -2 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução. O polinômio característico de T é

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} -8-t & -5 & 1 \\ 13 & 8-t & -2 \\ -5 & -3 & 1-t \end{bmatrix} = -t^3 + t^2 = -t^2(t-1).$$

Os autovalores de T são 0 (de multiplicidade 2) e 1 (de multiplicidade 1). Como sabemos que $\dim\big(V(1)\big) = 1$, T só poderá deixar de ser diagonalizável caso $\dim\big(V(0)\big) < 2$. Dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos: $v \in V(0)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 13 & 8 & -2 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo operações elementares sobre as linhas da matriz de coeficientes desse sistema, obtemos

$$\begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 13 & 8 & -2 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 13 & 8 & -2 \\ -13 & -8 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 13 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que é escalonada. Segue, assim, que $y = -3z$ e $x = 2z$. Assim, $V(0) = [(2, -3, 1)]$, que tem dimensão 1. Logo, T não é diagonalizável. (Isto é, não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.) $\diamondsuit$

Exemplo 7.4.6. Decida se é ou não diagonalizável o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução. O polinômio característico de T é

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & -1 & 3-t \end{bmatrix} = -(t-2)(t^2 - 4t + 5).$$

Como as raízes do fator $t^2 - 4t + 5$ de $p_T(t)$ não são reais (uma vez que tem discriminante $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$), as raízes de $p_T(t)$ não são todas reais. Logo, T não é diagonalizável. $\diamondsuit$

Algumas consequências imediatas do Teorema 7.4.3 são as seguintes.

Corolário 7.4.7. *Seja T um operador linear em um espaço vetorial V de dimensão finita igual a n. Se tiver n autovalores distintos, T será diagonaliável.*

Demonstração. Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são n autovalores distintos de T, então o polinômio característico de T será divisível por $(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n)$. Uma comparação de graus implica

$$p_T(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n).$$

Ou seja, as raízes de p_T são precisamente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, todas elas reais. Além disso, cada uma delas tem multiplicidade algébrica igual a 1 e, portanto, pelo Lema 7.4.2, $\dim\big(V(\lambda_i)\big) = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, T é diagonalizável. $\square$

É preciso alertar que a recíproca desse resultado está longe de ser verdadeira: há diversos operadores diagonalizáveis com menos autovalores do que a dimensão do espaço em que estão definidos, como ocorre, a título de ilustração, no Exemplo 7.4.4.

Corolário 7.4.8. *Seja T um operador linear em um espaço vetorial V de dimensão finita cujos autovalores são $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Então, T é diagonalizável se, e somente se,*

$$\dim\big(V(\lambda_1)\big) + \dim\big(V(\lambda_2)\big) + \cdots + \dim\big(V(\lambda_k)\big) = \dim(V).$$

Demonstração. Seja $n = \dim(V)$. Se T é diagonalizável, então o polinômio característico de T tem apenas raízes reais, o que acarreta a existência de uma fatoração de p_T da forma

$$p_T(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{r_1}(t-\lambda_2)^{r_2} \dots (t-\lambda_k)^{r_k},$$

em que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são números reais dois a dois distintos. Além disso, para cada autovalor de T, suas multiplicidades algébricas e geométricas coincidem, isto é, para cada $i = 1, \dots, k$, temos

$$r_i = \dim\big(V(\lambda_i)\big).$$

Logo, como o grau de p_T coincide com a dimensão de V, temos

$$\begin{aligned} n &= r_1 + r_2 + \cdots + r_k \\ &= \dim\big(V(\lambda_1)\big) + \dim\big(V(\lambda_2)\big) + \cdots + \dim\big(V(\lambda_k)\big). \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que vale

$$\dim\big(V(\lambda_1)\big) + \dim\big(V(\lambda_2)\big) + \cdots + \dim\big(V(\lambda_k)\big) = n.$$

Tome, para cada $i = 1, \dots, n$, uma base $\mathcal{B}_i$ de $V(\lambda_i)$. Pelo Lema 7.4.1, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ é um conjunto LI, que contém $n = \dim(V)$ elementos. Logo, $\mathcal{B}$ é uma base de V formada por autovetores de T, o quer dizer que T é diagonalizável. $\square$

Exemplo 7.4.9. (Prova 2, Álgebra Linear II, 2016) Sejam V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T \colon V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = -t^3(t-2)^2$. Então, T é diagonalizável se, e somente se,

(A) $\dim\big(\operatorname{Ker}(T - 2\,\mathrm{I}_V)\big) = 2$

(B) $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) - \dim\big(\operatorname{Ker}(T - 2\,\mathrm{I}_V)\big) = 0$

(C) $\dim\big(\operatorname{Im}(T - 2\,\mathrm{I}_V)\big) - \dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 1$

(D) $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 2$

(E) $\dim\big(\operatorname{Im}(T - 2\,\mathrm{I}_V)\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = 5$

Solução. Os autovalores de T são 0 e 2. Sabemos, pelo Corolário 7.4.8, que T é diagonalizável se, e somente se, $\dim\big(V(0)\big) + \dim\big(V(2)\big) = \dim(V) = 5$. Agora, $V(0) = \operatorname{Ker}(T - 0\,\mathrm{I}_V) = \operatorname{Ker}(T)$ e $V(2) = \operatorname{Ker}(T - 2\,\mathrm{I}_V)$. Pelo Teorema do núcleo e da imagem (Teorema 6.3.1), $\dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) = \dim(V) -$

$\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 5 - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$. Assim, T é diagonalizável se, e somente se, $\big(5 - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{I}_V)\big) = 5$, o que, por sua vez, é equivalente a $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{I}_V)\big) = 0$. *Resposta:* (B) (Fica a cargo do leitor verificar que as igualdades nas demais alternativas não são equivalentes à da alternativa (B).) $\diamondsuit$

Terminamos esta seção com uma observação a respeito de dois conceitos que são frequentemente confundidos, apesar de serem completamente independentes, quais sejam, o de um operador linear ser diagonalizável e o de ser bijetor. Não há relação de dependência entre esses dois conceitos, conforme comprovam os exemplos abaixo, em que exibimos operadores lineares $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, com $[T]_{\mathsf{can}} = A \in M_2(\mathbb{R})$:

- Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então T é tanto bijetor, uma vez que, neste caso, T é o operador identidade $\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}$, quanto diagonalizável (a própria base can é uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T).

- Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, então T não é bijetor, pois não é injetor, uma vez que $(0,1) \in \mathrm{Ker}(T)$, mas é diagonalizável (novamente, can é uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T).

- Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então T é bijetor, já que é sobrejetor, pois $\mathrm{Im}(T) = \big[(1,1),(1,0)\big] = \mathbb{R}^2$, mas não é diagonalizável, uma vez que, como $\mathrm{Im}(T - \mathrm{I}_{R^2}) = \big[(0,1),(0,0)\big] = \big[(0,1)\big]$, temos, pelo Teorema do núcleo e da imagem (Teorema 6.3.1),

  $$\dim\big(V(1)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2})\big) = 2 - \dim\big(\mathrm{Im}(T - \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2})\big) = 1,$$

  ao passo que a multiplicidade algébrica do autovalor 1 é igual a 2, porque $p_T(t) = (t-1)^2$.

- Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, então T não é bijetor, pois não é injetor, uma vez que $(0,1) \in \mathrm{Ker}(T)$, nem diagonaliável, já que, como $p_T(t) = t^2$, o autovalor 0 tem multiplicidade algébrica igual a 2, mas

  $$\dim\big(V(0)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2 - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1,$$

  uma vez que $\mathrm{Im}(T) = \big[(0,1),(0,0)\big] = \big[(0,1)\big]$.

Exercícios. Lista 2 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 64–81.

7.5 Aplicação: resolução de sistemas de equações diferenciais (caso real)

Nesta seção, veremos como utilizar o que vimos a respeito de matrizes diagonalizáveis para encontrar soluções de sistemas de equações diferenciais.

Dado um número $a \in \mathbb{R}$, dizemos que uma função derivável $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *solução* da *equação diferencial*[3]

$$x' = ax, \tag{7.15}$$

se $f'(t) = af(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Os conhecimentos adquiridos em um curso de Cálculo são suficientes para determinarmos todas as soluções de (7.15). Apresentamos a seguir um argumento completo.

Sabemos que para qualquer $c \in \mathbb{R}$, a função $f(t) = ce^{at}$ é uma solução de (7.15), pois f é derivável e

$$f'(t) = cae^{at} = af(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Mais: toda solução de (7.15) é dessa forma. Vejamos por quê. Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma solução de (7.15). Considere a função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = g(t)e^{-at}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, h é derivável e

$$h'(t) = g'(t)e^{-at} + g(t)(-ae^{-at}) = e^{-at}(g'(t) - ag(t)) = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, já que g é solução de (7.15). Portanto, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(t) = c$, para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é, $g(t)e^{-at} = c$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí segue que $g(t) = ce^{at}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Retomando, vimos que as soluções da equação diferencial (7.15) são as funções da forma $f(t) = ce^{at}$, com $c \in \mathbb{R}$. Assim, existem infinitas soluções para a (7.15), uma para cada escolha de c.

Dados $t_0, d \in \mathbb{R}$, se quisermos encontrar, dentre as soluções de (7.15), aquelas que satisfazem a condição $f(t_0) = d$, então, necessariamente,

$$d = f(t_0) = ce^{at_0},$$

donde se obtém que, necessariamente, $c = de^{-at_0}$. Ou seja, existe uma *única* solução f de (7.15) que satisfaz a condição

$$f(t_0) = d.$$

Ela é dada por

$$f(t) = de^{-at_0}e^{at} = de^{a(t-t_0)}.$$

[3]Esta é o que se chama de uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem homogênea com coeficientes constantes. Há diversas outras famílias de equações diferenciais, das quais não trataremos nestas notas.

Exemplo 7.5.1. Encontre todas as soluções da equação diferencial

$$x' = 2x.$$

Determine a solução f que satisfaz $f(0) = -1$.

Solução. Como vimos, as soluções da equação diferencial são da forma

$$f(t) = ce^{2t}.$$

Impondo a condição $f(0) = -1$, obtemos

$$-1 = f(0) = ce^0 = c.$$

Assim, a solução procurada é $f(t) = -e^{2t}$. $\Diamond$

Consideremos, agora, sistemas de equações diferenciais. Para tanto, necessitaremos de algumas notações.

O conjunto de todas as funções de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^n$ será denotado por $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Dado $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, existem $f_1(t), f_2(t), \dots f_n(t) \in \mathbb{R}$ tais que $F(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big)$. Ou seja, cada elemento $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ define n funções $f_1, f_2, \dots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $F(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ tem uma estrutura de espaço vetorial natural:

- dados $F, G \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, define-se a soma de F e G como sendo a função $F + G \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ dada por $(F + G)(t) = F(t) + G(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

- dados $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se multiplicação do escalar λ por F como sendo a função $\lambda F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ dada por $(\lambda F)(t) = \lambda F(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ é dada por

$$F(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, com $f_1, f_2, \dots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, dizemos que F é derivável e definimos sua derivada como sendo a função $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ dada por

$$F'(t) = \big(f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t)\big),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ e uma função $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ derivável, diremos que F é uma *solução* do *sistema de equações diferenciais*

$$X' = AX \tag{7.16}$$

se

$$[F'(t)]_{\mathsf{can}} = A[F(t)]_{\mathsf{can}},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Mais detalhadamente, suponha que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e que F é dada por

$$F(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, em que $f_1, f_2, \dots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis. Então, diremos que F é solução de (7.16) se

$$\begin{cases} f_1'(t) = a_{11}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + \cdots + a_{1n}f_n(t) \\ f_2'(t) = a_{21}f_1(t) + a_{22}f_2(t) + \cdots + a_{2n}f_n(t) \\ \quad\vdots \\ f_n'(t) = a_{n1}f_1(t) + a_{n2}f_2(t) + \cdots + a_{nn}f_n(t), \end{cases}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nossa primeira observação é que o subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ formado por todas as soluções de (7.16) é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Com efeito, se $F(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$ e $G(t) = \big(g_1(t), \dots, g_n(t)\big)$ são tais que $F, G \in \mathcal{S}$, então, para cada $i = i, \dots, n$, temos

$$f_i'(t) = a_{i1}f_1(t) + a_{i2}f_2(t) + \cdots + a_{in}f_n(t)$$

e

$$g_i'(t) = a_{i1}g_1(t) + a_{i2}g_2(t) + \cdots + a_{in}g_n(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} (f_i + g_i)'(t) &= f_i'(t) + g_i'(t) \\ &= a_{i1}\big(f_1(t) + g_1(t)\big) + a_{i2}\big(f_2(t) + g_2(t)\big) + \dots \\ &\qquad + a_{in}\big(f_n(t) + g_n(t)\big) \\ &= a_{i1}(f_1 + g_1)(t) + a_{i2}(f_2 + g_2)(t) + \cdots + a_{in}(f_n + g_n)(t), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso prova que $F + G \in \mathcal{S}$. A demonstração de que dados $F \in \mathcal{S}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $\lambda F \in \mathcal{S}$ é semelhante e será deixada a cargo do leitor.

O caso diagonal. O caso mais simples de sistemas da forma (7.16) ocorre quando A é uma matriz diagonal, ou seja, sistemas na forma

$$X' = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} X \tag{7.17}$$

com $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos, na realidade, n equações diferenciais da forma (7.15) independentes:

$$\begin{cases} x_1' = a_1 x_1, \\ x_2' = a_2 x_2, \\ \quad \vdots \\ x_n' = a_n x_n. \end{cases}$$

Assim, utilizando o que vimos no início da seção, podemos afirmar que as soluções de (7.17) são dadas por

$$F(t) = (c_1 e^{a_1 t}, c_2 e^{a_2 t}, \ldots, c_n e^{a_n t}),$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Como podemos escrever

$$F(t) = c_1 e^{a_1 t}(1, 0, 0, \ldots, 0) + c_2 e^{a_2 t}(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + c_n e^{a_n t}(0, 0, \ldots, 0, 1),$$

concluímos que o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ formado pelas soluções de (7.17) é gerado pelas funções $G_1, G_2, \ldots, G_n$, em que, para cada $i = 1, \ldots, n$ a função $G_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é definida por

$$G_i(t) = e^{a_i t} u_i,$$

e $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Na realidade $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ não é apenas uma conjunto gerador para $\mathcal{S}$, ele é uma base para $\mathcal{S}$, já que esse conjunto é também LI. Para ver isso, tome $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_n G_n = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)}.$$

Então,

$$\lambda_1 G_1(t) + \lambda_2 G_2(t) + \cdots + \lambda_n G_n(t) = 0_{\mathbb{R}^n}, \tag{7.18}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$; em particular, essa igualdade vale quando $t = 0$. Mas, é fácil ver que $G_i(0) = u_i$. Assim, (7.18) implica

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Como $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, segue $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Portanto, $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ é LI e, consequentemente, uma base de $\mathcal{S}$.

Veremos, a seguir, como proceder quando a matriz A não é necessariamente diagonal, mas é diagonalizável. (É claro que o caso diagonal é um caso particular do caso diagonalizável, mas a discussão feita acima será utilizada abaixo.)

O caso diagonalizável. Suponha que no sistema de equações diferenciais (7.16) a matriz A seja diagonalizável. Isso é equivalente, como vimos na Observação na página 241, a supor que exista uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores do operador linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = A$. Assim, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Se tomarmos $P = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}}$, teremos, portanto,

$$P^{-1}AP = P^{-1}[T]_{\mathsf{can}}P = [T]_{\mathcal{B}} = D, \tag{7.19}$$

em que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Se $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ é uma solução de (7.16), defina a função $G \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ por

$$[G(t)]_{\mathsf{can}} = P^{-1}[F(t)]_{\mathsf{can}}, \tag{7.20}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.[4]

Multiplicando (7.20) por P à esquerda, obtemos

$$[F(t)]_{\mathsf{can}} = P[G(t)]_{\mathsf{can}},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, e, derivando, concluímos que

$$[F'(t)]_{\mathsf{can}} = P[G'(t)]_{\mathsf{can}},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} P[G'(t)]_{\mathsf{can}} &= [F'(t)]_{\mathsf{can}} \\ &= A[F(t)]_{\mathsf{can}} \qquad \text{pois } F \text{ é solução de (7.16)} \\ &= AP[G(t)]_{\mathsf{can}} \end{aligned}$$

A multiplicação dessa última igualdade por P^{-1} à esquerda fornece, usando (7.19),

$$[G'(t)]_{\mathsf{can}} = P^{-1}AP[G(t)]_{\mathsf{can}} = D[G(t)]_{\mathsf{can}}.$$

Portanto, G é solução de

$$X' = DX.$$

Como vimos acima, no caso diagonal, $G(t) = (c_1e^{\lambda_1 t}, c_2e^{\lambda_2 t}, \dots, c_ne^{\lambda_n t})$, em que $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1e^{\lambda_1 t} \\ c_2e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_ne^{\lambda_n t} \end{bmatrix} &= [G(t)]_{\mathsf{can}} = P^{-1}[F(t)]_{\mathsf{can}} = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}]^{-1}_{\mathcal{B},\mathsf{can}}[F(t)]_{\mathsf{can}} \\ &= [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}]_{\mathsf{can},\mathcal{B}}[F(t)]_{\mathsf{can}} = [F(t)]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

---

[4] Mais detalhadamente, escreva $P^{-1} = (q_{ij})$ e $F(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big)$, então G é a função de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ tal que $G(t) = \big(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\big)$, em que, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$g_i(t) = q_{i1}f_1(t) + q_{i2}f_2(t) + \cdots + q_{in}f_n(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Essa igualdade nos fornece as coordenadas de $F(t)$ em relação à base $\mathcal{B}$. Assim,

$$F(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Resumindo, e abusando um pouco da notação, mostramos que dada uma matriz A diagonalizável, digamos com $P^{-1}AP = D$, diagonal, se F é solução de $X' = AX$, então $G = P^{-1}F$ é solução de $X' = DX$. É possível mostrar a recíproca: se G é solução de $X' = DX$, então $F = PG$ é solução de $X' = AX$. O argumento sintético é

$$F' = (PG)' = PG' = PDG = PDP^{-1}PG = AF.$$

Isso que dizer que as soluções de $X' = AX$ são precisamente da forma PG, com G solução de $X' = DX$. Como vimos, isso implica que as soluções de $X' = AX$ são da forma

$$F(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, são as combinações lineares das funções

$$e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \ldots, e^{\lambda_n t} v_n.$$

Podemos dizer mais: $\{e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \ldots, e^{\lambda_n t} v_n\}$ é uma base para o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ formado pelas soluções de $X' = AX$. Já vimos que esse conjunto gera $\mathcal{S}$. Vejamos por que ele é LI. Se $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\mu_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \mu_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + \mu_n e^{\lambda_n t} v_n = 0_{\mathbb{R}^n},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, então, fazendo $t = 0$,

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI (porque é uma base de $\mathbb{R}^n$), segue que $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$.

Em particular, mostramos que $\dim(\mathcal{S}) = n$.

Resumimos as conclusões que obtivemos no resultado a seguir (que contém o caso diagonal como caso particular).

Teorema 7.5.2. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz diagonalizável e seja $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ formado pelas soluções do sistema de equações diferenciais $X' = AX$. Então,* $\dim(\mathcal{S}) = n$. *Além disso, se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A e, para cada $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ é o autovalor de A associado a v_i, então $\{e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \ldots, e^{\lambda_n t} v_n\}$ é uma base para $\mathcal{S}$.*

Exemplo 7.5.3. Encontre todas as soluções do sistema de equações diferenciais

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} X.$$

Determine a solução particular do sistema que satisfaz a condição $X(0) = (-1,-1,-1)$.

Solução. Como é costume na resolução de equações, identificaremos a variável do sistema (aqui denotada por X) com suas soluções (que são elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$).

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ tem autovalores 1, de multiplicidade 2, e 3, de multiplicidade 1 (Verifique essa afirmação.). Assim, ela será diagonalizável se, e somente se, $\dim\big(V(1)\big) = 2$. Dado $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos: $v \in V(1)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo, esse sistema linear homogêneo, obtemos

$$V(1) = [(1,0,0),(0,1,-1)],$$

que tem dimensão 2. Logo, A é diagonalizável, e podemos aplicar as ideias que vimos acima para encontrar as soluções do sistema de equações diferenciais.

Precisamos encontrar, também, os autovetores associados ao autovalor 3. Sabemos que $(x,y,z) \in V(3)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o que nos fornece

$$V(3) = [(2,1,1)].$$

Assim, o conjunto

$$\left\{e^{1t}(1,0,0),\, e^{1t}(0,1,-1),\, e^{3t}(2,1,1)\right\}$$

é uma base para o subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ formado pela soluções do sistema de equações diferenciais no enunciado. Ou seja, as soluções são da forma

$$X(t) = c_1e^t(1,0,0) + c_2e^t(0,1,-1) + c_3e^{3t}(2,1,1),$$

com $c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R}$.

Para encontrar a solução particular procurada, fazemos $t = 0$ na solução geral:

$$(-1,-1,-1) = X(0) = c_1(1,0,0) + c_2(0,1,-1) + c_3(2,1,1).$$

Isto é, c_1, c_2, c_3 devem satisfer

$$\begin{cases} c_1 + 2c_3 = -1 \\ c_2 + c_3 = -1 \\ -c_2 + c_3 = -1 \end{cases}$$

Segue que $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1$. Logo, a solução particular procurada é

$$X(t) = e^t(1,0,0) - e^{3t}(2,1,1) = (e^t - 2e^{3t}, -e^{3t}, -e^{3t}).$$

(Não custa ao leitor verificar que não só essa função satisfaz a condição desejada em $t = 0$ como ela é, de fato, uma solução do sistema de equações diferenciais.) $\Diamond$

Exemplo 7.5.4. (Prova 3, Álgebra Linear II, 2011) Sabendo que $A \in M_3(\mathbb{R})$ é uma matriz que satisfaz $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, em que $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, a solução do sistema $X' = AX$ que verifica $X(0) = (1,2,3)$ é

(A) $X(t) = (e^{-t}, 2e^t + e^{-t}, e^t)$

(B) $X(t) = (e^{-t}, e^t + e^{-t}, 2e^t + e^{-t})$

(C) $X(t) = (e^{-t}, e^t + e^{-t}, e^t + 2e^{-t})$

(D) $X(t) = (e^{-t}, 2e^{-t}, 2e^t + e^{-t})$

(E) $X(t) = (e^t, e^t + e^{-t}, 2e^t + e^{-t})$

Solução. Segue de $M^{-1}AM = \operatorname{diag}(-1,1,1)$, que A é diagonalizável, tem autovalores -1 (de multiplicidade 1) e 1 (de multiplicidade 2), e que

$$V(-1) = [(1,1,1)] \quad \text{e} \quad V(1) = [(0,1,1),(0,0,1)].$$

Logo, a solução geral do sistema é da forma

$$X(t) = c_1e^{-t}(1,1,1) + c_2e^t(0,1,1) + c_3e^t(0,0,1),$$

em que $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Para a solução particular buscada é preciso determinar c_1, c_2, c_3 tais que

$$\begin{aligned}(1,2,3) = X(0) &= c_1(1,1,1) + c_2(0,1,1) + c_3(0,0,1) \\ &= (c_1, c_1 + c_2, c_1 + c_2 + c_3).\end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $c_1 = c_2 = c_3$. Portanto, a solução particular é

$$X(t) = e^{-t}(1,1,1) + e^t(0,1,1) + e^t(0,0,1) = (e^{-t}, e^{-t} + e^t, e^{-t} + 2e^t).$$

Resposta: (B). $\Diamond$

Mesmo que a matriz A em um sistema de equações diferenciais da forma (7.16) não seja diagonalizável, há métodos para encontrar todas as soluções. Não veremos o tratamento do caso geral, por envolver um desenvolvimento da teoria que não é abordado nestas notas.[5] Mas, na Seção 9.3 conseguiremos ainda tratar de alguns casos em que a matriz A não é diagonalizável no sentido utilizado nesta seção.

Exercícios. Lista 3 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 27–31.

[5]Para o leitor interessado, recomendamos a leitura do Capítulo 7 de [**4**].

8

Operadores em espaços com produto interno

Neste capítulo, iremos conjugar a teoria de diagonalização de operadores com a existência de produtos internos no espaço vetorial em que os operadores estão definidos.

Obteremos um resultado que garante ser diagonalizável — em um sentido forte, o de que há base *ortonormal* formada por autovalores — todo operador que é simétrico (cujo significado será tornado preciso adiante) em relação ao produto interno presente no espaço em que ele está definido.

Para atingir esse objetivo, começamos com a definição de operador simétrico, equivalências dessa definição e algumas de suas propriedades.

A última seção apresentará uma aplicação geométrica da teoria desenvolvida no capítulo.

8.1 Operadores simétricos

Sabemos que um mesmo espaço vetorial pode ser munido de diferentes produtos internos. Deste ponto em diante, quando estivermos nos referindo a um espaço vetorial munido de um determinado produto interno e fizermos alguma referência ao produto interno do espaço, será ao produto interno inicialmente fixado que estaremos no referindo.

Em alguns textos, é adotada a nomenclatura *espaço euclidiano* para um espaço vetorial munido de um produto interno fixado; em outros, exige-se, ainda, que o espaço vetorial tenha dimensão finita. Evitaremos o uso dessa nomenclatura nestas notas.

Os operadores definidos em um espaço vetorial munido de um produto interno que serão nosso objeto de estudo neste capítulo são os chamados operadores simétricos, conforme a definição a seguir.

Definição. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um *operador simétrico* se

$$\big\langle T(u), v \big\rangle = \big\langle u, T(v) \big\rangle,$$

para todos $u, v \in V$. Operadores simétricos também são conhecidos como *operadores autoadjuntos* .

Exemplo 8.1.1. Considere o operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (2x - y, -x + y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então, T é simétrico em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^2$, uma vez que,

$$\begin{aligned} \big\langle T(x,y), (x',y') \big\rangle &= \big\langle (2x-y, -x+y), (x',y') \big\rangle \\ &= (2x-y)x' + (-x+y)y' \\ &= 2xx' - yx' - xy' + yy' \\ &= x(2x'-y') + y(-x'+y') \\ &= \big\langle (x,y), (2x'-y', -x'+y') \big\rangle \\ &= \big\langle (x,y), T(x',y') \big\rangle, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$. $\Diamond$

Exemplo 8.1.2. Em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^2$, o operador linear $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $L(x,y) = (3x + 2y, x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, não é simétrico, pois, por exemplo,

$$\big\langle L(1,0), (2,1) \big\rangle = \big\langle (3,1), (2,1) \big\rangle = 6 + 1 = 7,$$

ao passo que

$$\big\langle (1,0), L(2,1) \big\rangle = \big\langle (1,0), (8,2) \big\rangle = 8 + 0 = 8,$$

diferentes, portanto. $\Diamond$

Não é demais repetir a definição: para ser simétrico, o operador linear $T\colon V \to V$ deve satisfazer $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$, *para todos* $u, v \in V$. Isso ocorreu no Exemplo 8.1.1, e, por isso, o operador é simétrico. Mas não no Exemplo 8.1.2, em que encontramos um par de vetores em $\mathbb{R}^2$ para o qual a igualdade não estava satisfeita; isso basta para garantir que o operador não é simétrico.

É claro que ser simétrico é uma noção relativa ao produto interno que está definido. Assim, um mesmo operador pode ser simétrico em relação a um produto interno, mas não a outro.

Exemplo 8.1.3. O operador linear T do Exemplo 8.1.1 não é simétrico em relação ao produto interno $\langle (x,y),(x',y')\rangle_1 = 3xx' + yy'$, pois

$$\big\langle T(1,0),(0,1)\big\rangle_1 = \big\langle (2,-1),(0,1)\big\rangle_1 = -1,$$

mas

$$\big\langle (1,0),T(0,1)\big\rangle_1 = \big\langle (1,0),(-1,1)\big\rangle_1 = -3,$$

resultando em valores diferentes. $\Diamond$

Nosso estudo será concentrado em operadores simétricos definidos em espaço vetoriais *de dimensão finita* munidos de produtos internos. Neste caso, uma vez fixada uma base ordenada para o espaço vetorial, podemos considerar a matriz do operador em relação à base.

Em termos de matrizes de operadores, há um critério simples para decidir se um operador é simétrico ou não, desde que a base escolhida seja ortonormal.

Proposição 8.1.4. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, seja $T\colon V \to V$ um operador linear e seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal ordenada de V. Então, T é um operador simétrico se, e somente se, $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz simétrica.*

Lembremos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ é simétrica se for simétrica em relação a sua diagonal principal, isto é, se $a_{ij} = a_{ji}$, para todos $i,j = 1,\dots,n$. Ou, em outras palavras, A é simétrica se $A = A^{\mathrm{t}}$.

Demonstração. Suponha que $\dim(V) = n$ e que $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Como $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal, podemos utilizar a Proposição 5.2.4 para encontrar as coordenadas de qualquer vetor de V em relação à base V. Em particular, para cada $j = 1,\dots,n$, temos

$$T(e_j) = \big(\big\langle T(e_j),e_1\big\rangle, \big\langle T(e_j),e_2\big\rangle, \dots, \big\langle T(e_j),e_n\big\rangle\big)_{\mathcal{B}}.$$

Logo, a j-ésima coluna da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \big\langle T(e_j),e_1\big\rangle \\ \big\langle T(e_j),e_2\big\rangle \\ \vdots \\ \big\langle T(e_j),e_n\big\rangle \end{bmatrix},$$

e, portanto,

$$[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij}), \quad \text{em que } a_{ij} = \big\langle T(e_j),e_i\big\rangle, \tag{8.1}$$

para todos $i,j = 1,\dots,n$.

Observe que a validade de (8.1) não depende de T ser simétrico. Essa descrição das entradas da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ vale para qualquer operador linear, desde que a base ordenada $\mathcal{B}$ seja ortonormal.

Suponha, agora, por um lado, que T seja simétrico. Então, em particular, para cada $i, j = 1, \ldots, n$, podemos utilizar (8.1) para concluir que

$$a_{ij} = \langle T(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, T(e_i) \rangle = \langle T(e_i), e_j \rangle = a_{ji},$$

isto é, $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz simétrica.

Mostremos, agora, a recíproca. Ou seja, suponha que $[T]_{\mathcal{B}}$ seja simétrica e mostremos que T é um operador simétrico. A hipótese de T ser simétrica, conjugada com (8.1) fornece

$$\langle T(e_j), e_i \rangle = a_{ij} = a_{ji} = \langle T(e_i), e_j \rangle = \langle e_j, T(e_i) \rangle, \tag{8.2}$$

para todos $i, j = 1, \ldots, n$. Nossa tarefa estará terminada se mostrarmos que (8.2) implica que T é um operador simétrico.[1] Sejam, assim, $u, v \in V$. Pela Proposição 5.2.4, temos

$$u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle u, e_n \rangle e_n$$

e

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle T(u), v \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j \rangle T(e_j), \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i \right\rangle && \text{(pois } T \text{ é linear)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_j \rangle \langle v, e_i \rangle \langle T(e_j), e_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_j \rangle \langle v, e_i \rangle \langle e_j, T(e_i) \rangle && \text{(por (8.2))} \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j \rangle e_j, \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle T(e_i) \right\rangle \\
&= \langle u, T(v) \rangle && \text{(pois } T \text{ é linear),}
\end{aligned}$$

garantindo, como desejávamos, que T é simétrico. □

A proposição fornece uma condição que é tanto necessária quanto suficiente para T ser simétrico: se $[T]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, então T é simétrico; se $[T]_{\mathcal{B}}$ não é simétrica, então T não é simétrico.

Vejamos como poderíamos ter usado esse resultado nos Exemplos 8.1.1 e 8.1.2.

Em ambos os exemplos, consideramos o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Sabemos que a base canônica $\mathtt{can} = \{(1,0), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é ortonormal

[1] Este é um fato geral: para verificar a validade da condição que caracteriza um operador como sendo simétrico, é suficiente verificá-la em vetores de uma base.

em relação ao produto interno usual. Assim, como $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, podemos concluir que T é simétrico. Por outro lado, como $[L]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ não é simétrica, segue que L não é simétrico.

Analisemos, com a Proposição 8.1.4 em mente, o Exemplo 8.1.3. Como vimos, $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica, mas o operador T não é simétrico em relação ao produto interno $\langle\, , \rangle_1$, definido no Exemplo 8.1.3. Não há contradição com a Proposição 8.1.4, uma vez que, neste caso, can não é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno $\langle\, , \rangle_1$. Se quiséssemos utilizar essa proposição para esse exemplo, poderíamos trocar can por uma base de $\mathbb{R}^2$ que é ortonormal em relação a $\langle\, , \rangle_1$. Por exemplo,

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), (0, 1) \right\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ em relação a $\langle\, , \rangle_1$, e

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix},$$

que não é uma matriz simétrica. A Proposição 8.1.4 agora se aplica e podemos concluir, assim, que T não é um operador simétrico em relação ao produto interno $\langle\, , \rangle_1$.

Vejamos outros exemplos.

Exemplo 8.1.5. Decida se o operador linear $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (\,-y + 2z,\ -x + y + 3z,\ 2x + 3y + z\,),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, é simétrico em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^3$.

Solução. Como can é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno usual, podemos utilizar a Proposição 8.1.4 para decidir se T é simétrico ou não olhando para $[T]_{\mathsf{can}}$. Temos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (0,-1,2), \\ T(0,1,0) &= (-1,1,3), \\ T(0,0,1) &= (2,3,1). \end{aligned}$$

Assim,

$$[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $[T]_{\mathsf{can}}$ é uma matriz simétrica (o que pode ser verificado olhando para as entradas simétricas em relação à diagonal principal, como indicado pelo uso de cores diferentes), segue que T é um operador simétrico. $\Diamond$

Exemplo 8.1.6. Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Decida se o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrico em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^3$.

Solução. A matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é obviamente simétrica. Porém, como $\mathcal{B}$ *não é* uma base ortonormal em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^3$, o critério da Proposição 8.1.4 não pode ser utilizado. (A simetria de $[T]_{\mathcal{B}}$ não nos permite concluir sobre T ser simétrico ou não.) Vejamos qual é a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ (esta, sim, ortonormal em relação ao produto interno usual). Sabemos, do Corolário 6.7.4 que $[T]_{\mathsf{can}} = P[T]_{\mathcal{B}}P^{-1}$, em que

$$P = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

que não é uma matriz simétrica. Como can é ortonormal em relação ao produto interno usual, segue, da Proposição 8.1.4, que T não é um operador simétrico. $\Diamond$

Exercícios. Lista 3 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 1–7.

8.2 Diagonalização de operadores simétricos

Dado um operador linear T em um espaço vetorial V, um caso especial do Lema 7.4.1 diz que se u e v são autovetores de T associados a autovalores distintos, então o conjunto $\{u,v\}$ é LI. Veremos, abaixo, que no caso de operadores simétricos, se pode dizer mais: o conjunto $\{u,v\}$ é ortogonal.

Lema 8.2.1. *Seja T um operador linear simétrico em um espaço vetorial V munido de um produto interno e sejam $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ escalares distintos. Se $u \in V(\lambda)$ e $v \in V(\mu)$, então $\langle u,v\rangle = 0$.*

Demonstração. Como $\lambda \neq \mu$, um desses dois escalares deve ser diferente de zero. Suponha que $\lambda \neq 0$. Como $u \in V(\lambda)$, temos $T(u) = \lambda u$, e, portanto,

$u = \lambda^{-1}T(u)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \langle \lambda^{-1}T(u), v\rangle \\
&= \lambda^{-1}\langle T(u), v\rangle \\
&= \lambda^{-1}\langle u, T(v)\rangle \qquad \text{(pois } T \text{ é simétrico)} \\
&= \lambda^{-1}\langle u, \mu v\rangle \qquad \text{(pois } v \in V(\mu)\text{)} \\
&= \lambda^{-1}\mu\langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

Segue, portanto, que $(1 - \lambda^{-1}\mu)\langle u, v\rangle = 0$. Como $\lambda \neq \mu$, temos $\langle u, v\rangle = 0$. □

Nosso objetivo será mostrar, no Teorema 8.2.3, que todo operador simétrico em um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno é diagonalizável. Melhor: mostraremos que o espaço em que está definido o operador tem uma base *ortonormal* formada por autovetores.

A demonstração desse fato usará um argumento indutivo (como o que foi usado na demonstração do Lema 7.4.1). A redução da análise de um caso a outro ocorrendo em dimensão inferior fará uso do próximo resultado.

Lema 8.2.2. *Seja T um operador linear simétrico em um espaço vetorial munido de um produto interno e seja $v \in V$ um autovetor de T. Então, para todo $w \in [v]^\perp$, temos $T(w) \in [v]^\perp$.*

Lembremos, da Seção 5.4, que se X é um subconjuto qualquer de um espaço vetorial V munido de um produto interno, então $X^\perp$ é um subespaço de V definido por $X^\perp = \{v \in V \mid v \perp x, \text{ para todo } x \in X\}$.

Demonstração. Dado $w \in [v]^\perp$, queremos mostrar que $T(w) \in [v]^\perp$. A Observação na página 179 nos diz que $[v]^\perp = \{v\}^\perp$. Assim, para mostrar que $T(w) \in [v]^\perp$, basta mostrar que $T(w) \perp v$. Como v é um autovetor de T, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. E, como T é simétrico,

$$\langle T(w), v\rangle = \langle w, T(v)\rangle = \langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle = 0,$$

já que $w \in [v]^\perp$. Isso prova que $T(w) \in [v]^\perp$. □

Se T é um operador linear em um espaço vetorial V e W é um subespaço de V com a propriedade de que $T(w) \in W$, para todo $w \in W$, diz-se que W é um *subespaço invariante* por T ou, simplesmente, que W é *T-invariante*.

Usando essa linguagem, o lema acima pode ser enunciado da seguinte maneira: se v é um autovetor de um operador simétrico T em um espaço vetorial V munido de um produto interno, então $[v]^\perp$ é um subespaço T-invariante de V.

Subsepaços invariantes têm papel fundamental no estudo de operadores lineares, porém não teremos como objetivo nestas notas perseguir este caminho. Para o leitor interessado, indicam-se livros mais avançados de álgebra linear, por exemplo, [**6**].

Teorema 8.2.3. *Seja T um operador linear simétrico em um espaço vetorial V de dimensão finita munido de um produto interno. Então, V tem uma base ortonormal formada por autovetores de T.*

Demonstração. Vejamos a demonstração no caso em que $\dim(V) = 2$. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V. Como T é simétrico, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$. Assim,

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} \alpha - t & \beta \\ \beta & \gamma - t \end{bmatrix} = t^2 + (-\alpha - \gamma)t + (\alpha\gamma - \beta^2).$$

O discriminante de p_T é dado por

$$\Delta = (-\alpha - \gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta)^2 = (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 \geq 0.$$

Há duas possibilidades: ou $\Delta = 0$, ou $\Delta > 0$.

No caso em que $\Delta = 0$, temos, necessariamente, $\alpha = \gamma$ e $\beta = 0$, já que uma soma de quadrados só é nula se cada um de seus termos for nulo. Portanto, $[T]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\alpha, \alpha)$ é uma matriz diagonal. Neste caso, $\mathcal{B}$, que é ortonormal, já é uma base de autovetores de V.

Se $\Delta > 0$, então p_T tem duas raízes distintas: λ_1 e λ_2. Se v_1 e v_2 são autovetores de T associados, respectivamente, a λ_1 e λ_2, então, pelo Lemma 8.2.1, $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não nulos em V. Pelo Lema 5.2.6, $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto LI dentro de V, que é um espaço vetorial de dimensão 2. Segue que $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal de V formada por autovetores de T. Logo, $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\}$ é uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

Tratemos, agora, do caso em que $\dim(V) = 3$. Como tem igual a 3, p_T tem pelo menos uma raiz real λ_1. Seja $v_1 \in V$ um autovetor de T associado a λ_1. Se denotarmos $W = [v_1]^{\perp}$, então, por causa do Lema 8.2.2, $T(w) \in W$, para todo $w \in W$. Isso quer dizer que podemos definir uma função $T' \colon W \to W$ dada por $T'(w) = T(w)$, para todo $w \in W$.

É fácil ver que T' é um operador linear e que ele é simétrico em relação ao produto interno de V restrito a W. (Ambas as afirmações seguem do fato de T ser um operador simétrico). Agora, usando o Teorema 5.4.3, obtemos

$$\dim(W) = \dim\big([v_1]^{\perp}\big) = \dim(V) - \dim\big([v_1]\big) = 3 - 1 = 2.$$

Como vimos que o teorema vale para espaços vetoriais de dimensão 2, podemos concluir que existe uma base ortonormal $\{v_2, v_3\}$ de W formada por autovetores de T'. Então, v_2 e v_3 são autovetores de T e $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de V, uma vez que $V = [v_1] \oplus [v_1]^\perp$ (pelo Teorema 5.4.3, novamente). Daí segue que $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, v_2, v_3\right\}$ é uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

Observe que todos os passos do argumento acima podem ser repetidos, no caso em que $\dim(V) = 4$, desde que saibamos que p_T tem pelo menos uma raiz real, usando a validade do resultado para espaços de dimensão 3 (que acabamos de demonstrar). O fato de toda matriz simétrica ter pelo menos um autovalor real é demonstrado na Seção D.3 do Apêndice D.

A iteração dessa argumentação permite que se conclua que o resultado vale para qualquer espaço vetorial de dimensão finita. $\square$

Exemplo 8.2.4. Encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, em relação ao produto interno usual, formada por autovetores do operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaz $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução. Como, em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^2$, can é uma base ortonormal e $[T]_{\mathsf{can}}$ é uma matriz simétrica, o Teorema 8.2.3 garante que $\mathbb{R}^2$ tem uma base ortonormal formada por autovetores de T. Vamos encontrar uma. Os autovalores de T são as raízes de seu polinômio característico

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} -2-t & -2 \\ -2 & 1-t \end{bmatrix} = t^2 + t - 6 = (t+3)(t-2).$$

Assim, os autovalores de T são -3 e 2. Determinenos os autoespaços associados. Sabemos que $V(-3) = \operatorname{Ker}\big(T - (-3)\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}\big) = \operatorname{Ker}(T + 3\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2})$. Assim, dado $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos: $v \in V(-3)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A soluções desse sistema são da forma

$$(2y, y) = y(2, 1),$$

com $y \in \mathbb{R}$. Logo, $V(-3) = [(2, 1)]$. Para determinar $V(2)$, procedemos da mesma maneira: $v = (x, y) \in V(2)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujas soluções são

$$\left(-\frac{y}{2}, y\right) = y\left(-\frac{1}{2}, 1\right),$$

com $y \in \mathbb{R}$. Portanto, $V(2) = \left[\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right] = [(-1, 2)]$. Observe que, conforme previsto pelo Lema 8.2.1, os autovetores $(2, 1)$ (associado a -3) e $(-1, 2)$ (associado a 2) são, de fato, ortogonais. Segue, assim, que

$$\{(2, 1), (-1, 2)\}$$

é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T . Normalizando os vetores nessa base, concluímos que

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T.

Sabemos que

$$P^{-1}[T]_{\mathsf{can}}P = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

em que

$$P = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Ao ser realizar o algoritmo de inversão de matrizes (visto na página 23), obteremos

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = P^{\mathrm{t}}.$$

Veremos, adiante, que isso não foi uma coincidência.

Antes de terminar a discussão deste exemplo, vale a pena mencionar que, uma vez encontrado $V(-3) = [(2,1)]$, poderíamos concluir, imediatamente, que $V(2) = [(-1,2)]$. O argumento pode ser feito ao longo das seguintes linhas: sabemos, do Lema 8.2.1 que $V(2) \subseteq V(-3)^{\perp}$. Também sabemos que $\dim\big(V(2)\big) = 1$, pois T é diagonalizável e 2 tem multiplicidade algébrica igual a 1. Analogamente, $\dim\big(V(-3)\big) = 1$. Pelo Teorema 5.4.3, $\dim\big(V(-3)^{\perp}\big) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim\big(V(-3)\big) = 2 - 1 = 1$. Então, $V(2)$ é um subespaço de dimensão 1 do espaço vetorial $V(-3)^{\perp}$, que tem dimensão 1. Logo, $V(2) = V(-3)^{\perp}$. Agora basta descrever $V(-3)^{\perp}$. Dado $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos $v \in V(-3)^{\perp}$ se, e somente se, $v \perp (2,1)$, o que é equivalente a dizer que $v \in V(-3)^{\perp}$ se, e somente se, $2x + y = 0$, donde segue que $v = (x, -2x) = x(1, -2)$. Assim, $V(-3)^{\perp} = [(1,-2)]$ e, como $V(2) = V(-3)^{\perp}$, temos $V(2) = [(1,2)]$. Usaremos argumentos assemelhados em exemplos posteriores. $\Diamond$

Em geral, dado um operador linear simétrico T em um espaço vetorial V de dimensão finita munido de um produto interno, sabemos, pelo Teorema 8.2.3, que T é diagonalizável. Assim, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ é a lista completa de autovalores distintos de T e se, para cada $i = 1, \ldots, k$, $\mathcal{B}_i$ é uma base de $V(\lambda_i)$, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ será uma base de V formada por autovetores de T. Mas essa base não será necessariamente ortogonal. Sabemos que se $u \in \mathcal{B}_i$ e $v \in \mathcal{B}_j$, com $i \neq j$, então u e v são ortogonais, mas dois vetores em um mesmo $\mathcal{B}_i$ podem não ser.

Dito isso, o procedimento que adotaremos, para encontrar uma base ortogonal de V formada por autovetores de T (e, posteriormente, normalizá-la) será, uma vez encontradas as bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ dos autoespaços, submetê-las, uma por vez, ao processo de ortogonalização de Gram-Schmidt de modo a produzir bases ortogonais $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ dos autoespaços e, agora, sim, tomar $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k$ como base ortogonal de V formada por autovetores de T.

Um alerta final: se o processo de Gram-Schmidt for aplicado uma única vez à base $\mathcal{B}$, ele resultará em uma base ortogonal de V, mas que não será formada por autovetores de T, pois, o processo de Gram-Schmidt troca um vetor por uma combinação linear dele e de vetores anteriores, e combinações lineares de autovetores associados a autovalores distintos não são autovetores.

Exemplo 8.2.5. Encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, em relação ao produto interno usual, formada por autovetores do operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução. Como can é ortonormal e $[T]_{\mathsf{can}}$ é simétrica, sabemos que o problema tem solução.

Temos

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & -1 & 1 \\ -1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{bmatrix} = -t^3 + 3t^2 - 4 = -(t-2)^2(t+1).$$

Para encontrar $V(2)$, resolvemos

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e obtemos

$$V(2) = \{(-y+z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = [(-1,1,0),(1,0,1)].$$

Agora, pelo Lema 8.2.1, $V(-1) \subseteq V(2)^\perp$. Além disso, $\dim\big(V(-1)\big) = 1$ e $\dim\big(V(2)^\perp\big) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(V(2)\big) = 3 - 2 = 1$. Logo, $V(-1) = V(2)^\perp$. Dado $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos: $v \in V(2)^\perp$ se, e somente se $v \perp (-1,1,0)$ e $v \perp (1,0,1)$, ou seja, se e somente se,

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Portanto, $V(-1) = V(2)^\perp = \{(x, x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,1,-1)]$.

Procedemos, agora, à ortogonalização das bases de $V(2)$ e $V(-1)$ encontradas.

Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à base

$$\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$$

de $V(2)$, obtemos a base ortogonal

$$\left\{(-1,1,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\right\}$$

de $V(2)$. Então,

$$\{(-1,1,0),(1,1,2)\}$$

também é uma base ortogonal de $V(2)$.

A base $\{(1,1,-1)\}$ de $V(-1)$ não precisa ser ortogonalizada porque contém um único vetor (ela já é ortogonal).

Unindo essas duas bases, obtemos uma base

$$\{(-1,1,0),(1,1,2),(1,1,-1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$, que é ortogonal e é formada por autovetores de T. Dividindo cada vetor nessa base pela sua norma, obtemos a base ortonormal

$$\mathcal{B}=\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\right\}$$

de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Assim,

$$P^{-1}[T]_{\mathsf{can}}P=[T]_{\mathcal{B}}=\operatorname{diag}(2,2,-1),$$

em que

$$P=[\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B},\mathsf{can}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

Finalizamos por observar que $P^{\mathrm{t}}P=I_3$, como o leitor pode facilmente verificar, e, portanto, $P^{-1}=P^{\mathrm{t}}$. $\diamondsuit$

Terminamos esta seção mostrando que não foi uma coincidência o fato de as matrizes mudança de base encontradas nos exemplos acima terem a propriedade de suas inversas coincidirem com suas transpostas.

Proposição 8.2.6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ortonormais ordenadas de V. Se $P=[\mathrm{I}_V]_{\mathcal{BC}}$, então $P^{-1}=P^{\mathrm{t}}$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ e $\mathcal{C}=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. Como $\mathcal{C}$ é ortonormal, pela Proposição 5.2.4, temos

$$\mathrm{I}_V(u_j)=u_j=\left(\langle u_j,v_1\rangle,\langle u_j,v_2\rangle,\dots,\langle u_j,v_n\rangle\right)_{\mathcal{C}},$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Como essas são as entradas da j-ésima coluna de P, segue que $P = (a_{ij})$, em que $a_{ij} = \langle u_j, v_i \rangle$. Agora, sabemos da Proposição 6.7.6, que $P^{-1} = [\mathrm{I}_V]_{\mathcal{CB}}$. Logo, de maneira análoga, obtemos $P^{-1} = (b_{ij})$, em que

$$b_{ij} = \langle v_j, u_i \rangle = \langle u_i, v_j \rangle = a_{ji}.$$

Portanto, $P^{-1} = P^{\mathrm{t}}$. □

Essa proposição explica o ocorrido nos exemplos anteriores. Em ambos, tanto can quanto $\mathcal{B}$ são ortonormais. Logo, as matrizes de mudança de base satisfazem a conclusão da proposição.

Exercícios. Lista 3 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 8–20.

8.3 Aplicação: reconhecimento de quádricas (e cônicas)

Nesta seção, veremos uma aplicação da teoria de diagonalização de operadores simétricos em geometria analítica.

Suponha fixo um sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ em $\mathbb{E}^3$. Lembremos, do Capítulo 3, que isso quer dizer que $O \in \mathbb{E}^3$ é um ponto fixado, chamado origem do sistema de coordenadas, e $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$.

Definição. Uma *superfície quádrica* ou, simplesmente, *quádrica* é o conjunto formado pelos pontos de $\mathbb{E}^3$ cujas coordenadas, em relação a Σ, satisfazem uma equação polinomial de grau 2 em 3 variáveis, isto é, o conjunto dos pontos $X = (x, y, z)_\Sigma \in \mathbb{E}^3$ tais que

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qxz + 2ryz + Ex + Fy + Gz + d = 0, \qquad (8.3)$$

em que $a, b, c, p, q, r, E, F, G, d \in \mathbb{R}$, e pelo menos um dos coeficientes dos termos de grau 2 é não nulo.

Não é nosso objetivo nestas notas fazer um estudo mais aprofundado de superfícies quádricas. Pretendemos, apenas, mostrar como utilizar as idéias da seção anterior para, fazendo uma mudança de coordenadas adequada (quer dizer, escolhendo um novo sistema de coordenadas adequado), trocar a equação de uma dada quádrica por uma em "forma reduzida", isto é, uma equação sem termos de grau 2 mistos em que cada variável aparece em no máximo um termo.

Uma vez colocada a equação de uma quádrica em forma reduzida, a identificação do objeto geométrico formado por seus pontos é rotineira[2].

[2] Recomendamos ao leitor consultar, por exemplo, `https://en.wikipedia.org/wiki/Quadric` para ver ilustrações das possíveis formas que uma quádrica pode tomar.

A tarefa de encontrar um novo sistema de coordenadas em relação ao qual as coordenadas de uma dada quádrica satisfazem uma equação em forma reduzida será efetuada em dois passos.

O primeiro passo consistirá na eliminação dos termos mistos (xy, xz e yz) da equação. Geometricamente, esse passo pode ser realizado por meio de uma rotação no espaço $\mathbb{E}^3$ em torno de uma reta. Trataremos apenas da parte algébrica desse procedimento.

O segundo passo da redução será eliminar os termos de grau 1 que contêm variáveis que também aparecem ao quadrado. Em termos geométricos, o que se fará será uma translação. Mais uma vez, somente o argumento puramente algébrico será apresentado.

Eliminação dos termos mistos. Seja $\mathcal{Q}$ uma quádrica formada pelos pontos $X = (x, y, z)_\Sigma$ tais que a equação (8.3) esteja satisfeita. Considere a matriz simétrica A definida a partir dos coeficientes da parte quadrática de (8.3):

$$A = \begin{bmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{bmatrix}.$$

É rotineiro verificar que, identificando uma matriz 1×1 com sua única entrada, temos

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qxz + 2ryz,$$

que é, precisamente, a parte de grau 2 da equação (8.3).

Considere, agora, o operador linear $T\colon \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ que satisfaz $[T]_\mathcal{B} = A$. Como, por hipótese, $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$ e $[T]_\mathcal{B}$ é uma matriz simétrica, segue, do Teorema 8.2.3, que existe uma base ortonormal $\mathcal{C}$ de $\mathbb{V}^3$ formada por autovetores de T; em outras palavras, $\mathcal{C}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$ tal que

$$[T]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

em que α, β, γ são os autovalores de T (repetidos de acordo com sua multiplicidade).

Ainda, do Corolário 6.7.4, sabemos que $[T]_\mathcal{C} = P^{-1}AP$, em que $P = [\mathrm{I}_{\mathbb{V}^3}]_{\mathcal{CB}}$. Finalmente, porque tanto $\mathcal{B}$ quando $\mathcal{C}$ são bases ortonormais, segue, pela Proposição 8.2.6, que $P^{-1} = P^{\mathrm{t}}$. Logo,

$$P^{\mathrm{t}}AP = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}. \tag{8.4}$$

Considere o novo sistema ortogonal de coordenadas $\Gamma = (O, \mathcal{C})$ em $\mathbb{E}^3$ (que tem a mesma origem O que Σ).

Recordemos que se $X \in \mathbb{E}^3$ é tal que $X = (x,y,z)_\Sigma$ e $X = (x_1,y_1,z_1)_\Gamma$, então $\overrightarrow{OX} = (x,y,z)_\mathcal{B}$ e $\overrightarrow{OX} = (x_1,y_1,z_1)_\mathcal{C}$. A relação entre as coordenadas de X no sistema Σ com as coordenadas de X no sistema Γ fica, assim, elucidada pelo Teorema 2.6.1: $[\overrightarrow{OX}]_\mathcal{B} = M_{\mathcal{CB}}[\overrightarrow{OX}]_\mathcal{C}$, em que $M_{\mathcal{CB}} = [\mathrm{I}_{\mathbb{V}^3}]_{\mathcal{CB}} = P$, conforme observado na página 223, ou seja, vale

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}. \tag{8.5}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qxz + 2ryz &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
&= \left(P \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right)^{\mathrm{t}} AP \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{(por (8.5))} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} P^{\mathrm{t}}AP \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{(por (8.4))} \\
&= \alpha x_1^2 + \beta y_1^2 + \gamma z_1^2,
\end{aligned}$$

que não tem termos mistos.

Assim, a quádrica $\mathcal{Q}$ pode ser descrita como o conjunto dos pontos de $\mathbb{E}^3$ cujas coordenadas, *em relação ao sistema* Γ, satisfazem uma equação quadrática sem termos mistos.[3]

[3]A matriz de mudança de base $P = [\mathrm{I}_{\mathbb{V}^3}]_{\mathcal{CB}}$ satisfaz $P^{\mathrm{t}}P = I_3$; é o que se chama de uma matriz *ortogonal*. Aplicando o determinante a essa igualdade, obtém-se $\det(P) = \pm 1$. No caso em que $\det(P) = 1$, é possível mostrar que a base ortonormal $\mathcal{C}$ de $\mathbb{V}^3$ é obtida a partir da base ortonormal $\mathcal{B}$ por meio de uma rotação ao redor de um eixo determinado por um autovetor de P. Ou seja, a mudança de coordenadas determinada por P corresponde a submeter a quádrica a uma rotação em torno de um eixo que passa pela origem O do sistema de coordenadas Σ. Essa rotação resulta em um reposicionamento da quádrica de modo que

Eliminação de termos de grau 1. Vimos que uma vez realizada a "mudança de variáveis" determinada por (8.5), obteremos uma equação para a quádrica $\mathcal{Q}$, nas novas variáveis x_1, y_1, z_1, em que não aparecem termos mistos. É claro que essa mudança de variáveis afetará, também, os termos de grau 1 na equação da quádrica.

Uma nova mudança de coordenadas será realizada para dar conta dos novos termos de grau 1. Se a equação da quádrica em relação ao novo sistema Γ é da forma

$$\alpha x_1^2 + \beta y_1^2 + \gamma z_1^2 + J x_1 + K y_1 + L z_1 + d = 0,$$

procederemos por "completamento de quadrados". Por exemplo, olhando para a variável x_1, se $\alpha \neq 0$, podemos escrever

$$\alpha x_1^2 + J x_1 = \alpha \left(x_1^2 + \frac{J}{\alpha} x_1 \right) = \alpha \left(x_1 + \frac{J}{2\alpha} \right)^2 - \frac{J^2}{4\alpha}.$$

E, assim por diante, com todos os termos em que o quadrado da variável tem coeficiente não nulo. Se fizermos $x_2 = x_1 + \frac{J}{2\alpha}$, a equação ficará na forma

$$\alpha x_2^2 + \beta y_1^2 + \gamma z_1^2 + K y_1 + L z_1 + d' = 0,$$

em que $d' = d - \frac{J^2}{4\alpha}$.

O que se deve notar aqui é que não há termos de grau 1 em x_2. Assim, a intenção é substituir as variáveis x_1, y_1, z_1 por novas variáveis x_2, y_2, z_2 por meio de equações da forma $x_2 = x_1 - k, y_2 = y_1 - m, z_2 = z_1 - n$. (Por exemplo, na substituição que descrevemos acima, tomamos $k = -\frac{J}{2\alpha}$. É claro que se, para alguma das variáveis não for necessária a substituição — o que ocorre se essa variável já aparece uma única vez, em grau 1, ou 2 —, basta tomar esse termo que está sendo subtraído como sendo igual a 0).

Formalmente o que se faz é o seguinte. Uma vez feitas as escolhas de k, m, n (que permitem os completamentos de quadrados), considera-se o novo sistema ortogonal de coordenadas $\Lambda = (O', \mathcal{C})$ em $\mathbb{E}^3$, que tem a mesma base $\mathcal{C}$ de Γ, mas que tem nova origem dada pelo ponto $O' = (k, m, n)_\Gamma$ (veja que isso é equivalente a dizer que $\overrightarrow{OO'} = (k, m, n)_\mathcal{C}$).

Assim, dado $X = (x_1, y_1, z_1)_\Gamma \in \mathbb{E}^3$, se $X = (x_2, y_2, z_2)_\Lambda$, então

$$\begin{aligned} (x_2, y_2, z_2)_\mathcal{C} &= \overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX} = -\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OX} \\ &= -(k, m, n)_\mathcal{C} + (x_1, y_1, z_1)_\mathcal{C} \\ &= (x_1 - k, y_1 - m, z_1 - n)_\mathcal{C}, \end{aligned}$$

---

seus eixos fiquem paralelos aos eixos coordenados. No caso em que $\det(P) = -1$, pode-se trocar um dos vetores em $\mathcal{C}$ por seu oposto, dando origem a uma mudança de coordenadas que realize uma rotação em $\mathbb{E}^3$. Sugere-se ao leitor interessado nos detalhes consultar M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Springer, New York, 1988 (Chapter 9).

o que implica $x_2 = x_1 - k, y_2 = y_1 - m, z_2 = z_1 - n$, como queríamos.[4]

Conclui-se, finalmente, que a quádrica $\mathcal{Q}$ é formada pelos pontos cujas coordenadas em relação ao sistema de coordenadas Λ satisfazem uma equação na forma reduzida.

Veremos este procedimento ilustrado em alguns exemplos.

Exemplo 8.3.1. Considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ em $\mathbb{E}^3$. Encontre uma equação na forma reduzida para a quádrica de equação

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2x - 6y + 12z - 42 = 0.$$

Solução. Começamos por construir a matriz simétrica definida a partir dos coeficientes da parte quadrática da equação da quádrica:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Seu polinômio característico é

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det \begin{bmatrix} 3-t & 1 & 0 \\ 1 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 3-t \end{bmatrix} &= (3-t)\det \begin{bmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{bmatrix} \\ &= (3-t)\big((3-t)^2 - 1\big) = -(t-3)(t^2 - 6t + 8) \\ &= -(t-3)(t-2)(t-4). \end{aligned}$$

Procuremos bases para os autoespaços de A. Dado $v = (x, y, z)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{V}^3$, temos: $v \in V(3)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o que implica $x = y = 0$. Segue que $V(3) = [(0,0,1)_{\mathcal{B}}]$. Vejamos $V(2)$: $v \in V(2)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

[4] A mudança de coordenadas realizada corresponde a submeter a quádrica a uma translação, definida pelo vetor $(k, m, n)_{\mathcal{C}}$, que a posicione de modo que seu centro coincida com o centro O' do novo sistema de coordenadas.

o que equivale a dizer que $x = -y$ e $z = 0$. Logo, $V(2) = [(-1,1,0)_{\mathcal{B}}]$. Finalmente, $v \in V(4)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $V(4) = [(1,1,0)_{\mathcal{B}}]$.

Logo, $\{(0,0,1)_{\mathcal{B}}, (-1,1,0)_{\mathcal{B}}, (1,1,0)_{\mathcal{B}}\}$ é uma base de $\mathbb{V}^3$ formada por autovetores de A, que já é ortogonal (pois os autovetores são, cada um, associados a autovalores distintos). Normalizando essa base, obtemos uma base $\mathcal{C} = \left\{(0,0,1)_{\mathcal{B}}, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)_{\mathcal{B}}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)_{\mathcal{B}}\right\}$ ortonormal de $\mathbb{V}^3$ formada por autovetores de A. Logo, fazendo a mudança de coordenadas dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

obtemos uma equação da quádrica, em relação ao sistema $\Gamma = (O, \mathcal{C})$ da forma

$$3x_1^2 + 2y_1^2 + 4z_1^2 + 2\left(-\frac{y_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_1}{\sqrt{2}}\right) - 6\left(\frac{y_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_1}{\sqrt{2}}\right) + 12x_1 - 42 = 0,$$

ou, ainda,

$$3x_1^2 + 12x_1 + 2y_1^2 - \frac{8y_1}{\sqrt{2}} + 4z_1^2 - \frac{4z_1}{\sqrt{2}} - 42 = 0,$$

que podemos escrever na forma

$$3(x_1^2 + 4x_1) + 2\left(y_1^2 - \frac{4y_1}{\sqrt{2}}\right) + 4\left(z_1^2 - \frac{z_1}{\sqrt{2}}\right) = 42.$$

Completando quadrados, obtemos

$$\begin{aligned} 3(x_1+2)^2 + 2\left(y_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 &+ 4\left(z_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= 42 + 3(2)^2 + 2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{137}{2}. \end{aligned}$$

Assim, em relação ao sistema de coordenadas $\Lambda = (O', \mathcal{C})$, em que $O' = \left(-2, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)_{\Gamma}$, a equação da quádrica tem a forma reduzida

$$3x_2^2 + 2y_2^2 + 4z_2^2 = \frac{137}{2}.$$

o que permite identificá-la como um elipsóide. ◊

Exemplo 8.3.2. (Prova 3, Álgebra Linear II, 2006, adaptado) Sabendo que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad M = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

satisfazem

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

pode-se deduzir que uma equação reduzida para a quádrica de equação

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 8\sqrt{6}z - 26 = 0$$

é

(A) $-4u^2 - 4v^2 + 2t^2 = 1$

(B) $4u^2 + 4v^2 - 2t^2 = 26$

(C) $-2u^2 - 2v^2 + t^2 = 1$

(D) $4u^2 + 4v^2 - 2t^2 = 1$

(E) $2u^2 + 2v^2 - t^2 = 1$

Solução. Vamos admitir que está fixado um sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ em $\mathbb{E}^3$ e que a quádrica é formada pelos pontos de $\mathbb{E}^3$ cujas coordenadas, em relação a Σ, satisfazem a equação dada. Vamos trabalhar com vetores de $\mathbb{V}^3$ dados em coordenadas em relação a $\mathcal{B}$.

A matriz A é simétrica, e a relação que existe entre ela e M diz que 4 é um autovalor de A, com $V(4) = [(-1,1,0), (-2,0,1)]$ e -2 é um autovalor de A, com $V(-2) = [(1,1,2)]$. (Observe que, conforme esperado, $V(-2) \subseteq V(4)^{\perp}$.)

Aplicando o processo de Gram-Schmidt para ortogonalizar a base

$$\{(-1,1,0), (-2,0,1)\}$$

de $V(4)$, obtemos a base ortogonal

$$\{(-1,1,0), (-1,-1,1)\}$$

de $V(4)$. Assim,

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$ formada por autovetores de A (os dois primeiros associados a 4 e o último, a -2). Segue que, se

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

então,

$$P^{\mathrm{t}}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Logo, fazendo $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$, obtemos a seguinte equação para a quádrica (em relação ao sistema de coordenadas $\Gamma = (O, \mathcal{C})$):

$$4p^2 + 4q^2 - 2r^2 - 8\sqrt{6}\left(\frac{p}{\sqrt{3}} + \frac{2r}{\sqrt{6}}\right) - 26 = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$4(p^2 - 2\sqrt{2}p) + 4q^2 - 2(r^2 + 8r) = 26.$$

Completando quadrados,

$$4(p - \sqrt{2})^2 + 4q^2 - 2(r+4)^2 = 26 + 4(\sqrt{2}^2) - 2(4^2) = 2.$$

Finalmente, fazendo $u = p - \sqrt{2}, v = q, t = r + 4$, obtemos a seguinte equação para a quádrica (agora, em relação ao sistema de coordenadas $\Lambda = (O', \mathcal{C})$, em que $O' = (\sqrt{2}, 0, -4)_\Gamma$):

$$4u^2 + 4v^2 - 2t^2 = 2,$$

que é equivalente a

$$2u^2 + 2v^2 - t^2 = 1.$$

Resposta: (E). ♢

Cônicas. Nesta parte das notas, vamos assumir conhecido o espaço $\mathbb{E}^2$ formado por todos os pontos em um plano. De maneira análoga ao que fizemos na Seção 2.1, pode-se definir o espaço vetorial $\mathbb{V}^2$ dos vetores bidimensionais. O leitor deve se convencer de que é possível reproduzir toda a teoria a respeito de $\mathbb{V}^3$ e $\mathbb{E}^3$ em duas dimensões (exceto pelo produto vetorial, que não existe em $\mathbb{V}^2$, mas o qual não será necessário no que se segue).

Uma *curva cônica*, ou simplesmente *cônica*, no espaço $\mathbb{E}^2$, é o conjunto formado por todos os pontos $X \in \mathbb{E}^2$ cujas coordenadas, em relação a uma sistema ortogonal de coordenadas de $\mathbb{E}^2$, satisfazem uma equação da forma

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e a, b, c não os três simultaneamente nulos.

A equação de uma cônica está na forma reduzida se não tiver termo misto de grau 2 e cada variável aparecer no máximo uma vez.

As ideias aplicadas no processo de redução da equação de uma quádrica podem ser imitadas neste contexto. Vejamos como se faz essa adaptação em um exemplo.

Exemplo 8.3.3. Encontre uma equação reduzida para a cônica de equação $9x^2 + 6y^2 - 4xy - 12x - 4y - 8 = 0$.

Solução. Está subentendido um sistema ortogonal de coordenadas em $\mathbb{E}^2$ em relação ao qual são dadas as coordenadas de pontos.

A matriz $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ é simétrica, tem polinômio característico

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} 9-t & -2 \\ -2 & 6-t \end{bmatrix} = (t-5)(t-10)$$

e autovalores 5 e 10.

Dado um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{V}^2$, temos $v \in V(5)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde segue que $V(5) = [(1,2)]$. Analogamente, $v \in V(10)$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $V(10) = [(-2,1)]$. Assim, $\mathcal{C} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{V}^2$ formada por autovetores de A, e, consequentemente,

$$P^{\mathrm{t}}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix},$$

em que $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

Realizando a mudança de coordenadas dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

a equação da cônica pode ser colocada na forma

$$5x_1^2 + 10y_1^2 - 12\left(\frac{x_1}{\sqrt{5}} - \frac{2y_1}{\sqrt{5}}\right) - 4\left(\frac{2x_1}{\sqrt{5}} + \frac{y_1}{\sqrt{5}}\right) - 8 = 0,$$

ou, ainda, já completando quadrados,

$$5\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 10\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 8 + 4 + 2 = 14.$$

Finalmente, a substituição $x_2 = x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$ fornece

$$5x_2^2 + 10y_2^2 = 14,$$

que, na forma

$$\frac{x_2^2}{14/5} + \frac{y_2^2}{14/10} = 1,$$

é facilmente identificável como a equação de uma elipse. $\lozenge$

Exercícios. Lista 3 - Álgebra Linear II (2020): Exs. 21–26.

9

Espaços vetoriais complexos

Neste capítulo, trataremos de espaços vetoriais em que os escalares, que até agora se restringiam ao conjunto dos números reais, serão números complexos. Veremos que nesse contexto o estudo de diagonalização de operadores, especialmente daqueles cuja matriz é real, ganha novos contornos.

O conjunto dos números complexos será denotado por $\mathbb{C}$. Na Seção D.2 do Apêndice D encontra-se uma breve recordação da definição de $\mathbb{C}$ e de algumas de suas propriedades.

9.1 Autovalores complexos

Por um *espaço vetorial complexo* entenderemos um conjunto V dotado de duas operações

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda v, \end{array}$$

que satisfazem as condições (1)–(8) na definição de espaço vetorial da página 103, em que se substitui cada ocorrência de $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$.

A teoria de espaços vetoriais, desenvolvida nos Capítulos 4 e 6, pode ser, toda ela, reproduzida no contexto de espaços vetoriais complexos.[1]

Vejamos, aqui, como se comporta a teoria de diagonalização (que, no Capítulo 7, fazia uso de fatos relacionados a existência ou não de raízes de polinômios) no contexto de espaços vetoriais complexos.

[1] O leitor deve tentar se convencer da validade dessa afirmação. A razão essencial para que se possa fazer essa generalização reside no fato de ser possível fazer a discussão a respeito de resolução de sistemas lineares, efetuada no Capítulo 1, para equações com coeficientes complexos.

Uma questão de nomenclatura se coloca: espaços vetoriais complexos também serão chamado de $\mathbb{C}$-*espaços;* espaços vetoriais "usuais", isto é, aqueles cujos escalares são números reais, serão chamados (apenas neste capítulo) de *espaços vetoriais reais* ou $\mathbb{R}$-*espaços*.

Como conjuntos, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, e essa inclusão resulta em uma inclusão $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$. Em particular, todo elemento de $\mathbb{R}^n$ é um vetor do $\mathbb{C}$-espaço $\mathbb{C}^n$. Por exemplo, a base canônica $\mathsf{can} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ do $\mathbb{R}$-espaço $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto de $\mathbb{C}^n$. Além disso, como é fácil de verificar, can gera $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espaço e é LI. Assim, can é uma base do $\mathbb{C}$-espaço $\mathbb{C}^n$, que será referida como a base canônica de $\mathbb{C}^n$.

A definição de autovalor de um operador complexo é a mesma que já tínhamos no caso real: se V é um $\mathbb{C}$-espaço e $T\colon V \to V$ é um operador linear, dizemos que um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T se existir um vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$. Neste caso, v é dito ser um autovetor de T associado ao autovalor λ.

Se V tem dimensão finita igual a n e $\mathcal{B}$ é uma base de V, então

$$p_T(t) = \det\big([T]_{\mathcal{B}} - tI_n\big)$$

é o polinômio característico de T.

Observe que, agora, os coeficientes de p_T são números complexos, uma vez que as entradas da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ são números complexos.

Continua válido o fato de $\lambda \in \mathbb{C}$ ser autovalor de T se, e somente se, $p_T(\lambda) = 0$.

O Teorema 7.4.3 toma, agora, a seguinte forma.

Teorema 9.1.1. *Seja T um operador linear em um $\mathbb{C}$-espaço V de dimensão finita. Então, existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, distintos, e inteiros positivos $n_1, n_2, \dots, n_k$ tais que*

$$p_T(t) = (\alpha_1 - t)^{n_1}(\alpha_2 - t)^{n_2} \dots (\alpha_k - t)^{n_k}.$$

Além disso, T é diagonalizável se, e somente se, $n_i = \dim\big(\mathrm{Ker}(T - \alpha_i \mathrm{I}_V)\big)$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Em outras palavras, a possível obstrução que havia no caso real, de um operador linear eventualmente possuir autovalores que não pertencem ao conjunto em que estão os escalares, deixa de existir no caso complexo. Isso é uma consequência do Teorema Fundamental da Álgebra, que garante que qualquer polinômio com coeficientes complexos se fatora como um produto de fatores lineares (ver o Teorema D.2.3 no Apêndice D e seu corolário).

Assim, no caso complexo, o único eventual obstáculo para um operador linear não ser diagonalizável reside na possibilidade de haver um autovalor para o qual multiplicidades algébricas e geométricas diferem.

Exemplo 9.1.2. Verifique se o operador $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por

$$T(z_1, z_2) = \big(\,(3 + \boldsymbol{i})z_1 + (-1 + \boldsymbol{i})z_2,\ (1 + \boldsymbol{i})z_1 + (1 + \boldsymbol{i})z_2\,\big),$$

para todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, é diagonalizável.

Solução. Seja $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^2$. Então,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3+\boldsymbol{i} & -1+\boldsymbol{i} \\ 1+\boldsymbol{i} & 1+\boldsymbol{i} \end{bmatrix}.$$

Logo, o polinômio característico de T é

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det \begin{bmatrix} 3+\boldsymbol{i}-t & -1+\boldsymbol{i} \\ 1+\boldsymbol{i} & 1+\boldsymbol{i}-t \end{bmatrix} = t^2 - (4+2\boldsymbol{i})t + 4 + 4\boldsymbol{i} \\ &= \big(t-(2+2\boldsymbol{i})\big)(t-2). \end{aligned}$$

Assim, T tem dois autovalores distintos, $2+2\boldsymbol{i}$ e 2, e, portanto, é diagonalizável.

Iremos um pouco além e determinaremos os autoespaços associados, exatamente como fazíamos para operadores reais.

Sabemos que o autoespaço $V(2+2\boldsymbol{i})$ coincide com o núcleo do operador $T-(2+2\boldsymbol{i})\,\mathrm{I}_{\mathbb{C}^2}$ de $\mathbb{C}^2$. Assim, dado $w \in \mathbb{C}^2$, segue que $w \in V(2+2\boldsymbol{i})$ se, e somente se,

$$\big(T-(2+2\boldsymbol{i})\,\mathrm{I}_{\mathbb{C}^2}\big)(w) = 0_{\mathbb{C}^2}. \tag{9.1}$$

Em termos de coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$ (e usando o Teorema 6.5.6), a condição (9.1) lê-se

$$[T-(2+2\boldsymbol{i})\,\mathrm{I}_{\mathbb{C}^2}]_{\mathcal{B}}[w]_{\mathcal{B}} = [0_{\mathbb{C}^2}].$$

Como, pela Proposição 6.6.1,

$$\begin{aligned} [T-(2+2\boldsymbol{i})\,\mathrm{I}_{\mathbb{C}^2}]_{\mathcal{B}} &= [T]_{\mathcal{B}} - (2+2\boldsymbol{i})[\mathrm{I}_{\mathbb{C}^2}]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 3+\boldsymbol{i} & -1+\boldsymbol{i} \\ 1+\boldsymbol{i} & 1+\boldsymbol{i} \end{bmatrix} - (2+2\boldsymbol{i}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3+\boldsymbol{i}-(2+2\boldsymbol{i}) & -1+\boldsymbol{i} \\ 1+\boldsymbol{i} & 1+i-(2+2\boldsymbol{i}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-\boldsymbol{i} & -1+\boldsymbol{i} \\ 1+\boldsymbol{i} & -1-\boldsymbol{i} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

segue que $w = (z_1, z_2) \in V(2+2\boldsymbol{i})$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 1-\boldsymbol{i} & -1+\boldsymbol{i} \\ 1+\boldsymbol{i} & -1-\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9.2}$$

Note que a segunda linha da matriz de coeficientes do sistema (9.2) é igual à primeira multiplicada por $\frac{1+\boldsymbol{i}}{1-\boldsymbol{i}}$. Isso quer dizer que o processo de escalonamento aplicado à matriz de coeficientes do sistema (9.2) resulta na matriz

$$\begin{bmatrix} 1-\boldsymbol{i} & -1+\boldsymbol{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, (z_1, z_2) é solução de (9.2) se, e somente se,

$$(1 - \boldsymbol{i})z_1 + (-1 + \boldsymbol{i})z_2 = 0,$$

ou, equivalentemente, se, e somente se, vale

$$(1 - \boldsymbol{i})z_1 = (1 - \boldsymbol{i})z_2.$$

Segue que $z_1 = z_2$ e, portanto,

$$V(2 + 2\boldsymbol{i}) = \{(z_2, z_2) \mid z_2 \in \mathbb{C}\} = [(1, 1)].$$

Para descrever o autoespaço associado ao autovalor 2, argumentamos de modo análogo para obter que

$$w = (z_1, z_2) \in V(2) = \operatorname{Ker}(T - 2\,\mathrm{I}_{\mathbb{C}^2})$$

se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 1 + \boldsymbol{i} & -1 + \boldsymbol{i} \\ 1 + \boldsymbol{i} & -1 + \boldsymbol{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(A matriz de coeficientes desse sistema foi obtida pela subtração do o autovalor 2 da diagonal principal da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$.) Logo, $w \in V(2)$ se, e somente se,

$$(1 + \boldsymbol{i})z_1 + (-1 + \boldsymbol{i})z_2 = 0.$$

Multiplicando a equação por $1 - \boldsymbol{i}$, que é o pelo conjugado de $1 + \boldsymbol{i}$, obtemos

$$2z_1 + (1 - \boldsymbol{i})(-1 + \boldsymbol{i})z_2 = 0,$$

que, por sua vez, é equivalente a $z_1 = -\boldsymbol{i}z_2$. Logo, $w \in V(2)$ se, e somente se,

$$w = (-\boldsymbol{i}z_2, z_2) = z_2(-\boldsymbol{i}, 1),$$

com $z_2 \in \mathbb{C}$. Concluímos que

$$V(2) = [(-\boldsymbol{i}, 1)].$$

Finalmente, o conjunto $\mathcal{C} = \{(1, 1), (-\boldsymbol{i}, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$ formada por autovetores de T, o primeiro associado a $2 + 2\boldsymbol{i}$ e o segundo, a 2. Portanto,

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 + 2\boldsymbol{i} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ainda, fazendo

$$P = [\mathrm{I}_{\mathbb{C}^2}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

obtemos

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 3 + \boldsymbol{i} & -1 + \boldsymbol{i} \\ 1 + \boldsymbol{i} & 1 + \boldsymbol{i} \end{bmatrix} P = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 + 2\boldsymbol{i} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

uma matriz diagonal. ◊

Restringiremos nosso estudo sobre autovalores complexos e seus autovetores a operadores lineares do $\mathbb{C}$-espaço $\mathbb{C}^n$.

Autovalores e autovetores de um operador de $\mathbb{C}^n$ têm um comportamento especial, que podemos denominar "dual", como veremos a seguir.

Precisaremos introduzir um pouco de notação.

Se $f(t)$ é um polinômio com coeficientes complexos, digamos,

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n,$$

com $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, denotaremos

$$\overline{f}(t) = \overline{\alpha_0} + \overline{\alpha_1} t + \cdots + \overline{\alpha_n} t^n,$$

que é um polinômio com coeficientes complexos de mesmo grau que $f(t)$.

Dado um vetor

$$v = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

com $z_1, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, definiremos o conjugado de v como sendo o vetor de $\mathbb{C}^n$ dado por

$$\overline{v} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_n}).$$

Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, digamos, $A = (\alpha_{ij})$, em que $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, para todos $i, j = 1, \dots, n$, definimos a conjugada de A como sendo a matriz de $M_n(\mathbb{C})$ dada por $\overline{A} = \left(\overline{\alpha_{ij}}\right)$.

Se T é um operador linear no $\mathbb{C}$-espaço $\mathbb{C}^n$, definimos o conjugado de T como sendo o operador $\overline{T}$ do $\mathbb{C}$-espaço $\mathbb{C}^n$ dado por

$$\overline{T}(v) = \overline{T\left(\overline{v}\right)},$$

para todo $v \in \mathbb{C}^n$. Observe que, em termos matriciais, essa condição é equivalente a

$$\left[\overline{T}\right]_{\mathsf{can}} = \overline{[T]_{\mathsf{can}}}.$$

Exemplo 9.1.3. Descreva o conjugado $\overline{T}$ do operador linear $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, definido por

$$T(z_1, z_2) = \big((2+2\boldsymbol{i})z_1 - z_2, \boldsymbol{i}z_1 + (5-3\boldsymbol{i})z_2\big),$$

para todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

Solução. Pela definição dada acima do enunciado do exemplo, para todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, temos

$$\begin{aligned} \overline{T}(z_1, z_2) = \overline{T\left(\overline{z_1}, \overline{z_2}\right)} &= \overline{\big((2+2\boldsymbol{i})\overline{z_1} - \overline{z_2}, \boldsymbol{i}\overline{z_1} + (5-3\boldsymbol{i})\overline{z_2}\big)} \\ &= \big((2-2\boldsymbol{i})z_1 - z_2, -\boldsymbol{i}z_1 + (5+3\boldsymbol{i})z_2\big). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Poderíamos, alternativamente, ter argumentado em termos de matrizes. Como $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 2+2\boldsymbol{i} & -1 \\ \boldsymbol{i} & 5-3\boldsymbol{i} \end{bmatrix}$, segue

$$\left[\overline{T}\right]_{\mathsf{can}} = \overline{[T]_{\mathsf{can}}} = \begin{bmatrix} 2-2\boldsymbol{i} & -1 \\ -\boldsymbol{i} & 5+3\boldsymbol{i} \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\left[\overline{T}(z_1, z_2)\right]_{\mathsf{can}} = \left[\overline{T}\right]_{\mathsf{can}} [(z_1, z_2)]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 2-2\boldsymbol{i} & -1 \\ -\boldsymbol{i} & 5+3\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

que origina a expressão em (9.3) para a imagem por $\overline{T}$ de (z_1, z_2). ◊

Enunciaremos e demonstraremos dois lemas que tornam preciso o comentário anterior a respeito do caráter "dual" de autovalores e autovetores em espaços complexos. Esses lemas serão aplicados, na próxima seção, para descrever o comportamento de autovalores e autovetores complexos de matrizes reais.

Lema 9.1.4. *Seja T um operador linear no $\mathbb{C}$-espaço $\mathbb{C}^n$ e seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Se λ é um autovalor de T de multiplicidade algébrica igual a k, então $\overline{\lambda}$ é um autovalor de $\overline{T}$ de multiplicidade algébrica igual a k.*

Demonstração. Seja $A = [T]_{\mathsf{can}}$. Então, o polinômio característico de T é dado por

$$p_T(t) = \det(A - tI_n).$$

Como $\left[\overline{T}\right]_{\mathsf{can}} = \overline{A}$, segue que o polinômio característico de $\overline{T}$ é

$$p_{\overline{T}}(t) = \det\left(\overline{A} - tI_n\right) = \overline{p_T}(t).$$

Agora, como λ é um autovalor de T de multiplicidade algébrica igual a k, segue que existe um polinômio q com coeficientes complexos tal que

$$p_T(t) = (\lambda - t)^k q(t) \quad \text{e} \quad q(\lambda) \neq 0.$$

Conjugando, obtemos

$$\left(\overline{\lambda} - t\right)^k \overline{q}(t) = \overline{p_T}(t) = p_{\overline{T}}(t),$$

donde se obtém que $\overline{\lambda}$ é uma raíz de $p_{\overline{T}}$ de multiplicidade pelo menos igual a k. Se houvesse mais um fator $\overline{\lambda} - t$ em $p_{\overline{T}}(t)$, $\overline{\lambda}$ seria raiz de $\overline{q}$, isto é, teríamos $0 = \overline{q}\left(\overline{\lambda}\right) = \overline{q(\lambda)}$, o que implicaria $q(\lambda) = 0$, que sabemos não valer. Logo, $\overline{q}\left(\overline{\lambda}\right) \neq 0$ e a multiplicidade de algébrica de $\overline{\lambda}$ como autovalor de $\overline{T}$ também é k. □

Lema 9.1.5. *Seja T um operador linear no $\mathbb{C}$-espaço $\mathbb{C}^n$, seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e seja $v \in \mathbb{C}^n$. Se $v \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n})$, então $\overline{v} \in \operatorname{Ker}\left(\overline{T} - \overline{\lambda} \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n}\right)$.*

Além disso, se $\{v_1, \dots, v_r\}$ é uma base de $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n})$, então $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_r}\}$ é uma base de $\operatorname{Ker}\left(\overline{T} - \overline{\lambda} \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n}\right)$.

Demonstração. Se $v \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n})$, então $T(v) = \lambda v$, o que, por sua vez, conjugando, implica $\overline{T(v)} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\overline{v}$. Mas, $\overline{T(v)} = \overline{T}(\overline{v})$. Portanto, $\overline{v} \in \operatorname{Ker}\left(\overline{T} - \overline{\lambda} \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n}\right)$.

Suponha, agora, que $\{v_1, \dots, v_r\}$ seja uma base de $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n})$. Como consequência do que acabamos de ver, obtemos a inclusão

$$[\overline{v_1}, \dots, \overline{v_r}] \subseteq \operatorname{Ker}\left(\overline{T} - \overline{\lambda} \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n}\right).$$

Por outro lado, se $u \in \operatorname{Ker}\left(\overline{T} - \overline{\lambda} \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n}\right)$, então, novamente,

$$\overline{u} \in \operatorname{Ker}\left(\overline{\overline{T}} - \overline{\overline{\lambda}} \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n}\right) = \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n}) = [v_1, \dots, v_r],$$

o que implica que $u = \overline{\overline{u}} \in [\overline{v_1}, \dots, \overline{v_r}]$, provando que vale a inclusão

$$\operatorname{Ker}\left(\overline{T} - \overline{\lambda} \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n}\right) \subseteq [\overline{v_1}, \dots, \overline{v_r}].$$

Logo, $\operatorname{Ker}\left(\overline{T} - \overline{\lambda} \operatorname{I}_{\mathbb{C}^n}\right) = [\overline{v_1}, \dots, \overline{v_r}]$. Que $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_r}\}$ é LI segue do fato de $\{v_1, \dots, v_r\}$ ser LI. □

O terreno está preparado para o estudo de complexificados de operadores reais.

9.2 O complexificado de um operador real

Nesta seção, concentraremo-nos no estudo de autovalores complexos e diagonalização sobre $\mathbb{C}$ de matrizes cujas entradas são todas números reais.

Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear real com $[T]_{\mathsf{can}} = A \in M_n(\mathbb{R})$. Define-se o *operador complexificado* de T como sendo o operador linear complexo $T^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que $\left[T^{\mathbb{C}}\right]_{\mathsf{can}} = A$.

Fica claro, da definição, que $p_{T^{\mathbb{C}}}(t) = p_T(t)$ e, portanto, é um polinômio cujos coeficientes são todos números reais.

Exemplo 9.2.1. O operador linear T do $\mathbb{R}$-espaço $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável, uma vez que seu polinômio característico

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{bmatrix} = t^2 - 2t + 2$$

não tem raízes reais. No entanto, seu complexificado $T^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ é diagonalizável, já que $p_{T^{\mathbb{C}}}(t) = p_T(t) = \big(t - (1+\boldsymbol{i})\big)\big(t - (1-\boldsymbol{i})\big)$ tem duas raízes distintas. $\Diamond$

Usaremos uma linguagem mais explícita, em termos de matrizes, para nos referir à situação que encontramos acima.

Definição. Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, diremos que A é *diagonalizável sobre* $\mathbb{R}$ se existirem matrizes $P, D \in M_n(\mathbb{R})$, com P inversível e D diagonal, tais que $P^{-1}AP = D$ (ou seja, se A for diagonalizável no sentido usual, que encontramos na página 228). Diremos que A é *diagonalizável sobre* $\mathbb{C}$ se existirem matrizes $Q, E \in M_n(\mathbb{C})$, com Q inversível e E diagonal, tais que $Q^{-1}AQ = E$.

É claro que se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, ela o será sobre $\mathbb{C}$ (as matrizes que realizam a diagonalização são, também, matrizes com entradas complexas, já que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$). Mas, há matrizes com entradas reais que são diagonalizáveis sobre $\mathbb{C}$ e não o são sobre $\mathbb{R}$. Esse é o caso da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, como vimos no exemplo acima.

Em termos de operadores, essa observação pode ser colocada nos seguintes termos. Se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador real diagonalizável, então seu complexificado $T^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ também o é. No entanto, há operadores T de $\mathbb{R}^n$ que não são diagonalizáveis, mas que têm complexificados $T^{\mathbb{C}}$ diagonalizáveis.

Juntando os fatos demonstrados nos lemas no final da seção anterior, obtemos o seguinte resultado a respeito de complexificados de operadores reais.

Proposição 9.2.2. *Seja T um operador linear no $\mathbb{R}$-espaço $\mathbb{R}^n$, seja $T^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o seu operador complexificado e seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de $T^{\mathbb{C}}$. Então, $\overline{\lambda}$ também é um autovalor de $T^{\mathbb{C}}$ e tem a mesma multiplicidade algébrica e a mesma multiplicidade geométrica que λ.*

Demonstração. Seja $A = [T]_{\mathsf{can}} \in M_n(\mathbb{R})$. Como $\big[T^{\mathbb{C}}\big]_{\mathsf{can}} = A$, segue que $\Big[\overline{T^{\mathbb{C}}}\Big]_{\mathsf{can}} = \overline{A} = A = \big[T^{\mathbb{C}}\big]_{\mathsf{can}}$. Logo, $\overline{T^{\mathbb{C}}} = T^{\mathbb{C}}$. Assim, do Lema 9.1.4 segue que $\overline{\lambda}$ é autovalor de $T^{\mathbb{C}}$ de mesma multiplicidade algébrica que λ. Do Lema 9.1.5, obtemos $\dim\big(\operatorname{Ker}\big(T^{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathrm{I}_{\mathbb{C}^n}\big)\big) = \dim\Big(\operatorname{Ker}\big(T^{\mathbb{C}} - \overline{\lambda}\,\mathrm{I}_{\mathbb{C}^n}\big)\Big)$, ou seja, λ e $\overline{\lambda}$ têm, também, mesma multiplicidade geométrica. $\square$

Na realidade, o Lema 9.1.5 fornece um pouco mais: se $\{v_1, \dots, v_r\}$ é uma base do autoespaço de $T^{\mathbb{C}}$ associado ao autovalor λ, então $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_r}\}$ é uma base do autoespaço de $T^{\mathbb{C}}$ associado ao autovalor $\overline{\lambda}$. Na prática, isso quer dizer que os autovalores não reais de uma matriz com entradas reais vêm aos pares, e o trabalho de encontrar os autovetores associados a eles fica dividido pela metade.

Exemplo 9.2.3. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ tal que

$$[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

O operador T é diagonalizável? O complexificado $T^{\mathbb{C}}$ é diagonalizável?

Solução. Temos

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det \begin{bmatrix} 2-t & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2-t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2-t \end{bmatrix} = (t^2-4t+5)^2 \\ &= \big(t-(2+\boldsymbol{i})\big)^2\big(t-(2-\boldsymbol{i})\big)^2. \end{aligned}$$

Como p_T tem raízes não reais, T não é diagonalizável.

Vejamos se o complexificado $T^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ é diagonalizável. (Observe que, como esperado, $2+\boldsymbol{i}$ e $2-\boldsymbol{i}$ têm a mesma multiplicidade algébrica, que é igual a 2.)

Pela Proposição 9.2.2, sabemos que a multiplicidade geométrica do autovalor $2+\boldsymbol{i}$ coincidirá com a do autovalor $2-\boldsymbol{i}$. Assim, $T^{\mathbb{C}}$ será diagonalizável se, e somente se, a multiplicidade geométrica de $2+\boldsymbol{i}$ for igual a 2, sua multiplicidade algébrica.

Dado $w = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$, temos:

$$w \in V(2+\boldsymbol{i}) = \operatorname{Ker}\big(T^{\mathbb{C}} - (2+\boldsymbol{i})\,\mathrm{I}_{\mathbb{C}^4}\big)$$

se, e somente se,

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - (2+\boldsymbol{i}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é, se e somente se,

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{i} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{i} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\boldsymbol{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como a primeira linha da matriz de coeficientes desse sistema linear é igual à terceira multiplicada por $-\boldsymbol{i}$ e a segunda é igual à quarta multiplicada por

$-\boldsymbol{i}$, segue que a solução geral do sistema é dada por

$$(\boldsymbol{i}z_3, \boldsymbol{i}z_4, z_3, z_4) = z_3(\boldsymbol{i}, 0, 1, 0) + z_4(0, \boldsymbol{i}, 0, 1), \quad (z_3, z_4 \in \mathbb{C}).$$

Consequentemente,

$$V(2 + \boldsymbol{i}) = [(\boldsymbol{i}, 0, 1, 0), (0, \boldsymbol{i}, 0, 1)].$$

Como esses dois vetores são LI, segue que $\dim\big(V(2+\boldsymbol{i})\big) = 2$ (e, portanto, também temos $\dim\big(V(2-\boldsymbol{i})\big) = 2$). Logo, $T^{\mathbb{C}}$ é diagonalizável.

Note que o Lema 9.1.5 nos fornece, também,

$$V(2 - \boldsymbol{i}) = [(-\boldsymbol{i}, 0, 1, 0), (0, -\boldsymbol{i}, 0, 1)],$$

obtido por conjugação dos geradores de $V(2 + \boldsymbol{i})$. ♢

9.3 Aplicação: resolução de sistemas de equações diferenciais (caso complexo)

Veremos, nesta seção, que é possível encontrar as soluções de sistemas de equações diferenciais como os tratados na Seção 7.5 no caso em que a matriz de coeficientes não é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, desde que ela o seja sobre $\mathbb{C}$. Neste caso, o sistema terá soluções periódicas.

Começamos por introduzir uma notação que se tornará bastante natural ao longo da seção. Dado um número complexo $z = a + \boldsymbol{i}b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, define-se o número complexo

$$e^z = e^a(\cos b + \boldsymbol{i} \operatorname{sen} b).$$

Observe que se $z \in \mathbb{R}$, então a definição acima coincide com a exponencial usual de base e. Além disso, essa definição compartilha com a exponenciação real a propriedade

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2},$$

para todos $z_1, z_1 \in \mathbb{C}$, como o leitor pode verificar utilizando as conhecidas fórmulas para o seno e o cosseno da soma de arcos. Também segue de propriedades das funções seno e cosseno que

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Essa notação será utilizada na definição da função exponencial complexa, que veremos a seguir.

Funções reais a valores complexos. Dada uma função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, existem funções $g_1, g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$$g(t) = g_1(t) + \boldsymbol{i} g_2(t),$$
para todo $t \in \mathbb{R}$. Diremos que $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é *derivável* se $g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem deriváveis. Neste caso, define-se a *derivada* de g como sendo a função $g'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por
$$g'(t) = g_1'(t) + \boldsymbol{i} g_2'(t),$$
para todo $t \in \mathbb{R}$.

A proposição a seguir reúne fatos sobre derivadas de funções a valores complexos que são consequência dos fatos correspondentes sobre derivadas de funções reais. A verificação de cada um deles fica a cargo do leitor.

Proposição 9.3.1. *Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funções deriváveis e seja $\lambda \in \mathbb{C}$. São válidos:*

(i) *A função $f + g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definida por $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é derivável e $(f+g)' = f' + g'$.*

(ii) *A função $\lambda f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definida por $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é derivável e $(\lambda f)' = \lambda f'$.*

(iii) *A função $fg\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definida por $(fg)(t) = f(t)g(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é derivável e $(fg)' = f'g + fg'$.*

(iv) *Se $g(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então a função $\frac{f}{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definida por $\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é derivável e $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.*

(v) *Se $f'(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então f é constante, isto é, existe $\rho \in \mathbb{C}$ tal que $f(t) = \rho$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Teremos especial interesse na função exponencial complexa, de que tratarão os dois lemas a seguir.

Lema 9.3.2. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ e seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a função definida por $f(t) = e^{\alpha t}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, f é derivável e $f'(t) = \alpha f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Escreva $\alpha = a + \boldsymbol{i} b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então,
$$f(t) = f_1(t) + \boldsymbol{i} f_2(t),$$
em que
$$f_1(t) = e^{at}\cos(bt)$$
e
$$f_2(t) = e^{at}\,\mathrm{sen}(bt),$$
para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como f_1 e f_2 são deriváveis, f é derivável. Além disso,

$$f_1'(t) = ae^{at}\cos(bt) - be^{at}\operatorname{sen}(bt)$$

e

$$f_2'(t) = ae^{at}\operatorname{sen}(bt) + be^{at}\cos(bt),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\begin{aligned} f'(t) &= f_1'(t) + \boldsymbol{i} f_2'(t) \\ &= ae^{at}\cos(bt) - be^{at}\operatorname{sen}(bt) + \boldsymbol{i}\big(ae^{at}\operatorname{sen}(bt) + be^{at}\cos(bt)\big) \\ &= (a + \boldsymbol{i}b)e^{at}\big(\cos(bt) + \boldsymbol{i}\operatorname{sen}(bt)\big) \\ &= \alpha f(t), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, como queríamos. □

Os múltiplos constantes da exponencial complexa são as únicas funções cuja derivada é uma múltipla da própria função:

Lema 9.3.3. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Se $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função derivável tal que $g'(t) = \alpha g(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então existe $K \in \mathbb{C}$ tal que $g(t) = Ke^{\alpha t}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere a função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$h(t) = g(t)e^{-\alpha t},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Pela Proposição 9.3.1 e pelo Lema 9.3.2, h é derivável e

$$h'(t) = g'(t)e^{-\alpha t} + g(t)(-\alpha e^{-\alpha t}) = e^{-\alpha t}\big(g'(t) - \alpha g(t)\big) = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, h é uma função constante, digamos $h(t) = K$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, $g(t)e^{-\alpha t} = K$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Multiplicando essa igualdade em ambos os lados por $e^{\alpha t}$, obtemos $g(t) = Ke^{\alpha t}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Soluções complexas de sistemas de equações diferenciais. Vimos, na Seção 7.5, que o conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ formado por todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ tem uma estrutura natural de $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Analogamente, o conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de todas as funções $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ têm uma estrutura natural de $\mathbb{C}$-espaço vetorial, com operações definidas por

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t) \qquad \text{e} \qquad (\alpha F)(t) = \alpha F(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, em que $F, G \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz *real*. Uma *solução complexa* do sistema de equações diferenciais

$$X' = AX \tag{9.4}$$

é uma função $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, com $F(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\big)$, em que $f_1, f_2, \ldots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são funções deriváveis tais que

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Se F é uma solução complexa de (9.4) e $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, isto é, se a imagem de F estiver contida em $\mathbb{R}^n$, diremos que F é uma de *solução real* de (9.4). (Na Seção 7.5 essas funções eram chamadas simplesmente de soluções de (9.4).)

Similarmente ao que ocorre no caso das soluções reais, o subconjunto do $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ formado por todas as soluções complexas de (9.4) é um $\mathbb{C}$-subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$. E, de modo análogo ao que fizemos na Seção 7.5, se, em (9.4) tivermos uma matriz A diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, digamos $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, em que $P \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz inversível e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, então as soluções complexas de (9.4) serão as $\mathbb{C}$-combinações lineares das funções

$$e^{\alpha_1 t} w_1,\ e^{\alpha_2 t} w_2,\ \ldots,\ e^{\alpha_n t} w_n, \tag{9.5}$$

em que, para todo $j = 1, \ldots, n$, w_j é a j-ésima coluna da matriz P (que é um autovetor de A associado ao autovalor α_j).

Nosso objetivo será determinar as soluções *reais* de (9.4) no caso em que A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

O primeiro fato fundamental a respeito do subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ formado pelas soluções complexas de (9.4) é o seguinte.

Lema 9.3.4. *Se $F_1, F_2, \ldots, F_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ são tais que $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ é uma base para o $\mathbb{C}$-subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ formado pelas soluções complexas de* (9.4), *então $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ é uma base para o $\mathbb{R}$-subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ formado pelas soluções reais de* (9.4).

Demonstração. Usaremos a notação $[F_1, \ldots, F_k]_{\mathbb{C}}$ para denotar o $\mathbb{C}$-subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ gerado por $\{F_1, \ldots, F_k\}$ e $[F_1, \ldots, F_k]_{\mathbb{R}}$ para denotar o $\mathbb{R}$-subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ gerado por $\{F_1, \ldots, F_k\}$.

Seja $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{C}$-subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ formado pelas soluções complexas de (9.4) e seja $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{R}$-subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ formado pelas soluções reais de (9.4). Fica claro que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$.

Por hipótese, $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = [F_1, \ldots, F_k]_{\mathbb{C}}$. E é claro que $[F_1, \ldots, F_k]_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$. Resta, portanto, mostrar a outra inclusão e que o conjunto $\{F_1, \ldots, F_k\}$ é $\mathbb{R}$-LI (isto é, que como subconjunto do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ele é LI).

Esse último fato é imediato: se não há combinações lineares não triviais de $F_1, \ldots, F_k$ que resultam na função nula de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}^n$ usando coeficientes complexos, também não pode haver combinações lineares não triviais de $F_1, \ldots, F_k$ que resultem na função nula de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ usando coeficientes reais.

Mostremos, então, que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} \subseteq [F_1, \ldots, F_k]_{\mathbb{R}}$. Seja $G \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$. Como $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathbb{C}} = [F_1, \ldots, F_k]_{\mathbb{C}}$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ tais que $G = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_k F_k$. Para cada $j = 1, \ldots, k$, escreva $\alpha_j = a_j + \boldsymbol{i} b_j$, com $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Então,

$$G = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_k F_k = (a_1 F_1 + \cdots + a_k F_k) + \boldsymbol{i}(b_1 F_1 + \cdots + b_k F_k).$$

Note que $a_1 F_1 + \cdots + a_k F_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e $b_1 F_1 + \cdots + b_k F_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Como $G \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, segue que $b_1 F_1 + \cdots + b_k F_k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)}$. Mas, o conjunto $\{F_1, \ldots, F_k\}$ é LI (porque é uma base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$); logo, $b_1 = \cdots = b_k = 0$. Portanto, $G = a_1 F_1 + \cdots + a_k F_k \in [F_1, \ldots, F_k]_{\mathbb{R}}$. $\square$

Esse lema garante que, no caso em que A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, se conseguirmos trocar a base do subespaço das soluções complexas de (9.4), cujos elementos são as funções complexas em (9.5), por uma base formada por funções reais, teremos uma base para o subespaço das soluções reais de (9.4). É dessa tarefa que nos incumbiremos agora.

Dada uma função $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, defina a *função conjugada* de F como sendo a função $\overline{F} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ dada por $\overline{F}(t) = \overline{F(t)}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Toda função $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ pode ser decomposta na forma $F = F_1 + \boldsymbol{i} F_2$, em que F_1 e F_2 são funções de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. É fácil ver, então, que $\overline{F} = F_1 - \boldsymbol{i} F_2$. As funções F_1 e F_2 são chamadas, respectivamente, de parte real e parte imaginária de F.

O próximo lema mostra que F e sua conjugada geram, sobre $\mathbb{C}$, o mesmo subespaço que a parte real e a parte imaginária de F, que são funções reais.

Lema 9.3.5. *Seja $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, com $F = F_1 + \boldsymbol{i} F_2$, em que $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Então, no $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, temos $[F, \overline{F}] = [F_1, F_2]$.*

Demonstração. Como $F = F_1 + \boldsymbol{i} F_2$ e $\overline{F} = F_1 - \boldsymbol{i} F_2$, tanto F quanto $\overline{F}$ pertencem ao subespaço $[F_1, F_2]$. Logo, $[F, \overline{F}] \subseteq [F_1, F_2]$. Reciprocamente, como $F_1 = \frac{1}{2} F + \frac{1}{2} \overline{F}$ e $F_2 = \frac{1}{2\boldsymbol{i}} F - \frac{1}{2\boldsymbol{i}} \overline{F}$, segue que $[F_1, F_2] \subseteq [F, \overline{F}]$. $\square$

Vamos aplicar o lema acima no caso da função $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ definida por

$$F(t) = e^{\alpha t} w,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, em que $\alpha \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}^n$ estão fixado.

Por um lado, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\overline{F}(t) = \overline{F(t)} = \overline{e^{\alpha t} w} = \overline{e^{\alpha t}}\,\overline{w} = e^{\overline{\alpha t}}\,\overline{w} = e^{\overline{\alpha} t}\,\overline{w}.$$

Por outro lado, escrevendo $\alpha = a + \boldsymbol{i}b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $w = u + \boldsymbol{i}v$, com $u, v \in \mathbb{R}^n$, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
F(t) &= e^{\alpha t} w \\
&= e^{(a+\boldsymbol{i}b)t}(u + \boldsymbol{i}v) \\
&= \big(e^{at}\cos(bt) + \boldsymbol{i}e^{at}\operatorname{sen}(bt)\big)(u + \boldsymbol{i}v) \\
&= e^{at}\big(\cos(bt)u - \operatorname{sen}(bt)v\big) + \boldsymbol{i}e^{at}\big(\operatorname{sen}(bt)u + \cos(bt)v\big)
\end{aligned}$$

Assim, a parte real de F é dada por

$$G(t) = e^{at}\big(\cos(bt)u - \operatorname{sen}(bt)v\big)$$

e a parte imaginária de F é dada por

$$H(t) = e^{at}\big(\operatorname{sen}(bt)u + \cos(bt)v\big).$$

O Lema 9.3.5 garante que, em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, temos

$$\big[e^{\alpha t}w, e^{\overline{\alpha}t}\overline{w}\big] = \left[G(t), H(t)\right].$$

Essa observação permite, agora, obter o seguinte complementar do Teorema 7.5.2.

Teorema 9.3.6. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ e seja $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ formado pelas soluções reais do sistema de equações diferenciais $X' = AX$. Então, $\dim(\mathcal{S}) = n$.*

Além disso, se $r_1, r_2, \dots, r_k, \alpha_1, \overline{\alpha_1}, \alpha_2, \overline{\alpha_2}, \dots, \alpha_s, \overline{\alpha_s}$ são os autovalores de A, consideradados com multiplicidades (e, portanto, $k + 2s = n$), em que $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, então o conjunto

$$\{e^{r_1 t}v_1, e^{r_2 t}v_2, \dots, e^{r_k t}v_k, G_1(t), H_1(t), G_2(t), H_2(t), \dots, G_s(t), H_s(t)\}$$

é uma base para $\mathcal{S}$, em que $\{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, \overline{w_1}, w_2, \overline{w_2}, \dots, w_s, \overline{w_s}\}$ é uma base de $\mathbb{C}^n$ formada por autovetores de A tais que $Av_i = r_i v_i$, para todo $i = 1, \dots, k$, e $Aw_j = \alpha_j w_j$, para todo $j = 1, \dots, s$, e as funções $G_j, H_j \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ são tais que

$$e^{\alpha_j t}w_j = G_j(t) + \boldsymbol{i}H_j(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Sabemos que, como A é real, seus autovalores não reais vêm aos pares de conjugados e os autovetores correspondentes também. Isso quer dizer que, de fato, uma base de $\mathbb{C}^n$ formada por autovetores de A da forma $\{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, \overline{w_1}, w_2, \overline{w_2}, \dots, w_s, \overline{w_s}\}$, com $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, conforme o enunciado, existe.

Pelo que vimos no caso real, segue que

$$\{e^{r_1 t}v_1, e^{r_2 t}v_2, \dots, e^{r_k t}v_k, e^{\alpha_1 t}w_1, e^{\overline{\alpha_1}t}\overline{w_1}, e^{\alpha_2 t}w_2, e^{\overline{\alpha_2}t}\overline{w_2}, \dots, e^{\alpha_s t}w_s, e^{\overline{\alpha_s}t}\overline{w_s}\}$$

é uma base para o subespaço $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ formado pelas soluções complexas de $X' = AX$. Em particular, $\dim(\mathcal{S}_{\mathbb{C}}) = n$.

Agora, como vimos acima, o Lema 9.3.5 garante que

$$\left[e^{\alpha_j t} w_j, e^{\overline{\alpha_j} t}\overline{w_j}\right]_{\mathbb{C}} = \left[G_j(t), H_j(t)\right]_{\mathbb{C}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\mathbb{C}} &= \left[e^{r_1 t}v_1, e^{r_2 t}v_2, \dots, e^{r_k t}v_k, e^{\alpha_1 t}w_1, e^{\overline{\alpha_1} t}\overline{w_1}, e^{\alpha_2 t}w_2, e^{\overline{\alpha_2} t}\overline{w_2}, \dots, e^{\alpha_s t}w_s, e^{\overline{\alpha_s} t}\overline{w_s}\right] \\ &= \left[e^{r_1 t}v_1, e^{r_2 t}v_2, \dots, e^{r_k t}v_k, G_1(t), H_1(t), G_2(t), H_2(t), \dots, G_s(t), H_s(t)\right],\end{aligned}$$

que é um conjunto de n elementos. Segue que

$$\{e^{r_1 t}v_1, e^{r_2 t}v_2, \dots, e^{r_k t}v_k, G_1(t), H_1(t), G_2(t), H_2(t), \dots, G_s(t), H_s(t)\}$$

é uma base para $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ formada por funções de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Finalmente, segue doo Lema 9.3.4 que esse conjunto é uma base para $\mathcal{S}$. □

Exemplo 9.3.7. Encontre as soluções reais do sistema de equações diferenciais $X' = AX$, em que $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução. Realizando os cálculos necessários, obtemos

$$\begin{aligned}p_A(t) &= -(t-2)(t^2 - 6t + 10) \\ &= -(t-2)\big(t - (3+\boldsymbol{i})\big)\big(t - (3-\boldsymbol{i})\big).\end{aligned}$$

Como todos os autovalores têm multiplicidade 1, A é diagonalizável (sobre $\mathbb{C}$).

Uma vez efetuados os cálculos, obtemos

$$V(2) = [(2, -3, 2)]$$

e

$$V(3+\boldsymbol{i}) = [(0, -1+\boldsymbol{i}, 2)].$$

(Portanto, $V(3-\boldsymbol{i}) = [(0, -1-\boldsymbol{i}, 2)]$).

Assim, as soluções complexas do sistema de equações diferenciais são as combinações lineares complexas das funções

$$e^{2t}(2, -3, 2), \qquad e^{(3+\boldsymbol{i})t}(0, -1+\boldsymbol{i}, 2), \qquad e^{(3-\boldsymbol{i})t}(0, -1-\boldsymbol{i}, 2).$$

Agora,

$$\begin{aligned}e^{(3+\boldsymbol{i})t}(0, -1+\boldsymbol{i}, 2) &= e^{3t}(\cos t + \boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}\,t)(0, -1+\boldsymbol{i}, 2) \\ &= e^{3t}(0, -\cos t + \boldsymbol{i}\cos t - \boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,t, \\ &\qquad 2\cos t + 2\boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}\,t) \\ &= e^{3t}(0, -\cos t - \mathrm{sen}\,t, 2\cos t) \\ &\qquad + \boldsymbol{i}e^{3t}(0, \cos t - \mathrm{sen}\,t, 2\,\mathrm{sen}\,t),\end{aligned}$$

donde segue que as soluções complexas também podem ser descritas como as combinações lineares complexas das funções

$$\begin{aligned}&e^{2t}(2,-3,2),\\&e^{3t}(0,-\cos t-\operatorname{sen} t,2\cos t),\\&e^{3t}(0,\cos t-\operatorname{sen} t,2\operatorname{sen} t).\end{aligned}\tag{9.6}$$

O que fizemos aqui foi trocar o par de funções conjugadas

$$e^{(3+\boldsymbol{i})t}(0,-1+\boldsymbol{i},2),\qquad e^{(3-\boldsymbol{i})t}(0,-1-\boldsymbol{i},2)$$

pelo par formado pela parte real e parte imaginária delas:

$$e^{3t}(0,-\cos t-\operatorname{sen} t,2\cos t),\qquad e^{3t}(0,\cos t-\operatorname{sen} t,2\operatorname{sen} t).$$

A vantagem é que agora temos uma base para o espaço das soluções complexas formada exclusivamente por funções reais.

Finalmente, as soluções reais são as combinações lineares reais das funções (reais) em (9.6). Ou seja, as soluções reais do sistema de equações diferenciais são

$$\begin{aligned}c_1e^{2t}(2,-3,2)+c_2e^{3t}&(0,-\cos t-\operatorname{sen} t,2\cos t)\\&+c_3e^{3t}(0,\cos t-\operatorname{sen} t,2\operatorname{sen} t),\end{aligned}$$

com $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$. $\Diamond$

Exemplo 9.3.8. Encontre a solução real do sistema de equações diferenciais $X'=AX$ que satisfaz $X(0)=(0,1,2,3)$, em que $A=\begin{bmatrix}2&0&-1&0\\0&2&0&-1\\1&0&2&0\\0&1&0&2\end{bmatrix}$.

Solução. Vimos no Exemplo 9.2.3 que a matriz A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ com autovalores $2+\boldsymbol{i}$ e $2-\boldsymbol{i}$ e autoespaços

$$V(2+\boldsymbol{i})=[(\boldsymbol{i},0,1,0),(0,\boldsymbol{i},0,1)]$$

e

$$V(2-\boldsymbol{i})=[(-\boldsymbol{i},0,1,0),(0,-\boldsymbol{i},0,1)]\,.$$

Assim, formam uma base para as soluções complexas as funções

$$e^{(2+\boldsymbol{i})t}(\boldsymbol{i},0,1,0),\quad e^{(2+\boldsymbol{i})t}(0,\boldsymbol{i},0,1)$$

e suas conjugadas.

Como

$$\begin{aligned}e^{(2+\boldsymbol{i})t}(\boldsymbol{i},0,1,0)&=e^{2t}(\cos t+\boldsymbol{i}\operatorname{sen} t)(\boldsymbol{i},0,1,0)\\&=e^{2t}(-\operatorname{sen} t,0,\cos t,0)+\boldsymbol{i}e^{2t}(\cos t,0,\operatorname{sen} t,0)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e^{(2+\boldsymbol{i})t}(0,\boldsymbol{i},0,1) &= e^{2t}(\cos t + \boldsymbol{i}\operatorname{sen} t)(0,\boldsymbol{i},0,1) \\ &= e^{2t}(0,-\operatorname{sen} t,0,\cos t) + \boldsymbol{i}e^{2t}(0,\cos t,0,\operatorname{sen} t), \end{aligned}$$

a solução real geral é da forma

$$\begin{aligned} X(t) = c_1e^{2t}(-\operatorname{sen} t,0,\cos t,0) + c_2e^{2t}(\cos t,0,\operatorname{sen} t,0) \\ + c_3e^{2t}(0,-\operatorname{sen} t,0,\cos t) + c_4e^{2t}(0,\cos t,0,\operatorname{sen} t), \end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Para encontrar a solução particular que satisfaz a condição $X(0) = (0,1,2,3)$, é preciso determinar c_1, c_2, c_3, c_4 tais que

$$\begin{aligned} (0,1,2,3) &= X(0) \\ &= c_1(0,0,1,0) + c_2(1,0,0,0) + c_3(0,0,0,1) + c_4(0,1,0,0) \\ &= (c_2, c_4, c_1, c_3). \end{aligned}$$

Fica claro que os valores procurados são $c_1 = 2, c_2 = 0, c_3 = 3, c_4 = 1$. Logo, a solução particular buscada é

$$X(t) = e^{2t}(-2\operatorname{sen} t, -3\operatorname{sen} t + \cos t, 2\cos t, 3\cos t + \operatorname{sen} t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. ♢

Exemplo 9.3.9. (Prova 3, Álgebra Linear II, 2015) Sabendo que a matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$ tem $1 + \boldsymbol{i}$ como autovalor e que o autoespaço de A associado a esse autovalor é gerado por $\{(1,\boldsymbol{i},0,0),(0,0,1,2-\boldsymbol{i})\}$, é correto afirmar que a solução do sistema de equações diferenciais $X' = AX$ que satisfaz a condição $X(0) = (0,1,0,1)$ é tal que $X(\pi)$ é igual a

(A) $e^{\pi}(0,-1,0,-1)$

(B) $e^{2\pi}(-1,0,0,1)$

(C) $e^{2\pi}(0,1,0,-1)$

(D) $e^{\pi}(-1,-1,0,0)$

(E) $e^{\pi}(1,0,-1,0)$

Solução. Como o conjunto $\{(1,\boldsymbol{i},0,0),(0,0,1,2-\boldsymbol{i})\}$ é obviamente LI, segue que $\dim\big(V(1+\boldsymbol{i})\big) = 2$ e, como A é real, $\dim\big(V(1-\boldsymbol{i})\big) = 2$, o que implica que A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$. Assim, as soluções complexas de $X' = AX$ são as combinações lineares de

$$e^{(1+\boldsymbol{i})t}(1,\boldsymbol{i},0,0), \qquad e^{(1+\boldsymbol{i})t}(0,0,1,2-\boldsymbol{i})$$

e suas conjugadas. Temos

$$\begin{aligned} e^{(1+\boldsymbol{i})t}(1,\boldsymbol{i},0,0) &= e^t(\cos t + \boldsymbol{i}\operatorname{sen} t)(1,\boldsymbol{i},0,0) \\ &= e^t(\cos t, -\operatorname{sen} t, 0, 0) + \boldsymbol{i}e^t(\operatorname{sen} t, \cos t, 0, 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e^{(1+\boldsymbol{i})t}(0,0,1,2-\boldsymbol{i}) &= e^t(\cos t + \boldsymbol{i}\operatorname{sen} t)(0,0,1,2-\boldsymbol{i}) \\ &= e^t(0,0,\cos t, 2\cos t + \operatorname{sen} t) \\ &\qquad + \boldsymbol{i}e^t(0,0,\operatorname{sen} t, -\cos t + 2\operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

Logo, a solução real geral é

$$\begin{aligned} X(t) = e^t\big(&a(\cos t, -\operatorname{sen} t, 0, 0) + b(\operatorname{sen} t, \cos t, 0, 0) \\ &+ c(0,0,\cos t, 2\cos t + \operatorname{sen} t) + d(0,0,\operatorname{sen} t, -\cos t + 2\operatorname{sen} t)\big), \end{aligned}$$

com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Para a solução particular buscada, fazemos

$$\begin{aligned} (0,1,0,1) &= X(0) \\ &= a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,2) + d(0,0,0,-1) \\ &= (a,b,c,2c-d), \end{aligned}$$

donde segue que $a = c = 0$, $b = 1$ e $d = -1$. Portanto, essa solução é

$$X(t) = e^t(\operatorname{sen} t, \cos t, -\operatorname{sen} t, \cos t - 2\operatorname{sen} t).$$

Logo, $X(\pi) = e^\pi(0,-1,0,-1)$. *Resposta:* (A). $\diamondsuit$

Apêndice A

Um pouco mais sobre determinantes

Neste apêndice apresentaremos, sem demonstração, fórmulas para o determinante de uma matriz quadrada que podem ser úteis.

Não serão apresentadas demonstrações. Para maiores detalhes, indicamos as obras **[7]**, **[1]** e **[5]**.

A.1 Cofatores

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ e fixando i e j, denotaremos por A_{ij} a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida a partir de A removendo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

então

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

O *cofator* (i, j) da matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é definido como sendo o número dado por

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

É possível demonstrar que

$$\det(A) = a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + \cdots + a_{1n}C_{1n}(A).$$

Essa expressão é usualmente chamada *expansão do determinante de A por cofatores ao longo da primeira linha.*

Também se pode provar que se na expressão acima a primeira linha for substituída por qualquer outra, o mesmo valor será obtido, ou seja, vale

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1}(A) + a_{i2}C_{i2}(A) + \cdots + a_{in}C_{in}(A), \tag{A.1}$$

qualquer que seja $i = 1, \ldots, n$. Essa fórmula chama-se *expansão de* $\det(A)$ *por cofatores ao longo da i-ésima linha*.

Exemplo A.1.1. Calcule $\det(A)$ por expansão em cofatores, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Solução. Temos

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

De modo que os cofatores da primeira linha são (usando a fórmula vista no Exemplo 1.3.4 para matrizes 2×2)

$$\begin{aligned} C_{11}(A) &= (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = -8, \\ C_{12}(A) &= (-1)^{1+2}\det(A_{12}) = -\det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = 12, \\ C_{13}(A) &= (-1)^{1+3}\det(A_{13}) = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 7. \end{aligned}$$

Assim, fazendo expansão ao longo da primeira linha, obtemos, de (A.1) com $i = 1$ (e, claro, $n = 3$),

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1C_{11}(A) + 2C_{12}(A) + (-1)C_{13}(A) \\ &= 1 \cdot (-8) + 2 \cdot 12 + (-1) \cdot 7 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Vejamos que o mesmo número é obtido por expansão ao longo da segunda linha. Como

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

segue que

$$C_{21}(A) = (-1)^{2+1}\det(A_{21}) = -\det\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{bmatrix} = 5,$$
$$C_{22}(A) = (-1)^{2+2}\det(A_{22}) = \det\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix} = -3,$$
$$C_{23}(A) = (-1)^{2+3}\det(A_{23}) = -\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} = -1.$$

Donde, usando, (A.1) com $i = 2$, obtém-se

$$\begin{aligned}\det(A) &= 3C_{21}(A) + 2C_{22}(A) + 0C_{23}(A)\\ &= 3\cdot 5 + 2\cdot(-3) + 0\cdot(-1)\\ &= 9,\end{aligned}$$

conforme esperávamos. $\Diamond$

Se lembrarmos que o determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta, podemos obter o determinante, também, por expansão em cofatores ao longo de colunas: dada $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, temos

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j}(A) + a_{2j}C_{2j}(A) + \cdots + a_{nj}C_{nj}(A), \tag{A.2}$$

para qualquer $j = 1, \ldots, n$.

As fórmulas (A.1) e (A.2) são também conhecidas como *fórmulas de Laplace*.

A.2 A regra de Sarrus

Dada uma matriz arbitrária 3×3

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},$$

se calcularmos seu determinante por expansão em cofatores ao longo da primeira linha, obtemos

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{31})\\ &\qquad + a_{12}(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\\ &\qquad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

Essa última expressão é conhecida como *fórmula de Sarrus* e pode ser memorizada lembrando que em cada termo com sinal positivo se multiplicam entradas ao longo de linhas diagonais com orientação NO-SE,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & a_{12} & \\ & & a_{23} \\ a_{31} & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & & \\ & a_{32} & \end{bmatrix},$$

e cada termo com sinal negativo é o produto de entradas ao longo de linhas diagonais com orientação NE-SO,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & & a_{23} \\ & a_{32} & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & \\ & & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{bmatrix}.$$

A fórmula de Sarrus aplica-se exclusivamente a matrizes de tamanho 3×3. Para o cálculo de determinantes de matrizes de tamanho maior, deve-se utilizar as fórmulas de Laplace ou o método, baseado em escalonamento, visto na Seção 1.3.

Apêndice **B**

O posto de uma matriz

Veremos que a dimensão do espaço gerado pelas linhas de uma matriz (seu posto-linha) sempre coincide com a dimensão do espaço gerado por suas colunas (o posto-coluna). Como consequência da demonstração desse fato, obteremos um método de extração de bases a partir de conjuntos geradores.

B.1 Posto-linha e posto-coluna

Dada uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, podemos considerar suas linhas como vetores de $\mathbb{R}^n$ e suas colunas como vetores de $\mathbb{R}^m$, da seguinte maneira: para cada $i = 1, \dots, m$, seja

$$u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n,$$

e, para cada $j = 1, \dots, n$, seja

$$v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m.$$

Denotaremos por $L(A)$ o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de A, isto é,

$$L(A) = [u_1,\, u_2,\, \dots,\, u_m]\,,$$

e por $C(A)$ o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas de A:

$$C(A) = [v_1,\, v_2,\, \dots,\, v_n]\,.$$

A dimensão de $L(A)$ será denominada *posto-linha* de A e será denotada por $\operatorname{pl}(A)$. A dimensão de $C(A)$ é chamada *posto-coluna* de A e denotada por $\operatorname{pc}(A)$.

Teorema B.1.1. *Para qualquer $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, vale* $\operatorname{pl}(A) = \operatorname{pc}(A)$.

Demonstração. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e seja $R \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz escalonada obtida a partir de A por meio de uma sequência de operações elementares sobre linhas (por exemplo, pelo processo de escalonamento).

Uma vez que as linhas de R são combinações lineares das linhas de A, segue que $L(R) \subseteq L(A)$. Como operações elementares sobre linhas podem ser revertidas, A também pode ser obtida a partir de R por uma sequência de operações elementares sobre linhas, e, portanto, temos, de fato, $L(A) = L(R)$. Em particular, $\operatorname{pl}(A) = \operatorname{pl}(R)$.

Agora, como R é escalonada, suas linhas não nulas (que são aquelas que contêm pivôs) são LI e, portanto, formam uma base para $L(R)$. Logo, se R tem r pivôs,

$$\operatorname{pl}(A) = \operatorname{pl}(R) = r. \tag{B.1}$$

Considere, agora, o sistema linear homogêneo

$$AX = 0. \tag{B.2}$$

Uma solução $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de (B.2) origina uma relação de dependência linear entre as colunas de A:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

E, reciprocamente, qualquer relação de dependência linear entre as coluna de A dá origem a uma solução de A.

Assim, como (B.2) têm as mesmas soluções que o sistema linear homogêneo

$$RX = 0,$$

as relações de dependência linear entre as colunas de A são as mesmas que entre as colunas de R. Portanto, $\operatorname{pc}(A) = \operatorname{pc}(R)$.

Cada coluna de R que não contém um pivô é combinação linear das colunas que contêm pivô e a precedem. Logo, $C(R)$ é gerado pelas colunas de R que contêm pivôs. Como essas colunas são, evidentemente, LI, elas formam uma base para $C(R)$. Sendo r o número de colunas de R com pivô, segue

$$\operatorname{pc}(A) = \operatorname{pc}(R) = r. \tag{B.3}$$

Juntando (B.1) e (B.3), obtemos $\operatorname{pl}(A) = \operatorname{pc}(A)$. □

Definição. Dada uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, o *posto* de A é definido por $\operatorname{posto}(A) = \operatorname{pl}(A)$.

Vimos, no Teorema B.1.1, que o posto de A coincide com o posto-coluna de A e com o número de pivôs de uma matriz escalonada obtida a partir de A pelo processo de escalonamento. Em particular, $\text{posto}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Além disso, apesar de a matriz escalonada obtida por operações elementares sobre linhas a partir de A não ser única, por depender de escolhas feitas ao longo do processo de escalonamento, o número de linhas não nulas dessa matriz (ou seja, o número de pivôs dela) depende apenas de A, pois coincide com o posto-linha de A.

Resumidamente, se R_1 e R_2 são duas matrizes escalonadas obtidas a partir de A por meio de operações elementares sobre linhas, ambas têm o mesmo número de linhas não nulas, mesmo não sendo, necessariamente, matrizes iguais.

B.2 Aplicação: Extração de bases de conjuntos geradores

Voltando à demonstração do Teorema B.1.1, vimos que, dada uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se $R \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz escalonada obtida a partir de A por meio de uma sequência de operações elementares sobre linhas, então as relações de dependência linear entre as colunas de A são as mesmas que existem entre as colunas de R. Vimos, também, que as colunas de R que contêm pivôs formam uma base para $C(R)$. Logo, não só é possível concluir que $\text{pc}(A) = \text{pc}(R)$, como também que as colunas de A que ocupam as mesmas posições que as colunas de R que contêm pivôs formam uma base para $C(A)$.

O Teorema 4.5.8 garantia que qualquer conjunto gerador finito de um espaço vetorial contém uma base, porém sua demonstração não fornecia um método eficiente de se obter uma base a partir desse conjunto gerador (ou, como também se costuma dizer, para se extrair do conjunto gerador uma base) — era preciso investigar as relações de dependência linear existentes entre esses geradores. A observação que fizemos no parágrafo anterior permite encontrar um procedimento eficiente, como veremos a seguir.

Método para extração de uma base de um conjunto gerador de um subespaço. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e considere o subespaço

$$S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

de $\mathbb{R}^m$. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a matriz que cujas *colunas* são $v_1, v_2, \dots, v_n$, e seja $R \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz escalonada obtida a partir de A por meio de uma sequência de operações elementares sobre *linhas* (por exemplo, pelo processo de escalonamento). Então, como acabamos de ver, uma base de S é formada pelos vetores v_j tais que a j-ésima coluna de R contém um pivô.

Exemplo B.2.1. Voltemos ao Exemplo 4.7.4, em que se pedia uma base para o subespaço $S = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ de $\mathbb{R}^5$, em que

$$u_1 = (1,0,-1,2,0), \qquad u_2 = (2,1,3,0,0),$$
$$u_3 = (0,1,-5,4,0), \qquad u_4 = (1,0,-11,10,0).$$

Aplicando o método que acabamos de descrever, devemos construir uma matriz 5×4 cujas colunas são os vetores u_1, u_2, u_3, u_4 e submetê-la ao processo de escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & -11 \\ 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os pivôs da matriz escalonada obtida ao final do processo estão destacados em vermelho; eles ocorrem nas colunas 1, 2 e 3. Logo, $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de S. $\diamondsuit$

Exemplo B.2.2. Encontre uma base para o subespaço $S = [\mathcal{A}]$ de $\mathbb{R}$, em que

$$\mathcal{A} = \{ (1,0,-1,2,0), (2,1,3,8,0), (3,1,2,10,0), (0,1,6,4,0) \},$$

que esteja contida em $\mathcal{A}$.

Solução. Procedemos conforme o método apresentado, sujeitando a matriz cujas colunas são os elementos de $\mathcal{A}$ ao processo de escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como os pivôs da matriz escalonada ocorrem nas colunas 1, 2 e 4, segue que uma base de S é formada pelos primeiro, segundo e quarto elementos do conjunto $\mathcal{A}$: $\{(1,0,-1,2,0), (2,1,3,8,0), (0,1,6,4,0)\}$. $\diamondsuit$

Observação. O método descrito e ilustrado acima aplica-se a subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^m$. Ele, na verdade, pode se aplicar a qualquer subespaço de um espaço de dimensão finita, uma vez fixada uma base ordenada e trabalhando em coordenadas.

Mais detalhadamente, seja V um espaço vetorial de dimensão finita igual a m e seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de V. Dados $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, considere o subespaço $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ de V. Tome, agora, para cada $j = 1, \dots, n$, as coordenadas de v_j em relação à base $\mathcal{B}$:

$$v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})_{\mathcal{B}},$$

e construa a matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ que contém, em sua j-ésima coluna, as coordenadas de v_j em relação à base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Uma base para S é formada por aqueles vetores v_j tais que a coluna j da matriz escalonada obtida a partir de A pelo processo de escalonamento contém um pivô. $\diamondsuit$

Apêndice C

Um pouco sobre funções

Este apêndice tem por objetivo recordar alguns conceitos, provavelmente conhecidos do leitor, a respeito de funções entre dois conjuntos. Daremos especial atenção aos conceitos de injetividade e sobrejetividade e a condições equivalentes a eles envolvendo a noção de composição de funções.

C.1 Definições

Para o que faremos neste apêndice, um conceito intuitivo da ideia de conjunto será suficiente; podemos pensar que um conjunto é apenas uma coleção de objetos, não estando presente nenhuma estrutura adicional envolvendo seus elementos.

A primeira noção de que precisaremos é a de produto cartesiano entre dois conjuntos. Se X e Y são conjuntos, o *produto cartesiano* $X \times Y$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), com $x \in X$ e $y \in Y$.

Dados conjuntos X e Y, uma *função* de X em Y é, por definição, um subconjunto f do produto cartesiano $X \times Y$ com a propriedade de que para todo $x \in X$, existe um único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.

Essa é a definição formal de função, mas veja que ela coincide com a noção intuitiva que o leitor deve já ter: uma função tem um domínio — o conjunto X —, um contradomínio — o conjunto Y — e uma "regra", que associa a cada elemento do domínio um elemento do contradomínio, chamado sua imagem. Na definição formal, a "regra" nada mais é do que a listagem completa de todo os elementos do domínio acompanhados de suas respectivas imagens, ou, em outras palavras, a listagem completa dos pares (x, y), para todos os pontos $x \in X$, em que y é a imagem, por f, de x.

Para nos aproximarmos da notação com a que o leitor provavelmente é mais familiar, escreveremos $f(x) = y$ para denotar que $(x, y) \in f$, e indicaremos o fato de f ser uma função com domínio X e contradomínio Y por $f\colon X \to Y$.

Começamos por introduzir alguma nomenclatura usualmente utilizada no estudo de funções. Uma função $f\colon X \to Y$ é dita

- *injetora* se, para todos $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ implicar $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *sobrejetora* se, para todo $y \in Y$, existir (ao menos um) $x \in X$ tal que $y = f(x)$;
- *bijetora* se for injetora e sobrejetora.

As condições de injetividade e sobrejetividade são completamente independentes.

Exemplo C.1.1. A função $f\colon \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6, 7\}$, definida por

$$f(1) = 4, \qquad f(2) = 5, \qquad f(3) = 6,$$

é injetora, mas não é sobrejetora (porque não existe $x \in \{1, 2, 3\}$ tal que $f(x) = 7$).

A função $g\colon \{1, 2, 3\} \to \{4, 5\}$, definida por

$$g(1) = 4 \qquad g(2) = 4, \qquad g(3) = 5,$$

é sobrejetora, mas não é injetora (pois $g(1) = g(2)$, apesar de $1 \neq 2$).

A função $h\colon \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$, definida por

$$h(1) = 4, \qquad h(2) = 5, \qquad h(3) = 6,$$

é bijetora. $\diamondsuit$

Dizemos que duas funções $f\colon X \to Y$ e $g\colon Z \to W$ são iguais, e, neste caso, escrevemos $f = g$, se $X = Z$, $Y = W$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X$. (Dito de outra forma, f e g são iguais se tiverem mesmo domínio, mesmo contradomínio e as imagens de cada ponto do domínio comum coincidirem.)

C.2 Composição de funções

Se X, Y, Z são conjuntos e $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são funções, pode-se definir a *função composta* $g \circ f\colon X \to Z$, dada por

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big),$$

para todo $x \in X$.

Observe que esta definição funciona bem, uma vez que para todo $x \in X$, temos $f(x) \in Y$, que é o domínio da função g.

Exemplo C.2.1. Considere a função $f\colon \{1,2,3\} \to \{4,5,6,7\}$, definida por

$$f(1) = 7, \qquad f(2) = 4, \qquad f(3) = 6,$$

e a função $g\colon \{4,5,6,7\} \to \{8,9\}$, definida por

$$g(4) = 8, \qquad g(5) = 8, \qquad g(6) = 9, \qquad g(7) = 8.$$

Como o contradomínio de f (que é o conjunto $\{4,5,6,7\}$) coincide com o domínio de g, a função composta $g \circ f$ está definida, tem domínio coincidente com o domínio de f, contradomínio coincidente com o contradomínio de g (em símbolos, $g \circ f\colon \{1,2,3\} \to \{8,9\}$) e é definida por

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(1) &= g\big(f(1)\big) = g(7) = 8,\\
(g \circ f)(2) &= g\big(f(2)\big) = g(4) = 8,\\
(g \circ f)(3) &= g\big(f(3)\big) = g(6) = 9.
\end{aligned}$$

É possível fala na função composta $f \circ g$? $\Diamond$

A operação de composição de funções é associativa, no sentido de que se $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z, h\colon Z \to W$, então

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

uma vez que ambas têm domínio X e contradomínio W, e as imagens por cada uma delas em um elemento $x \in X$ é igual a $h\big(g\big(f(x)\big)\big)$.

Mas a operação de composição *não é comutativa*. Isso quer dizer que se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$, então as composições $g \circ f$ e $f \circ g$ estão ambas definidas, mas, em geral, $g \circ f \neq f \circ g$. Isso é claro quando $X \neq Y$. Mas, mesmo quando $X = Y$, $g \circ f$ e $f \circ g$ não costumam coincidir.

Exemplo C.2.2. Considere a função $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, dada por

$$f(1) = 2, \qquad f(2) = 3, \qquad f(3) = 1,$$

e a função $g\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, dada por

$$g(1) = 1, \qquad g(2) = 3, \qquad g(3) = 2.$$

Então, $g \circ f$ e $f \circ g$ estão, ambas, definidas, têm domínios e contradomínios coincidentes, mas, como, por exemplo,

$$(g \circ f)(1) = 3 \neq 2 = (f \circ g)(1),$$

temos $g \circ f \neq f \circ g$. $\Diamond$

Dado um conjunto X, chamamos de *função identidade* do conjunto X a função $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ definida por $\mathrm{id}_X(x) = x$, para todo $x \in X$. Claramente, id_X é uma função bijetora.

As funções identidade funcionam como "elementos neutros" para a composição: se X e Y são conjuntos e $f\colon X \to Y$ é uma função, então

$$f \circ \mathrm{id}_X = f \qquad \text{e} \qquad \mathrm{id}_Y \circ f = f.$$

Exercício. Sejam X, Y, Z conjuntos e sejam $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ funções. Demonstre as implicações abaixo.

(i) Se f e g são injetoras, então $g \circ f$ é injetora.

(ii) Se f e g são sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora.

(iii) Se $g \circ f$ é injetora, então f é injetora.

(iv) Se $g \circ f$ é sobrejetora, então g é sobrejetora.

Funções bijetoras são *inversíveis* no sentido de que se $f\colon X \to Y$ é uma função bijetora, então existe uma função $g\colon Y \to X$ que "desfaz o que f faz", mais precisamente

Proposição C.2.3. *Sejam X e Y conjuntos e seja $f\colon X \to Y$ uma função bijetora. Então, existe uma única função $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*

Essa função g é chamada de *função inversa* da função f e é comumente denotada por f^{-1}.

Demonstração. A fim de definir $g\colon Y \to X$, para cada $y \in Y$ é preciso definir o elemento de X dado por $g(y)$. Como f é sobrejetora, existe um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. De fato, só temos uma escolha para tal x, pois se $x' \in X$ também satisfaz $f(x') = y$, então $x = x'$, uma vez que f é, também, injetora. Com este elemento x em mãos, definimos $g(y) = x$.

Tendo a função g já definida, verifiquemos que ela satisfaz as condições desejadas.

Para cada $x \in X$, temos $f(x) \in Y$ e, segundo a definição de g, $g\big(f(x)\big) = x'$, em que $x' \in X$ é tal que $f(x') = f(x)$. Mas, como f é injetora, $x' = x$. Portanto, para todo $x \in X$, temos $g\big(f(x)\big) = x$. Logo, $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Para a outra composta, tome $y \in Y$. Então $g(y) = x$, em que $x \in X$ é tal que $f(x) = y$. Portanto, $f\big(g(y)\big) = f(x) = y$. Isso prova que $f \circ g = \mathrm{id}_X$.

Finalmente, mostremos a unicidade de g. Seja $h\colon Y \to X$ tal que $h \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ h = \mathrm{id}_Y$. Então,

$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h,$$

o que prova que g é a única função que satisfaz ambas as condições. □

Em resumo, foi mostrado que se $f\colon X \to Y$ é uma função bijetora, então existe a função inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ de f, e essa função satisfaz a seguinte condição: para todos $x \in X$ e $y \in Y$, temos

$$f(x) = y \quad \text{se, e somente se,} \quad f^{-1}(y) = x.$$

Exercícios. Sejam X, Y, Z conjuntos e sejam $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ funções. Demonstre as implicações abaixo.

(i) Se f é bijetora, então a função inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ também é bijetora e $(f^{-1})^{-1} = f$.

(ii) Se f e g são bijetoras, então a função composta $g \circ f\colon X \to Z$ também é bijetora e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Terminamos observando que a Proposição C.2.3 tem uma recíproca:

Proposição C.2.4. *Sejam X e Y conjuntos e seja $f\colon X \to Y$ uma função. Se existem funções $g, h\colon Y \to X$ tais que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ h = \mathrm{id}_Y$, então f é bijetora e $f^{-1} = g = h$.*

Demonstração. Como $g \circ f = \mathrm{id}_X$, segue que f é injetora (pois id_X é injetora). Como $f \circ h = \mathrm{id}_Y$, segue que f é sobrejetora (pois id_Y é sobrejetora). Logo, f é bijetora. Além disso,

$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h.$$

Finalmente, pela unicidade da inversa, $f^{-1} = g$. $\square$

Apêndice D

Polinômios e suas raízes (reais e complexas)

Este apêndice contém alguns resultados a respeito de raízes e fatorações de polinômios comumente cobertos nos cursos de matemática no Ensino Médio, além de alguns fatos conhecidos sobre números complexos.

Na última seção, usam-se informações das seções anteriores para se demonstrar que matrizes reais simétricas só tem autovalores reais.

D.1 Polinômios com coeficientes reais

Todos os polinômios de que trataremos nesta seção terão coeficientes reais, isto é, serão funções f da forma

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Dado um polinômio $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, se $a_n \neq 0$, dizemos que f tem grau n e chamamos a_n de *coeficiente líder* de f. Se f é um polinômio de grau n, escreveremos $\operatorname{gr}(f) = n$. Por convenção, não se define o grau do polinômio nulo.

Lembre que o produto entre dois polinômios é, novamente, um polinômio que é obtido por distributividade, utilizando as identidades

$$t^n t^m = t^{m+n} \qquad \text{e} \qquad at = ta, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo, se p, q são os polinômios dados por

$$p(t) = 1 + 2t + 3t^2 \quad \text{e} \quad q(t) = -t + 5t^3,$$

então, para encontrar o produto pq, fazemos

$$\begin{aligned} p(t)q(t) &= (1+2t+3t^2)(-t+5t^3) \\ &= 1(-t+5t^3)+2t(-t+5t^3)+3t^2(-t+5t^3) \\ &= -t+5t^3-2t^2+10t^4-3t^3+15t^5 \\ &= -t-2t^2+2t^3+10t^4+15t^5, \end{aligned}$$

que tem coeficiente líder 15 e grau 5.

Assim, se f e g são polinômios não nulos, o coeficiente líder do produto fg será igual aos produtos dos coeficientes líderes de f e de g. Em particular, $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f)\,\mathrm{gr}(g)$.

Se $f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$ é um polinômio e $\beta \in \mathbb{R}$, será denotado por $f(\beta)$ o número real obtido pela substituição por β da variável t na expressão de $f(t)$:

$$f(\beta) = a_0 + a_1\beta + \cdots + a_n\beta^n.$$

É fácil ver que se f, g, h, p são polinômios tais que

$$h = fg \quad \text{e} \quad p = f + g,$$

então

$$h(\beta) = f(\beta)g(\beta) \quad \text{e} \quad p(\beta) = f(\beta) + g(\beta),$$

para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

Dados dois polinômios f, g, dizemos que f é *divisível* por g se existir um polinômio h tal que $f = gh$. Um caso particular de divisibilidade entre polinômios é o seguinte.

Lema D.1.1. *Seja $\beta \in \mathbb{R}$. Então, para todo inteiro positivo n, o polinômio $t^n - \beta^n$ é divisível por $t - \beta$.*

Demonstração. Segue da identidade

$$t^n - \beta^n = (t-\beta)(t^{n-1} + \beta t^{n-2} + \beta^2 t^{n-3} + \cdots + \beta^{n-2}t + \beta^{n-1}),$$

que pode ser verificada efetuando-se o produto. □

Dado um polinômio f, dizemos que um número real β é *raiz* de f se $f(\beta) = 0$.

Proposição D.1.2. *Seja f um polinômio de grau maior do que zero e seja $\beta \in \mathbb{R}$. Então, β é raiz de f se, e somente se, f for divisível por $t - \beta$.*

Demonstração. Se f é divisível por $t - \beta$, então existe um polinômio g tal que $f(t) = g(t)(t - \beta)$. Assim, $f(\beta) = g(\beta)(\beta - \beta) = g(\beta)0 = 0$. Logo, β é raiz de f.

Para a recíproca, observe que $t - \beta$ divide $f(t) - f(\beta)$, uma vez que se $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, então

$$f(t) - f(\beta) = a_1(t - \beta) + a_2(t^2 - \beta^2) + \cdots + a_n(t^n - \beta^n).$$

Pelo Lema D.1.1, cada um dos termos no lado direito da igualdade é divisível por $t - \beta$, o que faz a soma ser divisível por $t - \beta$. Em particular, se $f(\beta) = 0$, então f é divisível por $t - \beta$. $\square$

Assim, uma vez encontrada uma raiz β de um polinômio f, a busca pelas demais raízes (se existirem) se reduz à busca das raízes de um polinômio g que, por satisfazer $f(t) = (t - \beta)g(t)$, tem grau menor do que o de f (precisamente, $\mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(f) - 1$). Iterando esse processo, no caso em que cada um dos quocientes tiver pelo menos uma raiz, obtém-se uma fatoração completa de f como um produto de polinômios de grau 1:

$$f(t) = a(t - \beta_1)^{r_1}(t - \beta_2)^{r_2} \ldots (t - \beta_k)^{r_k},$$

em que $a \in \mathbb{R}$ e $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ são as raízes distintas de f.

Para cada $i = 1, \ldots, k$, o expoente r_i é chamado multiplicidade de β_i como raiz de f. Mais geralmente, mesmo que f não se fatore completamente como produto de fatores de grau 1, se β é uma raiz de f, dizemos que β tem multiplicidade r se $(t - \beta)^r$ divide f, mas $(t - \beta)^{r+1}$ não divide f.

A tarefa de encontrar as raízes (se existirem) de um polinômio é difícil, mas há alguns testes que podem ser realizados em alguns casos. Por exemplo, 0 é raiz de um polinômio f se, e somente se, o coeficiente do termo de grau 0 em f for igual a 0. Para polinômios com coeficientes inteiros, quando isso não ocorre, há ainda um teste útil para as possíveis raízes racionais.

Proposição D.1.3. *Seja $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ um polinômio de grau maior ou igual a 1 cujos coeficientes são todos números inteiros, com $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$. Se $\beta = \frac{r}{s}$ é uma raiz racional de f, com r e s inteiros relativamente primos, então r divide a_0 e s divide a_n.*

Demonstração. Como $\beta = \frac{r}{s}$ é raiz de f, temos

$$a_0 + a_1 \frac{r}{s} + a_2 \frac{r^2}{s^2} + \cdots + a_n \frac{r^n}{s^n} = f(\beta) = 0.$$

Multiplicando essa igualdade, em ambos os lados, por s^n, obtemos

$$a_0 s^n + a_1 r s^{n-1} + a_2 r^2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} s + a_n r^n = 0. \tag{D.1}$$

Assim, $a_0 s^n = r(-a_1 s^{n-1} - a_2 r s^{n-2} - \cdots - a_{n-1} r^{n-2} s - a_n r^{n-1})$. Portanto, r divide o inteiro $a_0 s^n$. Como r e s são primos entre si, segue que r divide a_0. De (D.1) também obtemos $a_n r^n = s(-a_0 s^{n-1} - a_1 r s^{n-2} - \cdots - a_{n-1} r^{n-1})$, donde, usando novamente que r e s são primos entre si, segue que s divide a_n. $\square$

Essa proposição permite a seguinte estratégia: se $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ é um polinômio com coeficientes inteiros, com $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$, e f tiver uma raiz racional β, então

$$\beta \in \left\{ \frac{r}{s} \mid r \text{ é divisor de } a_0 \text{ e } s \text{ é divisor de } a_n \right\},$$

um conjunto finito que pode ser inspecionado por substituição de cada um de seus elementos em f.

Exemplo D.1.4. Encontre as raízes de $f(t) = 3t^3 + 4t^2 - 6t - 8$.

Solução. Os divisores inteiros de -8 são $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ e os de 3 são $\pm 1, \pm 3$. Assim, se f tiver raízes racionais, elas estarão no conjunto

$$\left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3} \right\}.$$

Verificando cada um desses dezesseis valores, encontramos $f(-\frac{4}{3}) = 0$. Logo, $t + \frac{4}{3}$ divide f e obtemos a fatoração $f(t) = 3(t + \frac{4}{3})(t^2 - 2)$. Como as raízes de $t^2 - 2$ são $\pm\sqrt{2}$, obtemos

$$f(t) = 3\left(t + \frac{4}{3}\right)\left(t - \sqrt{2}\right)\left(t + \sqrt{2}\right),$$

uma fatoração completa de f como produto de fatores de grau 1. $\Diamond$

D.2 Polinômios com coeficientes complexos

Nosso objetivo, nesta seção, será apresentar o Teorema Fundamental da Álgebra. Para tanto, iniciamos com uma recordação breve do conceito de número complexo e algumas de suas características.

Um *número complexo* é uma expressão da forma $a + b\boldsymbol{i}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{i}$ um símbolo, apenas. Dois números complexos $a + b\boldsymbol{i}$ e $a' + b'\boldsymbol{i}$, com $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, são iguais, por definição, se $a = a'$ e $b = b'$. O conjunto de todos os números complexos será denotado por $\mathbb{C}$.

Definem-se operações de soma e multiplicação entre números complexos por

$$(a + b\boldsymbol{i}) + (a' + b'\boldsymbol{i}) = (a + a') + (b + b')\boldsymbol{i}$$

e

$$(a + b\boldsymbol{i})(a' + b'\boldsymbol{i}) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)\boldsymbol{i},$$

com $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$.[1]

[1]Um modo um pouco mais formal de definir o conjunto dos números complexos é dizer que ele coincide com o conjunto $\mathbb{R}^2$, dos pares de números reais, isto é, considerar a identificação do número complexo $a + b\boldsymbol{i}$ com o par de números reais (a, b). Por meio desta identificação, obtemos que $\mathbb{C}$ nada mais é do que o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ no qual está definido

O número complexo $0 + 0\boldsymbol{i}$ será denotado por $0_\mathbb{C}$, e o número complexo $1 + 0\boldsymbol{i}$, por $1_\mathbb{C}$.

Dado um número complexo $z = a + b\boldsymbol{i}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, o *oposto* de z é definido (e denotado) por $-z = (-a) + (-b)\boldsymbol{i}$, e se $z \neq 0_\mathbb{C}$, o *inverso* de z é definido (e denotado) por $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)\boldsymbol{i}$.

Dotado das operações definidas acima, $\mathbb{C}$ é o que se chama, em álgebra, de um *corpo*, ou seja, as operações satisfazem as seguintes condições:

(1) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, para todos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;

(2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

(3) $z + 0_\mathbb{C} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$;

(4) $z + (-z) = 0_\mathbb{C}$;

(5) $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$, para todos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;

(6) $z_1z_2 = z_2z_1$, para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

(7) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$, para todos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;

(8) $z1_\mathbb{C} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$;

(9) se $z \neq 0_\mathbb{C}$, então $zz^{-1} = 1_\mathbb{C}$.

Para se convencer da validade de cada uma das condições acima, o leitor deve procurar demonstrá-las.

Dado um número complexo $z = a + b\boldsymbol{i}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, define-se o *conjugado* de z como sendo o número complexo $\bar{z} = a - b\boldsymbol{i}$. Note que $z\bar{z} = a^2 + b^2$ é um número real não negativo. Define-se o *módulo* (ou o *valor absoluto*, ou, ainda, a *norma*) do número complexo $z = a + b\boldsymbol{i}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, por

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Existe uma função

$$\begin{aligned} \iota\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto a + 0\boldsymbol{i} \end{aligned}$$

que é obviamente injetora e que "respeita" as operações, no sentido de que

$$\iota(a + a') = (a + a') + 0\boldsymbol{i} = (a + 0\boldsymbol{i}) + (a' + 0\boldsymbol{i}) = \iota(a) + \iota(a')$$

e

$$\iota(aa') = (aa') + 0\boldsymbol{i} = (a + 0\boldsymbol{i})(a' + 0\boldsymbol{i}) = \iota(a)\iota(a'),$$

para todos $a, a' \in \mathbb{R}$. Se identificarmos cada número real a com sua imagem $\iota(a)$ em $\mathbb{C}$, podemos considerar $\mathbb{R}$ como um subconjunto de $\mathbb{C}$, de modo que as operações em $\mathbb{C}$ estendem as operações em $\mathbb{R}$. Por meio desta

---

uma multiplicação dada por $(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$. Observe que, por meio desta abordagem, o símbolo $\boldsymbol{i}$ fica identificado com o vetor $(0, 1)$.

identificação, temos $0_{\mathbb{C}} = 0$, $1_{\mathbb{C}} = 1$ e $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Além disso, se $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$, então $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$. Por exemplo, como $|\boldsymbol{i}|^2 = 1$, segue $\boldsymbol{i}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{i}|^2}\overline{\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{i}$.

Também imitaremos a notação usualmente utilizada para números reais e escreveremos $\frac{z}{w}$ para denotar o número complexo zw^{-1}, em que $z, w \in \mathbb{C}$ e $w \neq 0$.

Se $z = a + b\boldsymbol{i}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é um número complexo, a é chamada *parte real* de z e b, *parte imaginária* de z. Utilizaremos as seguintes notações: $\operatorname{Re}(z) = a$ e $\operatorname{Imag}(z) = b$.

Algumas das propriedades das operações, da conjugação e da norma estão listadas na proposição a seguir, cuja demonstração fica a cargo do leitor.

Proposição D.2.1. *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Valem:*

(i) $\overline{\overline{z}} = z$;

(ii) $\overline{z} = z$ *se, e somente se,* $z \in \mathbb{R}$;

(iii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *e* $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;

(iv) $\overline{-z} = -\overline{z}$ *e* $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$, *se* $z \neq 0$;

(v) $z\overline{z} = |z|^2$;

(vi) $|zw| = |z||w|$;

(vii) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ *e* $\operatorname{Imag}(z) = \frac{1}{2\boldsymbol{i}}(z - \overline{z})$;

(viii) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

A teoria de polinômios pode ser reproduzida para dar conta de polinômios cujos coeficientes são números complexos, isto é, polinômios da forma

$$f(t) = z_0 + z_1 t + z_2 t^2 + \cdots + z_n t^n,$$

em que $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Um número complexo w é uma raiz de f se $f(w) = 0$. Continua válida a Proposição D.1.2: w é raiz de f se, e somente se, f for divisível por $t - w$.

Uma observação relevante a respeito de raízes complexas de um polinômio com coeficientes reais é a seguinte

Proposição D.2.2. *Seja f um polinômio com coeficientes reais. Se $w \in \mathbb{C}$ é raiz de f, então $\overline{w}$ também é raiz de f.*

Demonstração. Suponha que

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Então, $a_0 + a_1 w + \cdots + a_n w^n = f(w) = 0$. Conjugando, e utilizando a Proposição D.2.1, sempre que preciso, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \overline{0} &= \overline{a_0 + a_1 w + \cdots + a w^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{w} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{w}^n \\ &= a_0 + a_1 \overline{w} + \cdots + a_n \overline{w}^n = f(\overline{w}), \end{aligned}$$

já que, para cada $i = 0, \ldots n$, sendo a_i um número real, vale $\overline{a_i} = a_i$. Logo, $\overline{w}$ é raiz de f. □

Costumamos dizer que as raízes complexas de um polinômio com coeficientes reais vêm "aos pares", cada raiz acompanhada de sua conjugada.

Todo polinômio com coeficientes reais tem raízes complexas. Na verdade, vale mais: todo polinômio com coeficientes complexos tem raízes complexas. Esse é o conteúdo do próximo resultado, comumente chamado *Teorema Fundamental da Álgebra*.

Teorema D.2.3. *Todo polinômio de grau maior ou igual a* 1 *com coeficientes complexos tem, pelo menos, uma raiz complexa.*

A demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra foge ao escopo destas notas, mas pode ser encontrada em livros de graduação de Análise Complexa.

Uma consequência desse resultado é a seguinte.

Corolário D.2.4. *Se f é um polinômio de grau n, maior ou igual a* 1*, com coeficientes complexos, então existem $z, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$, não necessariamente distintos, tais que $f(t) = z(t - w_1)(t - w_2)\ldots(t - w_n)$.*

Demonstração. Pelo Teorema D.2.3, f tem uma raiz $w_1 \in \mathbb{C}$, o que implica que $t - w_1$ divide f. Assim, existe um polinômio g com coeficientes complexos tal que

$$f(t) = (t - w_1)g(t).$$

Note que $\operatorname{gr}(g) = \operatorname{gr}(f) - 1 = n - 1$.

Se $\operatorname{gr}(g) \neq 0$, então, o Teorema D.2.3 aplicado ao polinômio g garante a existência de uma raiz $w_2 \in \mathbb{C}$ dele. Portanto, existe um polinômio h (de grau $n - 2$) tal que $g(t) = (t - w_2)h(t)$. Isso implica

$$f(t) = (t - w_1)g(t) = (t - w_1)(t - w_2)h(t).$$

Repetindo esse processo, chegaremos a uma fatoração da forma

$$f(t) = (t - w_1)(t - w_2)\ldots(t - w_n)p(t),$$

com $\operatorname{gr}(p) = 0$, isto é, $p(t) = z$, para algum $z \in \mathbb{C}$. □

D.3 Autovalores de matrizes simétricas

Nosso objetivo, nesta seção, será demonstrar que os autovalores de uma matriz real simétrica são números reais.

Aqui, faremos uso da notação $\overline{P}$ para denotar a matriz conjugada da matriz complexa $P = (\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, isto é, $\overline{P} = (\overline{\alpha_{ij}}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Fica claro que $\overline{\overline{P}} = P$ e que $\overline{P}^{\mathrm{t}} = \overline{P^{\mathrm{t}}}$. Ainda, $\overline{P} = P$ se, e somente se, $P \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, isto é, as entradas de P são todas reais. Finalmente, se o produto PQ está definido, então é fácil ver que $\overline{PQ} = \overline{P}\,\overline{Q}$.

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica cujas entradas são números reais e seja $\xi \in \mathbb{C}$ um autovalor complexo de A, isto é, ξ é um escalar complexo que satisfaz $Av = \xi v$ para algum vetor $v \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ não nulo. Consideremos a matriz 1×1 dada por $z = \overline{v}^{\mathrm{t}} Av$. Temos, por um lado,

$$z = \overline{v}^{\mathrm{t}} Av = \overline{v}^{\mathrm{t}} \xi v = \xi \overline{v}^{\mathrm{t}} v.$$

Ou seja, $z = \xi x$, em que $x = \overline{v}^{\mathrm{t}} v$ é uma matriz 1×1 cuja única entrada é número real não nulo, pois é a soma dos quadrados das normas das entradas de v, que é não nulo. Por outro lado, como z é uma matriz 1×1, vale

$$\overline{z} = \overline{z}^{\mathrm{t}} = \overline{\overline{v}^{\mathrm{t}} Av}^{\mathrm{t}} = \overline{v}^{\mathrm{t}} \overline{A}^{\mathrm{t}} \overline{\overline{v}}^{\mathrm{t}} = \overline{v}^{\mathrm{t}} Av = z,$$

pois, por hipótese, $\overline{A}^{\mathrm{t}} = A$, já que A é simétrica e tem entradas reais. Identificando matrizes 1×1 com sua única entrada, isso quer dizer que o número complexo $z = \xi x$ coincide com seu conjugado; logo, é real. Como x é um real não nulo, segue que $\xi = zx^{-1}$ é real.

Da discussão do parágrafo anterior, conclui-se que todo autovalor complexo de uma matriz real simétrica A é um número real. Juntando este fato com o fato de que A sempre tem pelo menos um autovalor complexo — já que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (Teorema D.2.3), p_A tem pelo menos uma raiz complexa —, segue que A tem pelo menos um autovalor real. (Na realidade, obtivemos mais: *todos* os autovalores de qualquer matriz real simétrica são reais.)

Referências Bibliográficas

[1] H. Anton e C. Rorres, *Álgebra Linear com Aplicações*, 10a. ed., Bookmam, Porto Alegre, 2012.

[2] M. Barone Júnior, *Álgebra Linear*, 3a. ed., IME-USP, São Paulo, 1988.

[3] P. Boulos e I. Camargo, *Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial*, 2a. ed., Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2003.

[4] W. E. Boyce e R. C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 9a. ed., LTC, Rio de Janeiro, 2010.

[5] C. A. Callioli, H. H. Domingues e R. C. F. Costa, *Álgebra Linear e Aplicações*, 6a. ed., Atual Editora, São Paulo, 1998.

[6] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, 2nd Ed., Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1971.

[7] W. K. Nicholson, *Álgebra Linear*, 2a. ed., McGraw-Hill, São Paulo, 2006.

Índice Remissivo