MAT3458 – ÁLGEBRA LINEAR II
3ª Lista de Exercícios – 2º semestre de 2021

1. No $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual, considere o subespaço $W = \big[(1,1,0,0,),(0,1,-1,1)\big]$.
   (i) Determine bases ortonomais B e B' para W e $W^{\perp}$, respectivamente.
   (ii) Sendo $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear dado por $T(v) = \operatorname{proj}_W v$, determine a matriz de T em relação à base $B \cup B'$.
   (iii) Quais são os autovalores de T? É T diagonalizável?

2. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z) = (x-2y, -2x+y, -z)$, para todos $x,y,z \in \mathbb{R}$. Está correto afirmar que

   (a) T é simétrico.
   (b) o polinômino característico de T possui uma única raiz real.
   (c) T não é injetor.
   (d) T possui três autovalores distintos.
   (e) T possui dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 tais que $\dim\big(V(\lambda_1)\big) = 1$ e $\dim\big(V(\lambda_2)\big) = 1$.

3. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno canônico. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, em que $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Considere as seguintes afirmações:
   (I) T não é simétrico, mas é diagonalizável.
   (II) T é simétrico.
   (III) T não é diagonalizável.

   Está correto o que se afirma em

   (a) (I) e (III), apenas.
   (b) (II), apenas.
   (c) (II) e (III), apenas.
   (d) (I), (II) e (III).
   (e) (I), apenas.

4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Seja W um subespaço de V e seja $T\colon V \to V$ o operador linear de V definido por $T(v) = \operatorname{proj}_W v$, para todo $v \in V$.
   (i) Prove que $T^2 = T$.
   (ii) Prove que $\operatorname{Ker}(T) = W^{\perp}$ e $\operatorname{Im}(T) = W$.
   (iii) Prove que existe uma base ortonormal B de V tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$,

   onde o número de 1's na diagonal é igual à dimensão de W.

   (iv) Prove que T é um operador simétrico.

5. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e sejam $w_1, w_2 \in V$ vetores não nulos. Defina $T\colon V \to V$ por $T(v) = \langle v, w_1\rangle\, w_2$, para todo $v \in V$. Prove que T é um operador simétrico se, e somente se, w_1 e w_2 são linearmente dependentes. (*Sugestão:* Para uma das implicações, use a desigualdade de Cauchy-Schwarz.)

6. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno canônico e a base $\mathcal{B} = \{(-1,1),(1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Considere as seguintes afirmações sobre o operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:

   (I) T é simétrico.

   (II) T não é diagonalizável.

   (III) T é diagonalizável, mas não é simétrico.

   Assinale a alternativa correta.

   (a) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
   (b) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
   (c) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
   (d) Nenhuma das afirmações é verdadeira.
   (e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

7. Suponha que $\mathbb{R}^2$ esteja munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e que a base $\mathcal{B} = \{(1,-1),(1,-2)\}$ seja ortonormal em relação a $\langle\ ,\ \rangle$. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica é $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, e seja $\mathcal{C}$ a base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{C} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{5}{\sqrt{5}}\right)\right\}$. Em relação ao produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, pode-se afirmar corretamente que

   (a) T não é simétrico, $\mathcal{C}$ não é ortonormal e $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal.
   (b) T não é simétrico, $\mathcal{C}$ é ortonormal e $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal.
   (c) T é simétrico, $\mathcal{C}$ é ortonormal e $[T]_{\mathcal{C}}$ não é diagonal.
   (d) T é simétrico, $\mathcal{C}$ é ortonormal e $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal.
   (e) T é simétrico, $\mathcal{C}$ não é ortonormal e $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal.

8. Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual, e seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear satisfazendo as seguintes condições:

   - os únicos valores próprios de T são 2 e -2;
   - T é simétrico;
   - $V(2) = \big[(0,1,1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,1)\big]$.

   Então, $T(3,-2,2,3)$ é igual a

   (a) $(6,4,4,6)$
   (b) $(-4,6,6,-4)$
   (c) $(6,4,-4,6)$
   (d) $(-6,-4,4,6)$
   (e) $(4,6,6,4)$

9. No $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual, seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear que satisfaz

$$[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

   onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^4$.

(i) Mostre que T é diagonalizável.

(ii) Ache uma base ortonormal B de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_B$ seja diagonal.

(iii) Ache uma matriz real invertível M tal que $M^{-1}[T]_{\mathsf{can}}M$ seja diagonal.

10. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definda por

$$T(x,y,z) = (4x+2y+2z, 6x+2z, 12x+4y+2z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Ache uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

(ii) Considerando $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, mostre que não existe uma base ortogonal formada por autovetores de T. (Se ortogonalizarmos a base encontrada em (i) não obteremos uma base formada por autovetores de T. Por quê?)

11. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cujos valores próprios são $2, -3$ e 0 e tal que $V(-3) = \big[(1,1,1)\big]$ e $V(2) = \big[(1,0-1)\big]$. Sabendo que $M^{\mathrm{t}}[T]_{\mathsf{can}}M$ é diagonal, onde can indica a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

responda ao que se pede.

(i) Encontre a expressão de $T(x,y,z)$.

(ii) É T inversível? Justifique.

(iii) É $v = (1,-2,1)$ um vetor próprio de T? Justifique.

12. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x,y,z) = (x-2y, -2x+y, -z),$$

para todo $(x,y,x) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Verifique que T é simétrico.

(ii) Determine uma matriz M tal que $M^{\mathrm{t}}[T]_{\mathsf{can}}M$ seja diagonal.

13. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, $T\colon U \to U$ um operador linear e u e v autovetores de T associados respectivamente a autovalores distintos λ e μ. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\dim U = 3$ e $\dim V(\lambda) = 2$, então T é diagonalizível.

(II) Se T é simétrico, então $V(\lambda) = V(\mu)^{\perp}$.

(III) Se $\langle u, v\rangle = 0$, então T é simétrico.

Está correto o que se afirma em

(a) (II) e (III), apenas.

(b) (I), (II) e (III).

(c) (I) e (III), apenas.

(d) (I) e (II), apenas.

(e) (I), apenas.

14. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, encontre uma base ortonormal formada por autovetores do operador simétrico T cuja matriz em relação à base canônica é

(i) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

15. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico cujos autovalores são -2 e 3. Sabendo que $\operatorname{Ker}(T+2I) = \big[(1,1,1),(-1,0,1)\big]$, encontre $[T]_{\mathsf{can}}$, onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

16. Considere as seguintes afirmações sobre um operador linear T em um espaço vetorial V de dimensão finita com produto interno:
    (I) Se existe uma base ortogonal de V formada por autovetores de T, então T é simétrico.
    (II) Se T é simétrico e $u, v \in V$ são autovetores de T associados a um autovalor λ, então u é ortogonal a v.
    (III) T é simétrico se, e somente se, T é diagonalizável.

    Está correto apenas o que se afirma em

    (a) (I) e (III).
    (b) (III).
    (c) (I) e (II).
    (d) (I).
    (e) (II).

17. Sejam E um espaço vetorial com produto interno e $T\colon E \to E$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:
    (I) Se B é uma base ortogonal de E, então a matriz $[T]_B$ é simétrica.
    (II) Se λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de T e A_1 e A_2 são conjuntos ortogonais de vetores de E tais que $A_1 \subset \operatorname{Ker}(T-\lambda_1 I)$ e $A_2 \subset \operatorname{Ker}(T-\lambda_2 I)$, então a união $A_1 \cup A_2$ é um conjunto ortogonal.
    (III) Se B é uma base de E tal que a matriz $[T]_B$ é diagonal, então B é ortonormal.

    Assinale a alternativa correta.

    (a) Todas as afirmações são verdadeiras.
    (b) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
    (c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
    (d) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
    (e) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

18. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e sejam $T\colon V \to V$ e $S\colon V \to V$ operadores lineares. Considere as seguintes afirmações:
    (I) Se T e S são operadores simétricos, então o operador $T+S$ é diagonalizável.
    (II) Se T é um operador simétrico invertível, então o operador T^{-1} também é simétrico.
    (III) T é invertível se, e somente se, 0_V não é um autovalor de T.

    Assinale a alternativa correta.

    (a) Apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.
    (b) Todas as afirmaçẽs são necessariamente verdadeiras.
    (c) Apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.
    (d) Apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.
    (e) Apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

19. A respeito das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

pode-se afirmar corretamente que

(a) apenas A e B são diagonalizáveis.
(b) apenas B e C são diagonalizáveis.
(c) apenas A e C são diagonalizáveis.
(d) as três são diagonalizáveis.
(e) nenhuma delas é diagonalizável.

20. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 3x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2,$$

para todos $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Se $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o operador linear simétrico (com respeito ao produto interno dado) cujo polinômio característico é $p(t) = (2-t)(t-1)^2$ e $T(1,1,0) = (2,2,0)$, então, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

(a) $T(x,y,z) = \left(\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, z\right)$.
(b) $T(x,y,z) = \left(\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y + z, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - z, z\right)$.
(c) $T(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, x - y + z\right)$.
(d) $T(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + z, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y - z, x - y + z\right)$.
(e) $T(x,y,z) = \left(\frac{7}{3}x - \frac{1}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, z\right)$.

21. Estabeleça uma correspondência entre as equações

(1) $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$	(2) $x^2 + y^2 + 1 = 0$	(3) $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$
(4) $x^2 - y^2 - 1 = 0$	(5) $x^2 + y^2 = 0$	(6) $x - y^2 = 0$
(7) $x^2 - y^2 = 0$	(8) $x^2 + y^2 - 1 = 0$	(9) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$

e as cônicas

(a) conjunto vazio	(b) um ponto	(c) uma reta
(d) duas retas paralelas	(e) duas retas concorrentes	(f) elipse
(g) hipérbole	(h) parábola	(i) circunferência

22. Reconheça as seguintes cônicas dadas pelas suas equações em relação a um sistema ortogonal de coordenadas.

(i) $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$
(ii) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
(iii) $x^2 + 4y^2 + 3\sqrt{3}xy - 1 = 0$
(iv) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

23. Reconheça as seguintes quádricas dadas pelas suas equações em relação a um sistema ortogonal de coordenadas.

(i) $2xy + z = 0$
(ii) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xy - 2xz + 2yz - x + y + z = 0$
(iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 1$
(iv) $11x^2 + 11y^2 + 14z^2 + 2xy + 8xz - 8yz - 12x + 12y + 12z = 6$

24. Fixado um sistema ortogonal de coordenadas no plano, considere as seguintes afirmações a respeito da equação

$$ax^2 - 2xy + ay^2 - 1 = 0,$$

em que a é um número real não nulo:

(I) Se $0 < a < 1$, então a equação define uma hipérbole.

(II) Se $a > 1$, então a equação define uma elipse.

(III) Se $a = 1$, então a equação define um par de retas paralelas.

Está correto o que se afirma em

(a) (I) e (II), apenas.

(b) (I), (II) e (III).

(c) (I) e (III), apenas.

(d) (II) e (III), apenas.

(e) (III), apenas.

25. Para os itens abaixo, considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas em E^3.

(i) Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância até a origem é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P ao eixo Oz. Que superfície é essa? Reconheça a curva dada pela interseção dessa superfície com o plano $y = 1$.

(ii) Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância ao ponto $Q = (0, -1, -2)$ é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P à reta $r : \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \end{cases}$. Determine uma equação reduzida dessa superfície. Que superfície é essa? Reconheça e encontre uma equação para a curva dada pela interseção dessa superfície com o plano $z = 0$.

(iii) Refaça o item anterior, considerando $Q = (0, -1, -1)$ e $r : \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$.

26. Seja dado $k \in \mathbb{R}$. A equação $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 10x + 4y + 12z = k$, nas incógnitas x, y, z, não tem solução se

(a) $k = -11$.

(b) $k = 0$.

(c) $k = 11$.

(d) $k = 22$.

(e) $k = -22$.

27. O objetivo deste exercício é encontrar uma função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f + f' = \operatorname{sen} x + e^x$.

(i) Seja $F = \{\cos x, \operatorname{sen} x, e^x\}$. Mostre que F é linearmente independente em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

(ii) Seja V o subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ gerado por F. Mostre que $T \colon V \to V$ definida por $T(f) = f + f'$ é linear.

(iii) Escreva a matriz A de T na base F e as coordenadas na base F da função g definida por $g(x) = \text{sen } x + e^x$.

(iv) Determine a matriz A^{-1}.

(v) Ache f em V tal que $f + f' = \text{sen } x + e^x$. Resolva a equação diferencial $y + y' = \text{sen } x + e^x$.

28. (M. Barone Jr, Álgebra Linear, p. 243) Consideremos dois tanques: o tanque A contem inicialmente 100 l de água e 15 kg de sal; o tanque B contem inicialmente 100 l de água e 5 kg de sal. Um mecanismo permite a vazão do tanque A para o tanque B e vice-versa; a velocidade de vazão é constante e igual a 5 l/min. Suponhamos que, em cada instante t, as soluções nos tanques A e B estejam perfeitamente homogeneizadas, a quantidade de sal no tanque A é $x(t)$ e no tanque B é $y(t)$.

(i) Mostre que $x(t)$ e $y(t)$ são soluções do sistema $\begin{cases} x' = -0,05x + 0,05y \\ y' = 0,05x - 0,05y \end{cases}$ satisfazendo $x(0) = 15$ e $y(0) = 5$. Determine a solução deste sistema.

(ii) Após quantos minutos haverá 13 kg de sal no tanque A?

29. Ache a solução geral do sistema $X'(t) = AX(t)$, nos casos abaixo.

$$\text{(i) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii) } A = \begin{bmatrix} -14 & 6 & 12 \\ -14 & 4 & 14 \\ -11 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

30. Ache a solução dos seguintes sistemas:

(i) $\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 11.$

(ii) $\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = -3, z(0) = -2.$

31. (M. Barone Jr, Álgebra Linear, p. 255) Consideremos o sistema *não-homogêneo*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{3}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{†}$$

(i) Determine uma solução particular do sistema (†) da forma $X_0(t) = (a, b)$, em que a e b são números reais.

(ii) Determine a solução geral $Z(t)$ do sistema *homogêneo associado*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{3}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(iii) Verifique que a solução geral do sistema (†) é dada por $X(t) = X_0(t) + Z(t)$.

(iv) Encontre a solução particular do sistema (†) que verifica as condições iniciais $x(0) = 37, y(0) = \frac{41}{3}$.

Respostas

2. (a)

3. (e)

6. (e)

7. (d)

8. (c)

9. (i) T é simétrico.

   (ii) $\left\{(1,0,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

   (iii) As respostas vão variar. Use (ii) para montar uma tal matriz M. Uma outra matriz é $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. (i) $\{(1,0,-3), (0,-1,1), (1,1,2)\}$

11. (i) $[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; (ii) Não; (iii) Sim

12. As respostas vão variar; uma possibilidade é $M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

13. (e)

14. (i) $\left\{\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

    (ii) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$

15. $[T]_{\mathsf{can}} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 & -10 & 5 \\ -10 & 8 & -10 \\ 5 & -10 & -7 \end{bmatrix}$

16. (d)

17. (b)

18. (b)

19. (c)

20. (a)

21. (1)-(f); (2)-(a); (3)-(d); (4)-(g); (5)-(b); (6)-(h); (7)-(e); (8)-(i); (9)-(c)

22. (i) elipse; (ii) parábola; (iii) hipérbole; (iv) duas retas concorrentes

23. (i) parabolóide hiperbólico; (ii) parabolóide hiperbólico; (iii) hiperbolóide de uma folha; (iv) elipsóide

24. (b)

25. (i) é um cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$. A curva é uma hipérbole de equação $z^2 - x^2 = 1$;

(ii) é um cone de equação $5x^2+3y^2-3z^2-8yz-10y-20z=25$ e equação reduzida $x''^2+y''^2-z''^2=0$. A curva é uma elipse de equação $15x^2+9(y-\frac{5}{3})^2=100$;

(iii) é um cone de quação $x^2-2yz-2z-2y=2$ e equação reduzida: $x''^2+y''^2-z''^2=0$. A curva é uma parábola de equação $x^2-2y=2$.

26. (e)

27. (iii) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $g=(0,1,1)_F$; (iv) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$; (v) $[f]_F=A^{-1}[g]_F$, logo $f=(-1/2,1/2,1/2)_F=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\text{sen }x+\frac{1}{2}e^x$. As soluções da equação diferencial são $y=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\text{sen }x+\frac{1}{2}e^x+Ke^{-x}, K\in\mathbb{R}$.

28. (i) $\begin{cases}x(t)=10+5e^{-0,1t}\\ y(t)=10-5e^{-0,1t}\end{cases}$; (ii) aproximadamente 5 minutos

29. (i) $X(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, com $\begin{cases}x(t)=C_1e^{-t}+C_3e^{5t}\\ y(t)=C_2e^{-t}+C_3e^{5t}\\ z(t)=-3C_1e^{-t}-C_2e^{-t}+2C_3e^{5t}\end{cases}$ $(C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R})$

(ii) $X(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, com $\begin{cases}x(t)=C_1e^{-2t}+C_3e^{4t}\\ y(t)=-2C_2e^{-3t}+C_3e^{4t}\\ z(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}+C_3e^{4t}\end{cases}$ $(C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R})$

30. (i) $\begin{cases}x(t)=14e^{t}-12e^{-2t}\\ y(t)=14e^{t}-3e^{-2t}\end{cases}$; (ii) $\begin{cases}x(t)=2e^{t}-e^{2t}\\ y(t)=-2e^{t}-e^{2t}\\ z(t)=-2e^{t}\end{cases}$

31. (i) $X_0(t)=\big(25,\frac{50}{3}\big)$; (ii) $Z(t)=C_1e^{-0,02t}(1,1)+C_2e^{-0,12t}(-3,2)$ $(C_1,C_2\in\mathbb{R})$;
(iv) $\begin{cases}x(t)=3e^{-0,02t}+9e^{-0,12t}+25\\ y(t)=3e^{-0,02t}-6e^{-0,12t}+\frac{50}{3}\end{cases}$