

MAT3458 – ÁLGEBRA LINEAR II
3ª Lista de Exercícios – 2º semestre de 2020

1. No \mathbb{R}^4 com o produto interno usual, considere o subespaço $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 1)]$.
 - (i) Determine bases ortonormais B e B' para W e W^\perp , respectivamente.
 - (ii) Sendo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ o operador linear dado por $T(v) = \text{proj}_W v$, determine a matriz de T em relação à base $B \cup B'$.
 - (iii) Quais são os autovalores de T ? É T diagonalizável?
2. Considere \mathbb{R}^3 munido do produto interno usual e seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x, y, z) = (x - 2y, -2x + y, -z)$, para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$. Está correto afirmar que
 - (a) T é simétrico.
 - (b) o polinômio característico de T possui uma única raiz real.
 - (c) T não é injetor.
 - (d) T possui três autovalores distintos.
 - (e) T possui dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 tais que $\dim(V(\lambda_1)) = 1$ e $\dim(V(\lambda_2)) = 1$.
3. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno canônico. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, em que $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$. Considere as seguintes afirmações:
 - (I) T não é simétrico, mas é diagonalizável.
 - (II) T é simétrico.
 - (III) T não é diagonalizável.
 Está correto o que se afirma em
 - (a) (I) e (III), apenas.
 - (b) (II), apenas.
 - (c) (II) e (III), apenas.
 - (d) (I), (II) e (III).
 - (e) (I), apenas.
4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Seja W um subespaço de V e seja $T: V \rightarrow V$ o operador linear de V definido por $T(v) = \text{proj}_W v$, para todo $v \in V$.
 - (i) Prove que $T^2 = T$.
 - (ii) Prove que $\text{Ker}(T) = W^\perp$ e $\text{Im}(T) = W$.

(iii) Prove que existe uma base ortonormal B de V tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$

onde o número de 1's na diagonal é igual à dimensão de W .

- (iv) Prove que T é um operador simétrico.

5. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam $w_1, w_2 \in V$ vetores não nulos. Defina $T: V \rightarrow V$ por $T(v) = \langle v, w_1 \rangle w_2$, para todo $v \in V$. Prove que T é um operador simétrico se, e somente se, w_1 e w_2 são linearmente dependentes. (*Sugestão:* Para uma das implicações, use a desigualdade de Cauchy-Schwarz.)
6. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^2 munido do seu produto interno canônico e a base $\mathcal{B} = \{(-1, 1), (1, 2)\}$ de \mathbb{R}^2 . Considere as seguintes afirmações sobre o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base \mathcal{B} é $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:
- (I) T é simétrico.
 (II) T não é diagonalizável.
 (III) T é diagonalizável, mas não é simétrico.
- Assinale a alternativa correta.
- (a) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
 (b) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
 (c) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
 (d) Nenhuma das afirmações é verdadeira.
 (e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
7. Suponha que \mathbb{R}^2 esteja munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e que a base $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, -2)\}$ seja ortonormal em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica é $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, e seja \mathcal{C} a base de \mathbb{R}^2 dada por $\mathcal{C} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{5}{\sqrt{5}} \right) \right\}$. Em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pode-se afirmar corretamente que
- (a) T não é simétrico, \mathcal{C} não é ortonormal e $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal.
 (b) T não é simétrico, \mathcal{C} é ortonormal e $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal.
 (c) T é simétrico, \mathcal{C} é ortonormal e $[T]_{\mathcal{C}}$ não é diagonal.
 (d) T é simétrico, \mathcal{C} é ortonormal e $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal.
 (e) T é simétrico, \mathcal{C} não é ortonormal e $[T]_{\mathcal{C}}$ é diagonal.
8. Considere \mathbb{R}^4 munido do produto interno usual, e seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um operador linear satisfazendo as seguintes condições:
- os únicos valores próprios de T são 2 e -2 ;
 - T é simétrico;
 - $V(2) = [(0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1)]$.

Então, $T(3, -2, 2, 3)$ é igual a

- (a) $(6, 4, 4, 6)$
 (b) $(-4, 6, 6, -4)$
 (c) $(6, 4, -4, 6)$
 (d) $(-6, -4, 4, 6)$
 (e) $(4, 6, 6, 4)$
9. No \mathbb{R}^4 com o produto interno usual, seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ o operador linear que satisfaz

$$[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

onde can denota a base canônica de \mathbb{R}^4 .

- (i) Mostre que T é diagonalizável.
- (ii) Ache uma base ortonormal B de \mathbb{R}^4 tal que $[T]_B$ seja diagonal.
- (iii) Ache uma matriz real invertível M tal que $M^{-1}[T]_{\text{can}}M$ seja diagonal.

10. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (4x + 2y + 2z, 6x + 2z, 12x + 4y + 2z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- (i) Ache uma base de \mathbb{R}^3 formada por autovetores de T .
 - (ii) Considerando \mathbb{R}^3 com o produto interno usual, mostre que não existe uma base ortogonal formada por autovetores de T . (Se ortogonalizarmos a base encontrada em (i) não obteremos uma base formada por autovetores de T . Por quê?)
11. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear cujos valores próprios são 2, -3 e 0 e tal que $V(-3) = [(1, 1, 1)]$ e $V(2) = [(1, 0, -1)]$. Sabendo que $M^t[T]_{\text{can}}M$ é diagonal, onde can indica a base canônica de \mathbb{R}^3 e

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

responda ao que se pede.

- (i) Encontre a expressão de $T(x, y, z)$.
 - (ii) É T inversível? Justifique.
 - (iii) É $v = (1, -2, 1)$ um vetor próprio de T ? Justifique.
12. No \mathbb{R}^3 com o produto interno usual, seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, -2x + y, -z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- (i) Verifique que T é simétrico.
 - (ii) Determine uma matriz M tal que $M^t[T]_{\text{can}}M$ seja diagonal.
13. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, $T: U \rightarrow U$ um operador linear e u e v autovetores de T associados respectivamente a autovalores distintos λ e μ . Considere as seguintes afirmações:
- (I) Se $\dim U = 3$ e $\dim V(\lambda) = 2$, então T é diagonalizável.
 - (II) Se T é simétrico, então $V(\lambda) = V(\mu)^\perp$.
 - (III) Se $\langle u, v \rangle = 0$, então T é simétrico.

Está correto o que se afirma em

- (a) (II) e (III), apenas.
 - (b) (I), (II) e (III).
 - (c) (I) e (III), apenas.
 - (d) (I) e (II), apenas.
 - (e) (I), apenas.
14. No \mathbb{R}^3 com o produto interno usual, encontre uma base ortonormal formada por autovetores do operador simétrico T cuja matriz em relação à base canônica é

$$(i) \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

15. No \mathbb{R}^3 com o produto interno usual, seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico cujos autovalores são -2 e 3 . Sabendo que $\text{Ker}(T + 2I) = [(1, 1, 1), (-1, 0, 1)]$, encontre $[T]_{\text{can}}$, onde can denota a base canônica de \mathbb{R}^3 .
16. Considere as seguintes afirmações sobre um operador linear T em um espaço vetorial V de dimensão finita com produto interno:
- (I) Se existe uma base ortogonal de V formada por autovetores de T , então T é simétrico.
 - (II) Se T é simétrico e $u, v \in V$ são autovetores de T associados a um autovalor λ , então u é ortogonal a v .
 - (III) T é simétrico se, e somente se, T é diagonalizável.

Está correto apenas o que se afirma em

- (a) (I) e (III).
 - (b) (III).
 - (c) (I) e (II).
 - (d) (I).
 - (e) (II).
17. Sejam E um espaço vetorial com produto interno e $T: E \rightarrow E$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:
- (I) Se B é uma base ortogonal de E , então a matriz $[T]_B$ é simétrica.
 - (II) Se λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de T e A_1 e A_2 são conjuntos ortogonais de vetores de E tais que $A_1 \subset \text{Ker}(T - \lambda_1 I)$ e $A_2 \subset \text{Ker}(T - \lambda_2 I)$, então a união $A_1 \cup A_2$ é um conjunto ortogonal.
 - (III) Se B é uma base de E tal que a matriz $[T]_B$ é diagonal, então B é ortonormal.

Assinale a alternativa correta.

- (a) Todas as afirmações são verdadeiras.
 - (b) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
 - (c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
 - (d) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
 - (e) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
18. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e sejam $T: V \rightarrow V$ e $S: V \rightarrow V$ operadores lineares. Considere as seguintes afirmações:
- (I) Se T e S são operadores simétricos, então o operador $T + S$ é diagonalizável.
 - (II) Se T é um operador simétrico invertível, então o operador T^{-1} também é simétrico.
 - (III) T é invertível se, e somente se, 0_V não é um autovalor de T .

Assinale a alternativa correta.

- (a) Apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras.
- (b) Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.
- (c) Apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.
- (d) Apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.
- (e) Apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

19. A respeito das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

pode-se afirmar corretamente que

- (a) apenas A e B são diagonalizáveis.
 - (b) apenas B e C são diagonalizáveis.
 - (c) apenas A e C são diagonalizáveis.
 - (d) as três são diagonalizáveis.
 - (e) nenhuma delas é diagonalizável.
20. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do produto interno

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 3x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2,$$

para todos $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é o operador linear simétrico (com respeito ao produto interno dado) cujo polinômio característico é $p(t) = (2-t)(t-1)^2$ e $T(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$, então, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

- (a) $T(x, y, z) = (\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, z)$.
 - (b) $T(x, y, z) = (\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y + z, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - z, z)$.
 - (c) $T(x, y, z) = (\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, x - y + z)$.
 - (d) $T(x, y, z) = (\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + z, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y - z, x - y + z)$.
 - (e) $T(x, y, z) = (\frac{7}{3}x - \frac{1}{3}y, \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y, z)$.
21. Estabeleça uma correspondência entre as equações

$$\begin{array}{lll} (1) x^2 + 2y^2 - 1 = 0 & (2) x^2 + y^2 + 1 = 0 & (3) x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0 \\ (4) x^2 - y^2 - 1 = 0 & (5) x^2 + y^2 = 0 & (6) x - y^2 = 0 \\ (7) x^2 - y^2 = 0 & (8) x^2 + y^2 - 1 = 0 & (9) x^2 + 2xy + y^2 = 0 \end{array}$$

e as cônicas

$$\begin{array}{lll} (a) \text{conjunto vazio} & (b) \text{um ponto} & (c) \text{uma reta} \\ (d) \text{duas retas paralelas} & (e) \text{duas retas concorrentes} & (f) \text{elipse} \\ (g) \text{hipérbole} & (h) \text{parábola} & (i) \text{circunferência} \end{array}$$

22. Reconheça as seguintes cônicas dadas pelas suas equações em relação a um sistema ortogonal de coordenadas.

$$\begin{array}{l} (i) 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0 \\ (ii) x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ (iii) x^2 + 4y^2 + 3\sqrt{3}xy - 1 = 0 \\ (iv) 7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0 \end{array}$$

23. Reconheça as seguintes quádricas dadas pelas suas equações em relação a um sistema ortogonal de coordenadas.

$$\begin{array}{l} (i) 2xy + z = 0 \\ (ii) x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xy - 2xz + 2yz - x + y + z = 0 \\ (iii) x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 1 \\ (iv) 11x^2 + 11y^2 + 14z^2 + 2xy + 8xz - 8yz - 12x + 12y + 12z = 6 \end{array}$$

24. Fixado um sistema ortogonal de coordenadas no plano, considere as seguintes afirmações a respeito da equação

$$ax^2 - 2xy + ay^2 - 1 = 0,$$

em que a é um número real não nulo:

- (I) Se $0 < a < 1$, então a equação define uma hipérbole.
- (II) Se $a > 1$, então a equação define uma elipse.
- (III) Se $a = 1$, então a equação define um par de retas paralelas.

Está correto o que se afirma em

- (a) (I) e (II), apenas.
 - (b) (I), (II) e (III).
 - (c) (I) e (III), apenas.
 - (d) (II) e (III), apenas.
 - (e) (III), apenas.
25. Para os itens abaixo, considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas em E^3 .
- (i) Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância até a origem é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P ao eixo Oz . Que superfície é essa? Reconheça a curva dada pela interseção dessa superfície com o plano $y = 1$.
 - (ii) Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância ao ponto $Q = (0, -1, -2)$ é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P à reta $r : \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \end{cases}$. Determine uma equação reduzida dessa superfície. Que superfície é essa? Reconheça e encontre uma equação para a curva dada pela interseção dessa superfície com o plano $z = 0$.
 - (iii) Refaça o item anterior, considerando $Q = (0, -1, -1)$ e $r : \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$.
26. Seja dado $k \in \mathbb{R}$. A equação $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 10x + 4y + 12z = k$, nas incógnitas x, y, z , não tem solução se
- (a) $k = -11$.
 - (b) $k = 0$.
 - (c) $k = 11$.
 - (d) $k = 22$.
 - (e) $k = -22$.
27. O objetivo deste exercício é encontrar uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f + f' = \sin x + e^x$.
- (i) Seja $F = \{\cos x, \sin x, e^x\}$. Mostre que F é linearmente independente em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
 - (ii) Seja V o subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ gerado por F . Mostre que $T: V \rightarrow V$ definida por $T(f) = f + f'$ é linear.
 - (iii) Escreva a matriz A de T na base F e as coordenadas na base F da função g definida por $g(x) = \sin x + e^x$.
 - (iv) Determine a matriz A^{-1} .
 - (v) Ache f em V tal que $f + f' = \sin x + e^x$. Resolva a equação diferencial $y + y' = \sin x + e^x$.
28. (M. Barone Jr, Álgebra Linear, p. 243) Consideremos dois tanques: o tanque A contém inicialmente 100 l de água e 15 kg de sal; o tanque B contém inicialmente 100 l de água e 5 kg de sal. Um mecanismo permite a vazão do tanque A para o tanque B e vice-versa; a velocidade de vazão é constante e igual a 5 l/min. Suponhamos que, em cada instante t , as soluções nos tanques A e B estejam perfeitamente homogeneizadas, a quantidade de sal no tanque A é $x(t)$ e no tanque B é $y(t)$.

- (i) Mostre que $x(t)$ e $y(t)$ são soluções do sistema $\begin{cases} x' = -0,05x + 0,05y \\ y' = 0,05x - 0,05y \end{cases}$ satisfazendo $x(0) = 15$ e $y(0) = 5$. Determine a solução deste sistema.

(ii) Após quantos minutos haverá 13 kg de sal no tanque A?

29. Ache a solução geral do sistema $X'(t) = AX(t)$, nos casos abaixo.

$$(i) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (ii) A = \begin{bmatrix} -14 & 6 & 12 \\ -14 & 4 & 14 \\ -11 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

30. Ache a solução dos seguintes sistemas:

$$(i) \begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -x + 2y \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 11.$$

$$(ii) \begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x - y + 3z \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = -3, z(0) = -2.$$

31. (M. Barone Jr, Álgebra Linear, p. 255) Consideremos o sistema *não-homogêneo*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{3}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\dagger)$$

- (i) Determine uma solução particular do sistema (\dagger) da forma $X_0(t) = (a, b)$, em que a e b são números reais.
- (ii) Determine a solução geral $Z(t)$ do sistema *homogêneo associado*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{3}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- (iii) Verifique que a solução geral do sistema (\dagger) é dada por $X(t) = X_0(t) + Z(t)$.
- (iv) Encontre a solução particular do sistema (\dagger) que verifica as condições iniciais $x(0) = 37, y(0) = \frac{41}{3}$.

Respostas

2. (a)
3. (e)
6. (e)
7. (d)
8. (c)
9. (i) T é simétrico.
 (ii) $\left\{ (1, 0, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$
 (iii) As respostas vão variar. Use (ii) para montar uma tal matriz M . Uma outra matriz é
- $$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
10. (i) $\{(1, 0, -3), (0, -1, 1), (1, 1, 2)\}$
11. (i) $[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; (ii) Não; (iii) Sim
12. As respostas vão variar; uma possibilidade é $M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
13. (e)
14. (i) $\left\{ \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$
 (ii) $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) \right\}$
15. $[T]_{\text{can}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -7 & -10 & 5 \\ -10 & 8 & -10 \\ 5 & -10 & -7 \end{bmatrix}$
16. (d)
17. (b)
18. (b)
19. (c)
20. (a)
21. (1)-(f); (2)-(a); (3)-(d); (4)-(g); (5)-(b); (6)-(h); (7)-(e); (8)-(i); (9)-(c)
22. (i) elipse; (ii) parábola; (iii) hipérbole; (iv) duas retas concorrentes
23. (i) parabolóide hiperbólico; (ii) parabolóide hiperbólico; (iii) hiperbolóide de uma folha; (iv) elipsóide
24. (b)
25. (i) é um cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$. A curva é uma hipérbole de equação $z^2 - x^2 = 1$;

- (ii) é um cone de equação $5x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz - 10y - 20z = 25$ e equação reduzida $x''^2 + y''^2 - z''^2 = 0$. A curva é uma elipse de equação $15x^2 + 9(y - \frac{5}{3})^2 = 100$;
- (iii) é um cone de equação $x^2 - 2yz - 2z - 2y = 2$ e equação reduzida: $x''^2 + y''^2 - z''^2 = 0$. A curva é uma parábola de equação $x^2 - 2y = 2$.

26. (e)

27. (iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $g = (0, 1, 1)_F$; (iv) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$; (v) $[f]_F = A^{-1}[g]_F$,
 logo $f = (-1/2, 1/2, 1/2)_F = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}e^x$. As soluções da equação diferencial são $y = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}e^x + Ke^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$.

28. (i) $\begin{cases} x(t) = 10 + 5e^{-0,1t} \\ y(t) = 10 - 5e^{-0,1t} \end{cases}$; (ii) aproximadamente 5 minutos

29. (i) $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com $\begin{cases} x(t) = C_1e^{-t} + C_3e^{5t} \\ y(t) = C_2e^{-t} + C_3e^{5t} \\ z(t) = -3C_1e^{-t} - C_2e^{-t} + 2C_3e^{5t} \end{cases}$ ($C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$)

(ii) $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com $\begin{cases} x(t) = C_1e^{-2t} + C_3e^{4t} \\ y(t) = -2C_2e^{-3t} + C_3e^{4t} \\ z(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + C_3e^{4t} \end{cases}$ ($C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$)

30. (i) $\begin{cases} x(t) = 14e^t - 12e^{-2t} \\ y(t) = 14e^t - 3e^{-2t} \end{cases}$; (ii) $\begin{cases} x(t) = 2e^t - e^{2t} \\ y(t) = -2e^t - e^{2t} \\ z(t) = -2e^t \end{cases}$

31. (i) $X_0(t) = (25, \frac{50}{3})$; (ii) $Z(t) = C_1e^{-0,02t}(1, 1) + C_2e^{-0,12t}(-3, 2)$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$);
 (iv) $\begin{cases} x(t) = 3e^{-0,02t} + 9e^{-0,12t} + 25 \\ y(t) = 3e^{-0,02t} - 6e^{-0,12t} + \frac{50}{3} \end{cases}$