MAT3458 – ÁLGEBRA LINEAR II
2ª Lista de Exercícios – 2º semestre de 2020

1. Em cada um dos itens abaixo, verifique se a transformação T dada é linear.
   (i) $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x + 1$.
   (ii) $T\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \det(A)$.
   (iii) $T\colon M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times m}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A^{\mathrm{t}}$, a matriz transposta de A.
   (iv) $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 3a - 4b + c - d$.
   (v) $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = a^2 + b^2$.
   (vi) $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(a + bx + cx^2) = a + b(x + 1) + c(x + 1)^2$.
   (vii) $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(a + bx + cx^2) = (a + 1) + (b + 1)x + (c + 1)x^2$.

2. Em cada um dos itens abaixo, verifique se a transformação T dada é linear.
   (i) $T\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(a)$, para toda f em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, onde a é um número real fixado.
   (ii) $T\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = f'$, para toda f em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   (iii) $T\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = af'' + bf' + cf$, para toda f em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, onde a, b e c são números reais fixados.
   (iv) $T\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por $T(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, para toda f em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a \in \mathbb{R}$ é um número real fixado.

3. Ache uma transformação linear $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ tal que $T(1) = x^4$, $T(x+x^2) = 1$ e $T(x-x^2) = x + x^3$. Determine $T(a + bx + cx^2)$.

4. Seja V um espaço vetorial e seja $T\colon V \to V$ uma tranformação linear. Sejam $v, w \in V$. Ache $T(3v + w)$ e $T(w)$ em termos de v e w, sabendo que $T(v - w) = 2v - w$ e $T(2w - v) = v + w$.

5. Recorde que o *traço* de uma matriz quadrada A é a soma de todos os elementos de sua diagonal principal, isto é, se $A = (a_{ij})_{n\times n}$, então $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.
   (i) Mostre que a função $\mathrm{tr}\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é linear.
   (ii) Mostre que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = n^2 - 1$.
   (iii) Mostre que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}})$, onde A^{t} denota a transposta da matriz A.

6. Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e S um subespaço de E. Seja $T\colon E \to E$ o operador linear definido por $T(u) = \mathrm{proj}_S\, u$, para todo $u \in E$. Considere as afirmações:
   (I) $\mathrm{Ker}(T) = S^\perp$ e $\mathrm{Im}(T) = S$.
   (II) Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base de S e $u \in E$, então $T(u) = \frac{\langle u,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 + \cdots + \frac{\langle u,v_k\rangle}{\|v_k\|^2}v_k$.
   (III) $T(u) = u$ se, e somente se, $u \in S$.

   Pode-se afirmar corretamente que

   (a) apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.
   (b) todas as afirmações são verdadeiras.
   (c) apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.
   (d) apenas a afirmação (II) é falsa.
   (e) apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.

7. Seja $T\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por $T(M) = AM - MA$, onde $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz fixada. Mostre que T é linear e determine seu núcleo. A matriz identidade pertence à imagem de T?

8. Ache uma transformação linear $T\colon \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Im}(T)$ seja gerada pelos vetores

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ache uma base para $\mathrm{Im}(T)$ e uma base para $\mathrm{Ker}(T)$.

9. Determine um operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\big\}$ e cuja imagem seja a reta $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\big\}$.

10. Determine um operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tenha como núcleo e como imagem a reta $\big[(1,0)\big]$.

11. Determine um operador linear $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

12. Considere o operador linear $T\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definido por $T(f) = \varphi$, onde $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine o núcleo e a imagem desse operador.

13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$T(1) = (1,2,1), \quad T(1+x) = (1,a,b), \quad T(1+x+x^2) = (1,1,2).$$

Então, T é injetora se, e somente se,

(a) $a + b = 3$.
(b) $a + b \neq 5$.
(c) $a + b \neq 3$.
(d) $a + b = 5$.
(e) $a = b$.

14. Seja W um espaço vetorial com produto interno $\langle\, , \rangle$. Dados um espaço vetorial V e uma transformação linear $T\colon V \to W$ defina

$$\langle\!\langle v_1, v_2 \rangle\!\rangle = \big\langle T(v_1), T(v_2) \big\rangle, \text{ para todos } v_1, v_2 \in V.$$

Mostre que $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$ é um produto interno em V se, e somente se, T é injetora.

15. Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais V e W. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto de vetores de V, e considere o conjunto $\mathcal{C} = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ de vetores de W. Demonstre as afirmações a seguir.

(i) Se $\mathcal{C}$ é linearmente independente, então $\mathcal{B}$ também é.
(ii) Se $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$ e $\mathcal{B}$ é linearmente independente, então $\mathcal{C}$ também é.
(iii) Se $W = [\mathcal{C}]$, então $\mathrm{Im}(T) = W$.
(iv) Se $V = [\mathcal{B}]$, então $\mathrm{Im}(T) = [\mathcal{C}]$.

16. Seja W o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ definido por $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Assinale a alternativa correta.

(a) Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = W$ e $\mathrm{Im}(T) = \big[(1,1,-1)\big]$.
(b) Existem infinitas transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $\mathrm{Ker}(T) = W$ e $\mathrm{Im}(T) = \big[(1,1,-1)\big]$.
(c) Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = W$ e $\mathrm{Im}(T) = \big[(1,1,-1),(0,0,1)\big]$.
(d) Existem infinitas transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = W$, $\mathrm{Im}(T) = \big[(1,1,-1),(0,0,1)\big]$.
(e) Existem infinitas transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $\mathrm{Ker}(T) = W$, $\mathrm{Im}(T) = \big[(1,1,-1)\big]$ e $T(1,1,0) = (2,2,-2)$.

17. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $T\colon M_{4\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(X) = AX$, $X \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ b & 0 & 2b & 0 \\ 0 & c & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar corretamente que

(a) T não é injetora.

(b) se $a = 1$, $b \neq 0$ e $c \neq 1$, então T é injetora.

(c) T é bijetora se, e somente se, $a = 1$, $b \neq 0$ e $c \neq 1$.

(d) T não é sobrejetora.

(e) se $a \neq 1$, $b \neq 0$ e $a + c \neq 2$, então T não é bijetora.

18. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

(i) $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$ é linear.

(ii) $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = |x|$ é linear.

(iii) $T\colon \mathcal{P}_n(R) \to \mathbb{R}$ definida por $T(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_n$ é linear.

(iv) Qualquer matriz real 5×6 define uma transformação linear de $\mathbb{R}^6$ em $\mathbb{R}^5$.

(v) Se $T\colon V \to W$ é uma transformação linear, $\dim(V) = 6$, $\dim(W) = 4$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$, então T é sobrejetora.

(vi) Se $T\colon V \to W$ é uma transformação linear e $\mathrm{Im}(T) = \{0\}$, então $T(x) = 0$, para todo $x \in V$.

(vii) Se $T\colon V \to W$ é uma transformação linear e $\dim(V) \leq \dim(W)$, então T é injetora.

(viii) Se $T\colon V \to W$ é uma transformação linear injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$.

19. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

(i) Existe uma transformação linear inversível $T\colon \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Se $T\colon \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ é definida por $T(p) = p'$, então T é sobrejetora.

(iii) Existe uma transformação linear injetora $T\colon \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$.

(iv) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon V \to V$ é um operador linear, então T é sobrejetor se, e somente se, $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$.

(v) Existe um operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

20. Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^{33333} p(t)q(t)\, dt.$$

Seja $U = \big[1 + x,\, x^2\big]$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**.

(a) Existe uma transformação linear injetora $T\colon U^\perp \to \mathbb{R}^5$.

(b) A transformação linear $\mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \to U$, $v \mapsto \mathrm{proj}_U\, v$, é sobrejetora.

(c) A transformação linear $\mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \to U^\perp$, $v \mapsto \mathrm{proj}_{U^\perp}\, v$, é sobrejetora.

(d) Se $L\colon \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^5$ é uma transformação linear, então $\dim\big(\mathrm{Ker}(L)\big) \geq 1$.

(e) Existe uma transformação linear sobrejetora $T\colon U^\perp \to \mathbb{R}^5$.

21. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear com a seguinte propriedade:

$$\big\langle T(x), T(y)\big\rangle = \langle x, y\rangle, \textit{ para todo } x, y \in V.$$

Pode-se afirmar corretamente que T

(a) é invertível.
(b) é injetor, mas pode não ser sobrejetor.
(c) é a aplicação identidade.
(d) pode não ser nem injetor nem sobrejetor.
(e) pode ser sobrejetor, mas não injetor.

22. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique suas respostas.
   (i) Uma transformação linear $T\colon U \to V$ é sobrejetora se, e somente se, $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim(U) - \dim(V)$.
   (ii) Dada uma transformação linear $T\colon U \to V$ e um vetor $v \in V$, o conjunto $G = \big\{x \in U : T(x) = v\big\}$ é um subespaço de U.
   (iii) O núcleo de uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3.
   (iv) Se uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for injetora, então $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = m$.
   (v) Se $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for uma transformação linear sobrejetora, então $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = m - n$.

23. Use o Teorema da Dimensão para provar que um sistema linear homogêneo que tem mais incógnitas do que equações tem que ter uma solução não trivial.

24. Mostre que toda matriz A em $M_n(\mathbb{R})$ é da forma $A = B^{\mathrm{t}} - 3B$ para uma única B em $M_n(\mathbb{R})$. (*Sugestão:* Considere a função $T\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por $T(B) = B^{\mathrm{t}} - 3B$.)

25. Seja a um número real. Considere o subespaço $W = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(a) = 0\}$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Prove que $\big\{x - a,\ (x-a)^2,\ \dots\ , (x-a)^n\big\}$ é uma base de W. (*Sugestão:* Considere a função avaliação $F_a\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $F_a(p) = p(a)$.)

26. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon V \to V$ um operador linear. Prove que $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ se, e somente se, $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0_V\}$.

27. Seja U um espaço vetorial de dimensão 200. Seja $T\colon U \to U$ uma transformação linear. Considere as seguintes afirmações:
   (I) Existe T tal que $20\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + 30\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3500$.
   (II) Se $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 150$, então $\mathrm{Im}(T)$ não está contida em $\mathrm{Ker}(T)$.
   (III) Se $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 185$, então $\mathrm{Im}(T)$ está contida em $\mathrm{Ker}(T)$.

   Assinale a alternativa correta.

   (a) Apenas (I) e (II) são verdadeiras.
   (b) Apenas (II) é verdadeira.
   (c) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
   (d) As três afirmações são verdadeiras.
   (e) Apenas (I) é verdadeira.

28. Sejam E um espaço vetorial de dimensão 2 e $T\colon E \to E$ um operador linear não nulo tal que $T \circ T = 0$. Considere as afirmações:
   (I) $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T)$.
   (II) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$.
   (III) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$.

   Está correto afirmar que

   (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
   (b) apenas a afirmação (II) é falsa.

(c) apenas a afirmação (III) é falsa.

(d) todas as afirmações são falsas.

(e) todas as afirmações são verdadeiras.

29. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon V \to V$ um operador linear tal que T e T^2 tenham o mesmo posto. (Recorde que o *posto* de uma transformação linear é a dimensão de sua imagem.) Prove que $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0_V\}$. Vale a recíproca?

30. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear definido por $T(x, y, z, w) = (-y, x - y, z, -w)$. Mostre que $T^6 = I$ e determine T^{-1}.

31. Determine a matriz do operador derivação $\mathcal{D}\colon \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, definido por $\mathcal{D}(p) = p'$, relativamente à base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

32. Considere os subespaços vetoriais U e V de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ cujas bases são, respectivamente, $B = \{\cos x, \operatorname{sen} x\}$ e $C = \{e^x \cos x, e^x \operatorname{sen} x, e^{2x} \cos x, e^{2x} \operatorname{sen} x\}$. Determine as matrizes dos operadores de derivação $f \in U \mapsto f' \in U$ e $f \in V \mapsto f' \in V$ em relação às bases B e C, respectivamente.

33. Qual é a matriz, relativamente à base canônica, do operador $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(2, 3) = (2, 3)$ e $T(-3, 2) = (0, 0)$?

34. Se $T\colon \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é a transformação linear cuja matriz em relação às bases $B = \{1, 1 + t\}$ de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ e $C = \{2 + t^2, t + t^2, 1 - t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Então, $T(1 + 2t)$ é igual a

(a) $1 + 7t^2$

(b) $3 + 4t - 2t^2$

(c) $5 + 4t - t^2$

(d) $-1 + 4t + 5t^2$

(e) $9 - 6t^2$

35. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base $B = \{(-1, 1), (0, 1)\}$ é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Considere as seguintes afirmações:

(I) $T(x, y) = (x, 3x + y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

(II) A imagem pela transformação T da parábola $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ é a parábola $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 2x\}$.

(III) O vetor $(2, 3)$ pertence à imagem de T.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

(b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

(c) Todas as afirmações são verdadeiras.

(d) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

(e) Todas as afirmações são falsas.

36. Sejam $B = \{(-1, 2), (1, -1)\}$ e $C = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Então, $T(1, 2)$ é igual a

(a) $(-9, 5, 13)$

(b) $(1, 1, 4)$

(c) $(-7,-1,3)$

(d) $(3,-1,10)$

(e) $(1,-1,3)$

37. Seja $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(p) = \big(p(0), p'(1), p''(2)\big)$. Seja B uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que a matriz da transformação linear T em relação à base B e à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A soma dos elementos de B é

(a) $2x^2 - 3$

(b) $x^2 - 2x + 2$

(c) $x^2 + 3$

(d) $-x^2 + 2x + 2$

(e) $2x^2 - 2x + 3$

38. Seja $T\colon \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases $\{1, x+1, x^2 + x, x^3 - 1\}$ e $\{2, x-1, x^2+1\}$ é $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. O núcleo de T é gerado por

(a) $3x^3 + 3x^2 - x + 2$

(b) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

(c) $3x^3 + x^2 - 2x + 1$

(d) $3x^3 + 2x^2 - x + 1$

(e) $2x^3 - x^2 + 2x + 4$

39. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ as seguintes duas bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}.$$

Suponha que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

(a) $T(x,y,z) = (x-z, x-y, -y+z)$

(b) $T(x,y,z) = (x-y, 0, x+y)$

(c) $T(x,y,z) = (x-z, x-y-z, 0)$

(d) $T(x,y,z) = (0, x+y, x-z)$

(e) $T(x,y,z) = (x+2z, y+2z, 3x-z)$

40. Considere as transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $S\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ definidas por $T(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ e $S(p) = \big(p(0), p(1), \dots, p(n)\big)$. Determine as matrizes de $S \circ T$ e de $T \circ S$ com respeito às bases canônicas apropriadas.

41. Sejam F e G operadores lineares em $\mathbb{R}^3$ tais que $F(x,y,z) = (x, 2y, y-z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e tais que a matriz do operador $2F - G$ em relação à base$B = \big\{(0,1,0), (1,1,0), (0,0,1)\big\}$ seja $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ache a matriz que representa o operador $F^2 + G^2$ com respeito às bases B e $C = \big\{(1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\big\}$.

42. Sejam $T, S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operadores lineares tais que $T(x,y,z) = (x+2y, y+2z, 3z)$, para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$, e

$$[S \circ T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

O traço da matriz $[S]_{\mathsf{can}}$ (ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal de $[S]_{\mathsf{can}}$) é igual a

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

43. Sejam $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $G\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G]_{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

em que $B = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$ e $C = \{1, 1+x, x+x^2\}$.

(i) Determine bases para $\mathrm{Ker}(G \circ T)$ e $\mathrm{Ker}(T \circ G)$.
(ii) Seja $H = 3(T \circ G) + I$. Determine $[H]_{DC}$, em que $D = \{1, x, x^2\}$.

44. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$ é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$. Assinale a alternativa correta.

(a) Não existem a e b que tornem T injetora.
(b) T é bijetora para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.
(c) T é bijetora para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq b$.
(d) Não existem $a, b \in \mathbb{R}$ que tornem T sobrejetora.
(e) T é bijetora se $a = b$.

45. Seja U um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon U \to U$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) T é sobrejetor se, e somente se, para toda base $\mathcal{B}$ de U, o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é diferente de zero.
(II) Se T não for injetor, existe uma base $\mathcal{B}$ de U tal que $[T]_{\mathcal{BC}}$ contém uma coluna de zeros para qualquer base $\mathcal{C}$ de U.
(III) Se $\mathcal{D} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathcal{E} = \{e_2, e_3, e_1\}$ são bases de U tais que $[T]_{\mathcal{DE}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, então $T^3 = 0$.

Escolha a alternativa correta.

(a) Apenas (I) e (II) são corretas.
(b) Apenas (II) e (III) são corretas.
(c) Apenas (I) é correta.
(d) As três afirmações são corretas.
(e) Nenhuma das afirmações é correta.

46. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.
   (i) Existe uma transformação linear $T\colon \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ cuja matriz em relação às bases canônicas é a matriz identidade.
   (ii) Se $T\colon \mathcal{P}_8(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_8(\mathbb{R})$ é definida por $T(p) = p'$, então existe uma base de $\mathcal{P}_8(\mathbb{R})$ tal que a matriz de T em relação a essa base é inversível.
   (iii) Se $T\colon \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ é uma transformação linear injetora, então a matriz de T em relação quaisquer bases de $\mathbb{R}^3$ e $M_2(\mathbb{R})$ é inversível.
   (iv) Seja V é um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ é um operador linear. Então T é sobrejetor se, e somente se, existe uma base de V tal que a matriz de T em relação a essa base é inversível.

47. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que $T^2 = T$. Prove que $T = 0$ ou $T = I$ ou existe uma base B de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

48. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear não nulo tal que $T^2 = 0$. Prove que existe uma base B de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

49. Mostre que se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável, então a matriz A^m é diagonalizável qualquer que seja o número natural m, $m \geq 1$.

50. Exiba uma matriz A não diagonalizável tal que a matriz A^2 seja diagonalizável. (*Sugestão:* $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.)

51. Mostre que o operador linear $T\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definido por

$$T(u)(x) = \int_0^x u(s)\, ds, \quad x \in \mathbb{R},$$

não tem autovalores.

52. Seja λ um autovalor do operador linear $T\colon V \to V$ e seja n um número natural. Mostre que
   (i) λ^n é um autovalor de T^n;
   (ii) se $f(t)$ é um polinômio qualquer, então $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(T)$.

53. Sejam V um espaço vetorial, $T\colon V \to V$ um operador linear, u um autovetor de T associado ao autovalor λ e v um autovetor de T associado ao autovalor μ. Pode-se afirmar corretamente que
   (a) $u + v$ é autovetor de T se, e somente se, $\mu = \lambda$ e $u + v \neq 0_V$.
   (b) se $\lambda = \mu$, então $\lambda u + v$ não é um autovetor de T.
   (c) se $\lambda \neq \mu$, então u e v podem ser linearmente dependentes.
   (d) se $\lambda \neq \mu$, então, para todo $\beta \in \mathbb{R}$, $3u + \beta v$ é autovetor de T associado ao autovalor $3\lambda + \beta\mu$.
   (e) se $\lambda = \mu$, então $u - v$ é autovetor de T associado ao autovalor 0.

54. Seja T um operador linear com autovalores 0, 1, 2 e 3. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**.
   (a) 5, 6, 9 e 14 são autovalores de $5I + T^2$.
   (b) T é inversível e 0, 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ são autovalores de T^{-1}.
   (c) 0, 1, 4 e 9 são autovalores de T^2.
   (d) 0, 1, 8 e 27 são autovalores de T^3.
   (e) 0, 3, 6 e 9 são autovalores de $3T$.

55. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, onde $n \geq 2$. Assuma que a soma dos elementos de qualquer linha de A seja igual a 1. Assinale a alternativa correta.

   (a) A pode não possuir autovalores reais.

   (b) 1 e 0 são necessariamente autovalores de A.

   (c) A possui algum autovalor real, mas pode ser que nem 1 nem 0 sejam autovalores de A.

   (d) 1 é necessariamente autovalor de A, mas 0 pode não ser.

   (e) 0 é necessariamente autovalor de A, mas 1 pode não ser.

56. Mostre que se $A \in M_2(\mathbb{R})$, então seu polinômio característico é dado por $p_A(t) = t^2 - a_1 t + a_0$, onde $a_0 = \det(A)$ e $a_1 = \operatorname{tr}(A)$.

57. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que todo vetor não nulo é um autovetor de T. Escreva, então, $T(e_i) = \alpha_i e_i$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

   (i) Calcule $T(e_1 + e_2 + e_3)$.

   (ii) Mostre que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

   (iii) Prove que existe um número $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = (t - \alpha)^3$.

   (iv) Conclua que $T = \alpha I$, onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$.

58. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x, y, z) = (3x + y + z, y, x + 2y + 3z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. A soma dos autovalores de T é igual a

   (a) 6

   (b) 7

   (c) 5

   (d) 2

   (e) 3

59. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$. Calcule A^n, $n \in \mathbb{N}$. Determine uma raiz quadrada de A, se existir. (*Sugestão*: Lembre que se M e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, com M inversível, vale $(M^{-1}BM)^n = M^{-1}B^nM$ para todo $n \in \mathbb{N}$.)

60. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear com autovetores $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$ correspondendo respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 2$. Seja $v = (5, 1)$. Calcule $T^{10}(v)$.

61. Verifique que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

62. Verifique se cada uma das matrizes abaixo é ou não diagonalizável. Quando for diagonalizável, determine uma matriz invertível M tal que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal.

   (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

63. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matrizem relação às bases

$$B = \{\, (1,1,0), (1,0,0), (0,1,1) \,\} \quad \text{e} \quad C = \{\, (0,1,0), (1,1,0), (1,0,1) \,\}$$

é dada por $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(i) Encontre os autovalores e autovetores de T.

(ii) É T diagonalizável?

64. Seja V um espaço vetorial de dimensão 3 seja $T\colon V \to V$ um operador linear e seja B uma base de V tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} -a & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ -3a & c & a \end{bmatrix}$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta.

(a) Se $b \neq a = 0$, então T não é diagonalizável.

(b) Se $|b| \neq 2|a|$ e $a \neq 0$, então T é diagonalizável.

(c) Se $a \neq 0$ e $b = 2a = c$, então T é diagonalizável.

(d) Se $a = b = 0$ e $c \neq 0$, então T é diagonalizável.

(e) Se $c = 0$ e $b = -2a \neq 0$, então T não é diagonalizável.

65. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear com polinômio característico $p_T(t)$. Verifique se T é diagonalizável em cada um dos seguintes casos:

(i) $p_T(t) = t^4 - 1$

(ii) $p_T(t) = t^3(t+1)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.

(iii) $p_T(t) = t^2(t^2-4)$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.

(iv) $p_T(t) = t^2(t-2)^2$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.

66. Seja U um espaço vetorial de dimensão 5, seja $T\colon U \to U$ um operador linear e seja $p(t) = -t(t+1)^3(t+2)$ seu polinômio característico. Assinale a alternativa correta.

(a) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \geq 2$.

(b) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$, $\dim\big(\mathrm{Ker}(T+2I)\big) = 1$ e $\dim\big(\mathrm{Ker}(T+I)\big) = 3$.

(c) T é sobrejetor.

(d) T não é diagonalizável, pois $\dim(U) = 5$ e $p(t)$ possui apenas três raízes reais.

(e) T é diagonalizável se, e somente se, existem $v_1, v_2, v_3 \in U$, linearmente independentes, tais que $T(v_1) = -v_1$, $T(v_2) = -v_2$ e $T(v_3) = -v_3$.

67. Sejam V um espaço vetorial de dimensão $n > 4$, $T\colon V \to V$ um operador linear com polinômio característico $p(t) = (1-t)(2-t)^3(3-t)^{n-4}$. Assinale a alternativa FALSA:
O operador T é diagonalizável se, e somente se,

(a) $\dim\big(\mathrm{Im}(T-3I)\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(T-2I)\big) = 1$

(b) $V = \mathrm{Ker}(T-I) + \mathrm{Ker}(T-2I) + \mathrm{Ker}(T-3I)$

(c) $\dim\big(\mathrm{Im}(T-I)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T-2I)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T-3I)\big) = n$

(d) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T-I)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T-2I)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T-3I)\big) = n$

(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T-2I)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(T-3I)\big) = n-1$

68. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon V \to V$ um operador linear. Suponha que λ e μ sejam autovalores distintos de T. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\dim(V) - \dim\big(V(\lambda)\big) = 1$, então T é diagonalizável.

(II) Se $\dim(V) = \dim\big(V(\lambda)\big) + \dim\big(V(\mu)\big)$, então T é diagonalizável.

(III) T é diagonalizável se, e somente se, $\dim(V) = 2$.

Está correto o que se afirma em

(a) (I) e (II), apenas.

(b) (II), apenas.

(c) (I) e (III), apenas.

(d) (I), (II) e (III).

(e) (II) e (III), apenas.

69. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear invertível. Prove que

(i) se λ é um valor próprio de T, então $\lambda \neq 0$;

(ii) λ é um valor próprio de T se, e somente se, $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de T^{-1} (onde T^{-1} denota o operador inverso de T);

(iii) se λ é um valor próprio de T, então a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade algébrica de $\frac{1}{\lambda}$.

70. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear de posto 1. Prove que ou T é diagonalizável ou T^2 é o operador nulo.

71. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear tal que $T^2 = T$.

(i) Prove que se λ é um autovalor de T, então $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

(ii) Prove que $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$, e conclua que T é diagonalizável.

72. Seja $T\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ o operador linear tal que $T(M) = M^{\mathrm{t}}$, para todo $M \in M_n(\mathbb{R})$, onde M^{t} denota a transposta de M. Prove que T é diagonalizável.

73. Seja $T\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ definida por $T\big(f(t)\big) = f(t+1)$ para todo $f(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. É T diagonalizável? Por quê?

74. Se T denota o operador linear de $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base canônica é $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, então $T^{555}(0,1)$ é igual a

(a) $\big(2^{556} - 3^{555},\ 2^{556} - 3^{555}\big)$

(b) $\big(2^{555} - 3^{556},\ 2^{556} - 3^{555}\big)$

(c) $\big(2^{555} - 3^{555},\ 2^{555} - 3^{555}\big)$

(d) $\big(2^{555} - 3^{555},\ 2^{555} - 3^{556}\big)$

(e) $\big(2^{555} - 3^{555},\ 2^{556} - 3^{555}\big)$

75. Seja T um operador linear em $\mathbb{R}^3$ tal que $(1,2,1)$, $(0,1,0)$ e $(2,0,1)$ sejam autovetores de T associados aos autovalores -1, 1 e 2, respectivamente. A soma dos elementos da primeira coluna da matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é igual a

(a) 12

(b) 11

(c) 10

(d) 9

(e) 8

76. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x,y) = (3x - y, 2x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então, $T^{2018}(0,1)$ é igual a

(a) $(1 - 2^{2018}, 2 - 2^{2018})$

(b) $(1, 1 - 3^{2018})$

(c) $(2^{2019}, 2 - 3^{2018})$

(d) $(1 - 2^{2018}, 2^{2019})$

(e) $(1 - 2^{2019}, 1 - 3^{2018})$

77. Seja $a \in \mathbb{R}$, e considere o operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x,y) = (ax - y, x + y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então, T é diagonalizável se, e somente se

(a) $a \leq -1$ ou $a \geq 3$
(b) $0 \leq a \leq 2$
(c) $a < 0$ ou $a > 2$
(d) $-1 < a < 3$
(e) $a < -1$ ou $a > 3$

78. Sejam a e b números reais distintos, seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Suponha que o polinômio característico de T seja $p(x) = (x-a)^2(b-x)$. Sejam v_1, v_2 autovetores distintos de T associados ao autovalor a, e sejam w_1, w_2 autovetores distintos de T associados ao autovalor b. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**.

(a) Se $v_1 + v_2 \neq 0$, então $v_1 + v_2$ é um autovetor de T.
(b) O conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente dependente.
(c) Se o conjunto $\{v_1, v_2\}$ for linearmente independente, então T será diagonalizável.
(d) O conjunto $\{v_1, w_1\}$ é linearmente independente.
(e) $v_1 + w_1$ é um autovetor de T.

79. Sejam $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ e $S\colon \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ as transformações lineares definidas por

$$T(q) = q',\ q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \quad \text{e} \quad S(a_0 + a_1 x) = a_0 + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2,\ a_0, a_1 \in \mathbb{R},$$

e seja $H\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o operador linear dado por $H = S \circ T$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**.

(a) O polinômio característico de H é $p(t) = -t(1-t)^2$.
(b) $\mathrm{Ker}(H - I) = [x^2]$, onde I denota o operador identidade de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
(c) H é diagonalizável.
(d) $\dim\big(\mathrm{Ker}(H)\big) = 1$.
(e) Os únicos autovalores de H são 0 e 1.

80. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$. Se $\mathrm{Ker}(T) = [e_1 + e_2 + e_3]$, o polinômio característico de T é $p(t) = -t(t-2)^2$ e T é diagonalizável, então $a^2 - b^2 + c^2$ é igual a

(a) 1
(b) 9
(c) 7
(d) 4
(e) 3

81. Considere as afirmações abaixo.

(I) Se U é um espaço vetorial de dimensão 75, então existe um operador linear $T\colon U \to U$ satisfazendo $\mathrm{Ker}(T - I) \cap \mathrm{Ker}(T - 2I) \cap \mathrm{Ker}(T - 3I) \neq \{0_U\}$, onde I denota o operador identidade de U.

(II) Se o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ está munido do seu produto interno canônico, U é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 1 e $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é o operador linear definido por $T(v) = \mathrm{proj}_U\, v$, para todo $v \in \mathbb{R}^4$, então existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(III) Se $T\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ é um operador linear cujo polinômio característico é $p(t) = (t-2)^4(t+3)^2$, então T é invertível.

Está correto que se afirma apenas em

(a) (I) e (III).

(b) (I) e (II).

(c) (III).

(d) (II) e (III).

(e) (II).

Respostas

1. São lineares apenas (iii), (iv) e (vi).

2. Todas as transformações dadas são lineares.

3. $T(a + bx + cx^2) = \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2}x + \frac{b-c}{2}x^3 + ax^4$.

4. $T(3v + w) = 18v$ e $T(w) = 3v$.

6. (d)

7. $\mathrm{Ker}(T) = \big\{M \in M_n(\mathbb{R}) : AM = MA\big\}$ e $I_n \notin \mathrm{Im}(T)$.

8. Defina, por exemplo,

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a+2b & b+6c & a+4b+2c \\ 3b+c & a+5b & a-2b \\ 2a & -b & a-3b-c \end{pmatrix}.$$

Neste caso, uma base de $\mathrm{Ker}(T)$ é $\{x^3\}$. Uma base de $\mathrm{Im}(T)$ é constituída pelas matrizes dadas no enunciado do exercício.

9. Defina, por exemplo, $T(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$.

10. Defina, por exemplo, $T(x, y) = (y, 0)$.

11. Defina, por exemplo, $T(x, y, z, t) = (z, t, 0, 0)$. Assim, $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T) = \big[(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\big]$.

12. $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$; $\mathrm{Im}(T) = \big\{\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \varphi(0) = 0\big\}$.

13. (c)

16. (b)

17. (b)

18. (i) falso (ii) falso (iii) verdadeiro (iv) verdadeiro (v) verdadeiro (vi) verdadeiro (vii) falso (viii) verdadeiro

19. (i) verdadeiro (ii) falso (iii) verdadeiro (iv) verdadeiro (v) verdadeiro

20. (e)

21. (a)

22. (i) verdadeira (ii) falsa (iii) falsa (iv) verdadeira (v) verdadeira

27. (b)

28. (b)

31. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}$

34. (b)

35. (a)

36. (a)

37. (c)

38. (e)

39. (c)

40. Ambas as matrizes são iguais a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix}$.

41. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 12 & 9 & -10 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

42. (a)

43. (i) $\mathrm{Ker}(G \circ T) = \big[(1,2,1)\big]$ $\mathrm{Ker}(T \circ G) = \big[x + x^2\big]$

    (ii) $[H]_{DC} = \begin{pmatrix} 13 & -19 & 19 \\ 6 & -5 & 5 \\ 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

44. (c)

45. (d)

46. (i) verdadeiro (ii) falso (iii) falso (iv) verdadeiro

53. (a)

54. (b)

55. (d)

58. (b)

59. $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 + 14^n & -4 + 4 \cdot 14^n \\ -3 + 3 \cdot 14^n & 1 + 12 \cdot 14^n \end{pmatrix}$

60. $(2^{-9} + 3 \cdot 2^{10}, -2^{-9} + 3 \cdot 2^{10})$

61. As respostas vão variar; uma possibilidade é $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

62. (i) É diagonalizável. Uma possibilidade é $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

    (ii) Não é diagonalizável.

(iii) Não é diagonalizável.

(iv) É diagonalizável. Uma possibilidade é $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

63. (i) autovalores: -1 e 3; $V(-1) = \big[(1,1,0),(1,1,1)\big]$ e $V(3) = \big[(-1,1,0)\big]$

(ii) sim

64. (b)

65. (i) não (ii) não (iii) sim (iv) depende

66. (e)

67. (c)

68. (a)

74. (e)

75. (a)

76. (a)

77. (e)

78. (e)

79. (b)

80. (d)

81. (c)