MAT3458 – ÁLGEBRA LINEAR II

1ª Lista de Exercícios – 2º semestre de 2021

1. Verifique se $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações de adição $\oplus$ e de multiplicação por escalar $\odot$ dadas por:
   (i) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $\alpha \odot (x, y) = (x, \alpha y)$
   (ii) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$; $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$
   (iii) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_2, -x_2 + y_1)$; $\alpha \odot (x, y) = (x, \alpha y)$
   (iv) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1)$; $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x - \alpha + 1,\ \alpha y - \alpha + 1)$
   (v) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $\alpha \odot (x_1, y_1) = (\alpha y_1, \alpha x_1)$

2. Seja $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ com as operações de adição e de multiplicação por escalares dadas por
$$x \oplus y = xy \quad \text{e} \quad \alpha \odot x = x^\alpha,$$
para todos $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Verifique que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3. Verifique se S é um subespaço vetorial do espaço vetorial V nos seguintes casos:
   (i) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$
   (ii) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \text{ é um número inteiro}\}$
   (iii) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A \text{ é invertível}\}$
   (iv) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(t) \geq 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$
   (v) $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : p(0) = 2p(1)\}$
   (vi) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $S = \{a + bx^2 + cx^3 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$
   (vii) $V = \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $S = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) : af'' + bf' + cf = 0\}$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ são fixados.

4. Considere os seguintes subconjuntos do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:
$$S_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(t) = f(t+1), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$
$$S_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(t) \text{ é inteiro, para todo } t \in \mathbb{R}\}$$
$$S_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(t+s) = f(t) + f(s), \text{ para todos } t, s \in \mathbb{R}\}$$
Assinale a afirmação verdadeira.
   (a) Apenas S_1 é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
   (b) Apenas S_2 e S_3 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
   (c) Apenas S_1 e S_2 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
   (d) Apenas S_1 e S_3 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
   (e) S_1, S_2 e S_3 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

5. Seja $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) + p(1) = 0\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

6. Verifique se os conjuntos S_1 e S_2 geram o mesmo subespaço do espaço vetorial V, nos seguintes casos:
   (i) $S_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ e $S_2 = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$, quando $V = \mathbb{R}^3$.
   (ii) $S_1 = \{\operatorname{sen}^2(t), \cos^2(t), \operatorname{sen}(t)\cos(t)\}$ e $S_2 = \{1, \operatorname{sen}(2t), \cos(2t)\}$, quando $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua}\}$.
   (iii) $S_1 = \{1, t, t^2, t^3\}$ e $S_2 = \{1, 1 + t, 1 - t^2, 1 - t - t^2\}$, quando $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

7. Sejam v_1, v_2, v_3 os vetores-linha e w_1, w_2, w_3 os vetores-coluna da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

(i) Verifique as relações: $v_3 = 2v_2 - v_1, w_3 = 2w_2 - w_1$.

(ii) Exprima w_1 e w_2 como combinações lineares de v_1 e v_2 e vice-versa.

(iii) Conclua que os vetores-linha e os vetores-coluna da matriz dada geram o mesmo subespaço.

(iv) Dê um exemplo de uma matriz 3×3 cujos vetores-linha geram um subespaço de $\mathbb{R}^3$ diferente daquele gerado pelos seus vetores-coluna.

(v) É possível encontrar uma matriz 3×3 tal que a dimensão do espaço gerado pelos vetores-linha é diferente da dimensão do espaço gerado pelos vetores-colunas? Justifique sua resposta.

8. Ache uma solução não-trivial para o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$. A partir daí, obtenha, em $\mathbb{R}^3$, uma combinação linear nula dos vetores $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,1,-2)$, $v_3 = (3,1,1)$ e $v_4 = (4,-1,-2)$ na qual os coeficientes não são todos iguais a zero.

9. Em cada um dos itens abaixo, encontre um sistema de equações lineares que tenha o subespaço S como espaço-solução.

(i) $S = \big[(-1,0,1),(3,4,-2)\big]$ em $\mathbb{R}^3$.

(ii) $S = \big[(-1,0,0,1),(0,-1,-2,3)\big]$ em $\mathbb{R}^4$.

(iii) $S = \big[(2,-1,2,0),(1,2,3,4),(0,-5,-4,-8)\big]$ em $\mathbb{R}^4$.

10. Em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ considere os conjuntos

$$\mathcal{A} = \{1+t, t+t^3\}, \quad \mathcal{B} = \{1+2t+t^3, 1-t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1+3t+t^3, t^2\}.$$

Assinale a alternativa correta.

(a) $[\mathcal{C}] \subset [\mathcal{B}]$, mas $[\mathcal{C}] \neq [\mathcal{B}]$

(b) $[\mathcal{A}] = [\mathcal{C}]$

(c) $[\mathcal{B}] = [\mathcal{C}]$

(d) $[\mathcal{C}] \subset [\mathcal{A}]$, mas $[\mathcal{C}] \neq [\mathcal{A}]$

(e) $[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}]$

11. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere os seguintes elementos do espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

$$p_1(x) = 1 + 2x + x^3, \quad p_2(x) = x + x^2 - x^3, \quad p_3(x) = a + x + bx^2 + 5x^3.$$

Se $p_3(x) \in [p_1(x), p_2(x)]$, então $a + b$ é igual a

(a) 1

(b) 3

(c) -2

(d) 2

(e) -1

12. Determine os valores de $b \in \mathbb{R}$ para os quais o polinômio $p(t) = 4t^2 + 2t + 4$ pertença ao subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios $p_1(t) = b(t+1)$, $p_2(t) = 1 - bt^2$ e $p_3(t) = 1 + bt + bt^2$.

13. Considere a relação $\alpha x + \beta x^2 \operatorname{sen} x + \gamma \cos x = 0$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Atribuindo a x os valores $0, \pi/2$ e π, obtemos as equações $\begin{cases} \gamma = 0 \\ \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi^2}{4}\beta = 0 \\ \pi\alpha - \gamma = 0 \end{cases}$.

(i) Resolva o sistema linear acima nas incónitas α, β, γ.

(ii) O conjunto $B = \{x, x^2 \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ é linearmente dependente em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

14. Verifique se o conjunto de funções B é linearmente dependente ou independente em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ nos seguintes casos:
    (i) $B = \{e^t, e^{2t}, e^{-t}\}$
    (ii) $B = \{e^t, te^t\}$
    (iii) $B = \{e^t, te^t, e^{2t}\}$
    (iv) $B = \{\cos t, \cos 2t, \cos 3t\}$
    (v) $B = \{x, \cos x, \operatorname{sen} x\}$
    (vi) $B = \{e^{2t}, e^{3t}\cos 4t, e^{3t}\operatorname{sen} 4t\}$

15. Seja V um espaço vetorial e considere $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Sejam $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ números reais não-nulos. Prove, usando a definição de independência linear, que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente se, e somente se, $\{v_1, v_1 + \lambda_2 v_2, v_1 + \lambda_3 v_3, \ldots, v_1 + \lambda_n v_n\}$ for linearmente independente.

16. Seja V um espaço vetorial e seja $\mathcal{A} = \{u, v, w\}$ um subconjunto linearmente independente de V. Considere as seguintes afirmações:
    I. $[u + v, u + w, v + w] = [u, v, w]$.
    II. O conjunto $\{u, u + v, u + w\}$ é linearmente independente.
    III. $[u + v, u + w, v - w] = [u, v, w]$.
    IV. O conjunto $\{u - w, u + v, u + w\}$ é linearmente independente.

    Está correto o que se afirma em
    (a) I e IV, apenas.
    (b) I e II, apenas.
    (c) I, II e IV, apenas.
    (d) I, III e IV, apenas.
    (e) I, II, III e IV.

17. Seja $W = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\big\}$ com as operações de adição e multiplicação por escalares dadas por
    $$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2) \qquad \text{e} \qquad \alpha \odot (x, y) = (x^\alpha, y^\alpha),$$
    para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
    (i) Verifique que W é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
    (ii) Ache uma base de W.

18. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então, o conjunto $\{a + x, 1 + bx + x^2, x + ax^2\}$ gera o espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se, e somente se,
    (a) $a(2 - ab) \neq 0$
    (b) $2 + ab \neq 0$
    (c) $ab \neq 0$
    (d) $a(1 - b) \neq 1$
    (e) $a \neq 0$

19. Sejam V um espaço vetorial e $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Seja $v \in V$. O conjunto $A = \{v, v - e_1, v - e_2, v - e_3\}$ é um conjunto de geradores de V? O conjunto A pode ser linearmente independente? Justifique.

20. Seja V um espaço vetorial. Prove que se existir um conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3\} \subset V$ linearmente independente tal que $E \cup \{u\}$ é linearmente dependente, qualquer que seja o vetor $u \in V$, então a dimensão de V é 3.

21. Seja $V = \mathcal{P}_{20}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 20 com coeficientes reais. Considere as seguintes afirmações:

I. Um subconjunto de V com 20 vetores é sempre linearmente independente.

II. Um subconjunto de V com 20 vetores está sempre contido em uma base de V.

III. Um subconjunto de V com 20 vetores não gera V.

Está correto afirmar que

(a) nenhuma das afirmações é verdadeira.

(b) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

(c) apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

(d) apenas a afirmação II é verdadeira.

(e) apenas a afirmação III é verdadeira.

22. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto $B = \big\{(a,1,0),(1,a,1),(0,1,a)\big\}$ é base de $\mathbb{R}^3$?

23. Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1,1,1,0)$ e $(1,1,2,1)$.

24. Considere o subconjunto $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ do espaço vetorial $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

(i) Mostre que B é linearmente independente.

(ii) Determine uma base de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ que contenha B.

25. Seja $B = \big\{1, 2-x, x^2+1, 1+x+x^3\big\}$. Verifique que B é uma base para $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e determine as coordenadas do polinômio $p(x) = x^3$ em relação à base B.

26. Seja $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$.

(i) Verifique que B é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Determine $m, n, r, s \in \mathbb{R}$ para que as matrizes $P = (m,n,n,m)_B$ e $Q = \begin{bmatrix} r & 1 \\ 2 & s \end{bmatrix}$ sejam iguais.

27. Considere as matrizes v_1, v_2, v_3, v_4 e w definidas abaixo:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se (a,b,c,d) são as coordenadas de w com respeito à base $E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, então $a - b - c + d$ é igual a

(a) 2

(b) 1

(c) 0

(d) 3

(e) 4

28. Determine uma base e a dimensão de cada um dos subespaços vetoriais abaixo.

(i) $S = \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = w \text{ e } x - 3y + w = 0\big\}$

(ii) $S = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} A \right\}$

(iii) $S = \big\{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : p(1) = p(-1) = 0\big\}$

(iv) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$

(v) $S = \big\{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5 : x + y - az + 3w + t = 0 \text{ e } 2x - y + z + 2aw + 5t = 0\big\}$, sendo $a \in \mathbb{R}$.

29. A dimensão do subespaço $\big[t, e^t, t - e^t, te^t, t + e^t\big]$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ é

(a) 4
(b) 2
(c) 1
(d) 3
(e) 5

30. Seja $S = \{(a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R}) : a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33}\}$. Está correto afirmar que
(a) S não é um subespaço de $M_3(\mathbb{R})$.
(b) S é um subespaço de $M_3(\mathbb{R})$ e $\dim S = 7$.
(c) S é um subespaço de $M_3(\mathbb{R})$ e $\dim S = 6$.
(d) S é um subespaço de $M_3(\mathbb{R})$ e $\dim S = 1$.
(e) S é um subespaço de $M_3(\mathbb{R})$ e $\dim S = 3$.

31. Seja $b \in \mathbb{R}$ e considere o subespaço vetorial S de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dado por
$$S = \left[x^3 - x^2 + 1, x^3 + x^2 - x, x^3 + bx^2 + x + 2\right].$$
Determine b de modo que S tenha dimensão 2.

32. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e 0_V o elemento neutro da adição em V. Seja S um subconjunto de V. Assinale a afirmação **FALSA**.
(a) Se 0_V é um elemento de S, então S é um subespaço de V.
(b) Se S é um subespaço de V, então $0 \leq \dim(S) \leq n$.
(c) Se B é um subconjunto linearmente independente de V com n elementos, então B é uma base de V.
(d) Se B é um conjunto gerador de V com n elementos, então B é uma base de V.
(e) Toda base de V tem n elementos.

33. Considere o subconjunto $\mathcal{A} = \{(0,2,-1,0,1), (0,0,3,-1,2), (0,4,-5,1,0)\}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^5$. Sejam $S = [\mathcal{A}]$ e $v = (0, m, -m, 1, 1)$, com $m \in \mathbb{R}$.
(i) Determine uma base de S.
(ii) Determine todos os valores de m para os quais $v \in S$.
(iii) Se $w \notin S$, vale $[\mathcal{A} \cup \{w\}] = \{(x,y,z,s,t) \in \mathbb{R}^5 : x = 0\}$?

34. Seja $S = [(1,0,-1,1), (1,1,b,1), (0,a,a,1)] \subset \mathbb{R}^4$, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Assinale a afirmação verdadeira.
(a) Se $a = 0$, então $\dim(S) = 2$, para todo b.
(b) Se $b = 0$, então $\dim(S) = 2$, para todo a.
(c) A dimensão de S é 3 se, e somente se, $a = b = 0$.
(d) A dimensão de S é 2 se, e somente se, $a = b = 0$.
(e) A dimensão de S é 3, para todo a e b.

35. Em $\mathbb{R}^5$, considere o subespaço $S = [\mathcal{A}]$, em que
$$\mathcal{A} = \{(1,0,-1,2,0), (2,1,3,0,0), (0,1,-5,4,0), (1,0,-11,10,0)\}.$$
(i) Ache uma base $\mathcal{B}$ para S, *contida* em $\mathcal{A}$.
(ii) Complete a base $\mathcal{B}$ do item (i) para uma base de $\mathbb{R}^5$.
(iii) Determine os valores de m para os quais $v \in S$, sendo $v = (4, -4, m^2, 4m, 0)$.

36. Determine uma base e a dimensão do subespaço das soluções do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 0 \end{cases}$$

37. Seja S o subespaço das soluções de um sistema linear homogêneo com sete equações e doze incógnitas. Quais são os possíveis valores para $\dim S$?

38. Verdadeiro ou Falso? Justifique.

   (i) Se S é o conjunto dos pontos (x, y, z) de uma reta r, então S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, a reta r passa pela origem.

   (ii) Se $\alpha \neq 0$, então $\{(1-\alpha, 1+\alpha), (1+\alpha, 1-\alpha)\}$ é sempre uma base de $\mathbb{R}^2$.

   (iii) Se $S_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ e $S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ são subconjuntos linearmente independentes em um espaço vetorial de dimensão n e $k + l = n$, então $S_1 \cup S_2$ é uma base de V.

   (iv) Se S é um subespaço de um espaço vetorial V e $S = [u_1, u_2, \ldots, u_p]$, então $\dim S = p$.

   (v) Sejam $M_1, M_2, \ldots, M_5$ matrizes distintas em $M_2(\mathbb{R})$. Então $\{M_1, M_2, \ldots, M_5\}$ é gerador de $M_2(\mathbb{R})$.

39. Considere os subespaços

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : x - y + z = 0 \right\} \quad \text{e} \quad S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

de $M_2(\mathbb{R})$ e seja $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Verifique se $M \in S_1 \cap S_2$.

40. Considere os seguintes subespaços vetoriais da $M_3(\mathbb{R})$:

$$S = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A = A^{\mathrm{t}}\} \quad \text{e} \quad T = \{A \in M_3(R) : \mathrm{tr}(A) = 0\},$$

em que A^{t} denota a matriz transposta de A e $\mathrm{tr}(A)$ denota o traço de A, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de A. Então, a dimensão de $S \cap T$ é igual a

   (a) 3
   (b) 7
   (c) 6
   (d) 4
   (e) 5

41. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

$$V = \big\{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) + p(-1) = 0\big\} \quad \text{e} \quad W = \big\{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p'(1) = 0\big\}.$$

A dimensão de $V \cap W$ é igual a

   (a) 4
   (b) 3
   (c) 1
   (d) 0
   (e) 2

42. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita ≥ 4, seja $E = \{v_1, v_2, v_3\}$ um subconjunto de V e seja $w \in V$. Se $E \cup \{w\}$ é um conjunto gerador para V, então está correto afirmar que

(a) $w \in [v_1, v_2, v_3]$.

(b) $w \neq 0_V$.

(c) o conjunto $E \cup \{w\}$ pode ou não ser linearmente independente.

(d) o conjunto E é linearmente dependente.

(e) $\dim\big([v_1, v_2] \cap [v_3, w]\big) \geq 1$.

43. Em $\mathbb{R}^3$, sejam $S_1 = \big[(1,0,-1),(1,2,1)\big]$ e $S_2 = \big[(1,1,1),(1,0,0)\big]$.

(i) Determine $S_1 + S_2$.

(ii) Ache uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$.

44. Considere os seguintes subespaços de $M_{3\times 2}(R)$:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \\ c & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -7 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \right].$$

Ache uma base e a dimensão dos subespaços S_1, S_2, $S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2$.

45. Seja V um espaço vetorial de dimensão 5. Sejam S_1 e S_2 subespaços de V de dimensão 3. Prove que $S_1 \cap S_2 \neq \{0_V\}$.

46. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y + z = t\big\}, \quad W = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z - t = 0\big\}.$$

Determine as dimensões de $U + W$ e de $U \cap W$.

47. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\big\}, \quad W = \big\{(x,-x,x) : x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Assinale a alternativa que contém uma afirmação **FALSA**.

(a) $\dim(U + W) = 3$.

(b) $\dim(W) = 1$.

(c) O conjunto $U \cup W$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(d) $\dim(U) = 2$.

(e) $\dim(U \cap W) = 0$.

48. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 7, S_1 e S_2 subespaços de V tais que $V = S_1 + S_2$ e $\dim(S_1) = \dim(S_2)$. É correto afirmar que

(a) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 5$.

(b) $\dim(S_1 \cap S_2)$ é ímpar.

(c) $\dim(S_1 \cap S_2) \geq 3$.

(d) $\dim(S_1 \cap S_2) \leq 5$.

(e) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 3$.

49. Se S_1 e S_2 são subespaços de um espaço vetorial E, B_1 é uma base de S_1 e B_2 é uma base de S_2, então $B_1 \cup B_2$

(a) é um conjunto linearmente independente, mas pode não gerar $S_1 + S_2$.

(b) é um conjunto de geradores de $S_1 + S_2$, mas pode não ser linearmente independente.

(c) é uma base de $S_1 + S_2$.

(d) não é uma base de $S_1 + S_2$.

(e) pode não ser nem linearmente independente, nem um conjunto de geradores de $S_1 + S_2$.

50. Seja $S = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ : \ p(-1) + p(1) = 0\}$.
   (i) Mostre que S é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
   (ii) Determine um subespaço W de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $S \oplus W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;

51. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ como espaço vetorial.
   (i) Mostre que são subespaços de V os subconjuntos:

$$S_1 = \{A \in V : A = A^{\mathrm{t}}\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{A \in V : A = -A^{\mathrm{t}}\}.$$

   (ii) Prove que $V = S_1 \oplus S_2$.
   (iii) Considere os seguintes subespaços de V:

$$U = \{(a_{ij}) \in V : a_{ij} = 0, \text{ se } i > j\} \quad \text{e} \quad T = \{(b_{ij}) \in V : b_{ij} = 0, \text{ se } i < j\}.$$

   Ache a dimensão de U, de T, de $U + T$ e de $U \cap T$.

52. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função definida por $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + tx_2y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$?

53. Para cada par de vetores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, defina

$$\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

   Prove que $\langle \, , \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Ache todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ que são ortogonais ao vetor $(1, 0)$. Calcule $\|(1, 0)\|$.

54. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que os polinômios $p = x^2 - 1$ e $q = \lambda x - 2$ sejam ortogonais com respeito aos seguintes produtos internos em $P_2(\mathbb{R})$:
   (i) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$;
   (ii) $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

55. Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e sejam $u, v \in V$. Considere as seguintes relações envolvendo o produto interno e a norma em V:

(A)	$\|u\| = \|v\|$;	(I)	$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|$;
(B)	$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;	(II)	$\langle u + v, u - v \rangle = 0$;
(C)	$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$;	(III)	$\langle u, v \rangle = 0$.

   Assinale a alternativa contendo equivalências corretas:

   (a) (A) $\iff$ (III), (B) $\iff$ (II), (C) $\iff$ (I).
   (b) (A) $\iff$ (II), (B) $\iff$ (I), (C) $\iff$ (III).
   (c) (A) $\iff$ (I), (B) $\iff$ (III), (C) $\iff$ (II).
   (d) (A) $\iff$ (II), (B) $\iff$ (III), (C) $\iff$ (I).
   (e) (A) $\iff$ (I), (B) $\iff$ (II), (C) $\iff$ (III).

56. No espaço $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios, mostre que, se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, então $\langle p, q \rangle = \int_a^b p(t)q(t)\,dt$ é um produto interno. Verifique por que não é um produto interno em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ (espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$) embora o seja em $\mathcal{C}([a, b])$. Observe também que, mudando os valores de a e b, obtemos um produto interno diferente no mesmo espaço $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

57. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \, , \rangle$. Considere as seguintes afirmações:
   (I) Dados $v, w \in V$, v e w são ortogonais se, e somente se, $\|v + w\| = \|v - w\|$.
   (II) $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$ para todos $v, w \in V$.
   (III) Se $V = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ e $\langle v, u_i \rangle = \langle w, u_i \rangle$ para todo i, então $v = w$.

   Assinale a alternativa correta:

(a) As três afirmações são falsas.
(b) As três afirmações são verdadeiras.
(c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
(d) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
(e) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

58. Sejam p e q dois polinômios de grau ≤ 11111. Mostre que dados 12173 números reais diferentes quaisquer $\{c_i\}_{i=1}^{12173}$ tem-se

$$\left(\sum_{i=1}^{12173} p(c_i)q(c_i)\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{12173} p(c_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{12173} q(c_i)^2\right)$$

59. Sejam f e g as seguintes funções definidas no intervalo $[25\pi, 50\pi]$:

$$f(t) = \frac{e^{t^{200}+233}}{\operatorname{sen}(t^{300}) + 33}, \quad g(t) = \frac{e^{\operatorname{sen}(t^{350})}}{\ln|\cos\left(\frac{t}{200}\right)|}.$$

Mostre que

$$\left(\int_{25\pi}^{50\pi} f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_{25\pi}^{50\pi} f(t)^2\,dt\right)\left(\int_{25\pi}^{50\pi} g(t)^2\,dt\right).$$

60. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual para mostrar que, dados os números reais estritamente positivos a_1, a_2, a_3, vale a desigualdade:

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

61. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em $[0, 1]$. Prove:

$$\left(\int_0^1 \left(f(t) + g(t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 f(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 g(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

62. Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de E, então $x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n\rangle e_n$, para todo $x \in E$;
(II) se $u, v \in E$ são l.i. e se $w = v - \operatorname{proj}_u v$, então w é ortogonal a u se, e somente se, $\|u\| = 1$;
(III) se $\{u, v, w\} \subset E$ é l.i. e se $z = w - \operatorname{proj}_u w - \operatorname{proj}_v w$, então z é ortogonal a u e a v.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(c) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
(e) nenhuma das afirmações é verdadeira.

63. Encontre uma base ortonormal para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, com respeito ao produto interno $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

64. Encontre uma base ortonormal (com respeito ao produto interno usual) para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 4)$ e $v_3 = (1, 2, -4, -3)$.

65. Considere em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o produto interno definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

(i) Aplique o algoritmo de Gram-Schmidt ao conjunto $\{1, x, x^2\}$ e obtenha um conjunto ortogonal com coeficientes inteiros.

(ii) Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado por $\{1, x, x^2\}$.

66. Em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, considere o produto interno

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Se aplicamos o algoritmo de Gram-Schmidt ao conjunto $\{x-1,\, x-2\}$, obtemos

(a) $\{x-1,\, -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\}$.
(b) $\{x-1,\, -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\}$.
(c) $\{x-1,\, -x-2\}$.
(d) $\{x-1,\, x+2\}$.
(e) $\{x-1,\, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\}$.

67. Em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, considere o produto interno:

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Calcule $\mathrm{proj}_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}\, x^3$. Esboce no mesmo plano cartesiano os gráficos dos polinômios x^3 e $\mathrm{proj}_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}\, x^3$. Interprete o resultado.

68. Em $\mathcal{C}\big([0, 2\pi]\big)$ munido do produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$, calcule $\mathrm{proj}_S(x-2)$, em que $S = [1, \mathrm{sen}(x), \cos(x)]$.

69. Considere o subespaço $U = [1, t]$ do espaço vetorial $\mathcal{C}([0, 2])$, munido do produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(t)g(t)\,dt$. Nessas condições, $\mathrm{proj}_U(e^t)$ é igual a

(a) $\frac{e^2-1}{2} + 3t$
(b) $\frac{e^2-15}{2} + 7t$
(c) $\frac{e^2-1}{2} + 7t$
(d) $\frac{e^2-1}{2} + 5t$
(e) $\frac{e^2-7}{2} + 3t$

70. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que a expressão

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos x - (ax+b)\big)^2\,dx$$

assume o seu valor mínimo, então

(a) $a = 0$ e $b = \frac{2}{\pi}$.
(b) $a = b = 0$.
(c) $a = \frac{2}{\pi}$ e $b = 0$.
(d) $a = 0$ e $b = \pi$.
(e) $a = \pi$ e $b = 0$.

71. Determine o polinômio de grau menor ou igual a 2 que está mais próximo da função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, 1]$, considerando em $\mathcal{C}([0, 1])$ o produto interno dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

72. No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ considere o produto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

(i) Prove que $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^{\mathrm{t}}A)$, em que X^{t} denota a transposta de uma matriz X e $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X (isto é, a soma dos elementos de sua diagonal principal).

(ii) Se $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : x + y - z = 0 \right\}$, determine uma base ortonormal para W.

(iii) Se W é como em (ii), determine o vetor de W que está mais próximo de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

73. Considere, no espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$, o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt.$$

Lembrando que o conjunto $\{1, \operatorname{sen}(t), \cos(t)\}$ é ortogonal, no subespaço $W = [1, \operatorname{sen}(t), \cos(t)]$, o vetor mais próximo de t é

(a) $2 \operatorname{sen}(t)$

(b) $2 \cos(t)$

(c) $\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{\pi}} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{\pi}} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}$

(e) $\frac{2\cos(t)}{\sqrt{\pi}}$

74. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n, com produto interno $\langle\, ,\rangle$. Suponhamos que exista um subconjunto $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ com a seguinte propriedade:

Para todo $u \in V$, se $\langle u, v_i \rangle = 0$ para todo i, com $1 \leq i \leq n$, então $u = 0_V$.

Nessas condições, pode-se afirmar corretamente que

(a) E é uma base ortogonal de V.

(b) E gera V mas pode não ser linearmente independente.

(c) E é uma base de V.

(d) E pode ser linearmente dependente.

(e) E nunca é base de V.

75. No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, com o produto interno dado por $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^{\mathrm{t}} A)$, considere o subespaço $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : X^{\mathrm{t}} = -X\}$. A dimensão de $W^{\perp}$ é igual a

(a) 4.

(b) 3.

(c) 0.

(d) 1.

(e) 2.

76. Se V é um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\, ,\rangle$, S um subespaço de V e $u, v \in V$ são tais que $v \in S^{\perp}$ e $u - v \in S$, então

(a) $\langle u, v \rangle = 0$

(b) $u \in S^{\perp}$

(c) $u = 0_V$

(d) $\langle u, v \rangle = \|v\|^2$

(e) $\langle u, v \rangle = \|u\|$

77. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja

$$U = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : -x + y = 0 \text{ e } -2x + z + 3w = 0\big\}.$$

Assinale a alternativa correta.

(a) $U^\perp = \big[(-2,0,1,3),(-1,1,0,0)\big]$
(b) $U^\perp = \big[(-2,0,1,3)\big]$
(c) $U^\perp = \big[(-1,1,0,0)\big]$
(d) $U^\perp = \big[(1,1,0,0),(2,0,2,3)\big]$
(e) $U^\perp = \big[(-2,0,1,3),(1,1,3,2)\big]$

78. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual e seja

$$S = \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z + w = 0\big\}.$$

(i) Determine uma base ortonormal de S.
(ii) Dado $v \in \mathbb{R}^4$, encontre vetores $v_1 \in S$ e $v_2 \in S^\perp$ tais que $v = v_1 + v_2$.

79. Considere em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o produto interno dado por $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Seja

$$S = \big\{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\big\}.$$

(i) Determine uma base ortonormal de S.
(ii) Dado $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, encontre vetores $p_1 \in S$ e $p_2 \in S^\perp$ tais que $p = p_1 + p_2$.

80. Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, S um subespaço de E, B um subconjunto de S e C um subconjunto de $S^\perp$. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**.

(a) Se B é uma base de S e C é uma base de $S^\perp$, então $B \cup C$ é uma base de E.
(b) $B \cap C \subset \{0_E\}$.
(c) Se B e C são linearmente independentes, então $B \cup C$ é linearmente independente.
(d) Se B é uma base de S e C é uma base de $S^\perp$, então $B \cup C$ gera E, mas pode não ser linearmente independente.
(e) Se B gera S e C gera $S^\perp$, então $B \cup C$ gera E.

81. Sejam S e T subespaços de um espaço vetorial E com produto interno. Considere as afirmações:
(I) $(S+T)^\perp \subset S^\perp \cap T^\perp$;
(II) Se E tem dimensão finita, então $\dim\,(S^\perp)^\perp = \dim S$;
(III) $S^\perp + T^\perp \subset (S \cap T)^\perp$.

Podemos afirmar que:

(a) As afirmações (I) e (III) são verdadeiras somente no caso em que E tem dimensão finita.
(b) As três afirmações são falsas.
(c) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
(d) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(e) As três afirmações são verdadeiras.

82. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\,,\rangle$. Seja U um subespaço de dimensão finita de V e seja $\{u_1,\ldots,u_n\}$ uma base de U. Seja x um elemento de V. Considere as afirmações:
(I) Existem únicos $u \in U$ e $v \in U^\perp$ tais que $x = u + v$.
(II) O elemento de U mais próximo de x é $\dfrac{\langle x,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \cdots + \dfrac{\langle x,u_n\rangle}{\|u_n\|^2}u_n$.
(III) Se U' é um subespaço de V tal que $V = U \oplus U'$, então $U' = U^\perp$.

Está correto o que se afirma em

(a) (I), (II) e (III).
(b) (II) e (III), apenas.
(c) (I) e (II), apenas.
(d) (I), apenas.
(e) (III), apenas.

Respostas

1. (i) não; (ii) não; (iii) não; (iv) sim; (v) não

3. (i) sim; (ii) não; (iii) não; (iv) não; (v) sim; (vi) sim; (vii) sim

4. (d)

6. (i) sim; (ii) sim; (iii) não

8. Uma solução não trivial é $(11, 1, -15, 8)$; combinação linear procurada: $11v_1 + v_2 - 15v_3 + 8v_4 = 0$.

9. (i) $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -4x + y - 4z = 0\big\}$
   (ii) $S = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : -2y + z = 0,\ x + 3y + w = 0\big\}$
   (iii) $S = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 4x + 8y - 5w = 0,\ 8y + 4z - 7w = 0\big\}$

10. (e)

11. (e)

12. $b \neq 0$ e $b \neq 2$

13. (i) $\alpha = \beta = \gamma = 0$; (ii) não

14. (i) l.i.; (ii) l.i.; (iii) l.i.; (iv) l.i.; (v) l.i.; (vi) l.i.

16. (c)

17. (ii) $\big\{(e, 1), (1, e)\big\}$ é uma base; existem outras.

18. (a)

19. A é gerador; A não é l.i.

21. (e)

22. $a \neq 0$, $a \neq -\sqrt{2}$ e $a \neq \sqrt{2}$

23. $\big\{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\big\}$

24. (ii) $B \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

25. $(-3, 1, 0, 1)$

26. (ii) $m = \frac{3}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, $r = 4$ e $s = -2$

27. (e)

28. (i) $\big\{(2, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\big\}$; $\dim S = 2$
    (ii) $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$; $\dim S = 2$
    (iii) $\{1 - x^4, x - x^3, x^2 - x^4\}$; $\dim S = 3$
    (iv) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$; $\dim S = 2$
    (v) $\Big\{(-2, 1, 0, 0, 1), \big(\frac{a-1}{3}, \frac{1+2a}{3}, 1, 0, 0\big), \big(\frac{-2a-3}{3}, \frac{2a-6}{3}, 0, 1, 0\big)\Big\}$; $\dim S = 3$

29. (d)

30. (b)

31. $b = -3$

32. (a)

33. (i) $\{(0,2,-1,0,1),(0,0,3,-1,2)\}$; (ii) $m = 6$; (iii) não

34. (e)

35. (i) $\{(1,0,-1,2,0),(2,1,3,0,0),\ (0,1,-5,4,0)\}$
(ii) $\{(1,0,-1,2,0),(2,1,3,0,0),\ (0,1,-5,4,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$
(iii) $m = 1$ ou $m = -6$

36. A dimensão é 1 e uma base é $\{(1,-2,1,0)\}$.

37. $5 \leq \dim\ S \leq 11$

38. (i) verdadeiro; (ii) verdadeiro; (iii) falso; (iv) falso; (v) falso

39. $M \in S_1 \cap S_2$

40. (e)

41. (e)

42. (b)

43. (i) $\mathbb{R}^3$, (ii) dimensão 1, base $\{(0,1,1)\}$

44. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de S_1, $\dim S_1 = 3$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de S_2, $\dim S_2 = 3$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $S_1 + S_2$, $\dim(S_1 + S_2) = 5$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $S_1 \cap S_1$, $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.

45. $\dim S_1 \cap S_2 \geq 1$

46. $\dim(U + W) = 4$ e $\dim(U \cap W) = 1$

47. (c)

48. (b)

49. (b)

50. (ii) Por exemplo, $W = [x^2]$.

51. (iii) $\dim U = 3, \dim T = 3, \dim(U + T) = 4, \dim(U \cap T) = 2$

52. $t > 0$

53. $\{(a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}$; $\|(1,0)\| = \sqrt{2}$

54. (i) não existe λ; (ii) $\lambda = \frac{2}{3}$

55. (d)

57. (b)

58. Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_{11111}(\mathbb{R})$ munido do produto interno $\langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{12173} p(c_i)q(c_i)$ e aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

59. Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([25\pi, 50\pi])$ munido do produto interno $\langle b, d\rangle = \int_{25\pi}^{50\pi} b(t)d(t)\,dt$. Observe que $f, g \in \mathcal{C}([25\pi, 50\pi])$. Aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz a $|\langle f, g\rangle|^2$.

60. Aplique Cauchy-Schwarz aos vetores $(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3})$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \frac{1}{\sqrt{a_3}}\right)$.

61. Desigualdade triangular no espaço $\mathcal{C}([0, 1])$.

62. (e)

63. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}\left(t - \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}(t^2 - t - 1)\right\}$

64. $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{3\sqrt{2}}{10}, -\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right\}$

65. (i) $\{1, 2x - 1, 6x^2 - 6x + 1\}$; (ii) $\{1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\}$

66. (a)

67. $\dfrac{1}{5}(14x + 3)$

68. $\pi - 2 - 2\,\mathrm{sen}(x)$

69. (e)

70. (a)

71. $(210e - 570)x^2 + (588 - 216e)x + (39e - 105)$

72. (ii) Uma possível base é $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$; (iii) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

73. (a)

74. (c)

75. (b)

76. (d)

77. (a)

78. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{42}}(-1, 2, 6, -1)$.

    (ii) Se $v = (x, y, z, w)$, então

$$v_1 = \tfrac{1}{7}(6x + 2y - z - w, 2x + 3y + 2z + 2w, -x + 2y + 6z - w, -x + 2y - z + 6w),$$
$$v_2 = \tfrac{1}{7}(x - 2y + z + w, -2x + 4y - 2z - 2w, x - 2y + z + w, x - 2y + z + w).$$

79. (i) $\left\{\sqrt{3}\,(x - 1), \sqrt{5}\,(4x^2 - 5x + 1), \sqrt{7}\,(15x^3 - 25x^2 + 11x - 1)\right\}$.

    (ii) Se $p = a + bx + cx^2 + dx^3$, então

$$\begin{aligned} p_1 = \tfrac{1}{4}\big(&(5a + b + c + d) - (15a + 11b + 15c + 15d)x + (45a + 45b + 49c + 45d)x^2 \\ &- (35a + 35b + 35c + 31d)x^3\big), \end{aligned}$$
$$p_2 = \tfrac{1}{4}(a + b + c + d)(-1 + 15x - 45x^2 + 35x^3).$$

80. (d)

81. (e)

82. (d)