Interpolação Polinomial Splines Cúbicos

Prof. Alexandre Lymberopoulos

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Comparação com polinômios de Lagrange

- Dados $n + 1$ pontos do planos (que chamaremos de *nós*) podemos encontrar o único polinômio de grau n que interpola esses pontos.

Comparação com polinômios de Lagrange

- Dados $n+1$ pontos do planos (que chamaremos de *nós*) podemos encontrar o único polinômio de grau n que interpola esses pontos.
    1. Problema: polinômios de grau alto apresentam muita variação na concavidade.

Comparação com polinômios de Lagrange

- Dados $n + 1$ pontos do planos (que chamaremos de *nós*) podemos encontrar o único polinômio de grau n que interpola esses pontos.
  1. Problema: polinômios de grau alto apresentam muita variação na concavidade.
  2. Solução: usar polinômios de grau baixo em cada intervalo entre os nós.

Comparação com polinômios de Lagrange

- Dados $n + 1$ pontos do planos (que chamaremos de *nós*) podemos encontrar o único polinômio de grau n que interpola esses pontos.
    1. Problema: polinômios de grau alto apresentam muita variação na concavidade.
    2. Solução: usar polinômios de grau baixo em cada intervalo entre os nós.
- Isto chama-se *aproximação por polinômios seccionados*.

Comparação com polinômios de Lagrange

- Dados $n+1$ pontos do planos (que chamaremos de *nós*) podemos encontrar o único polinômio de grau n que interpola esses pontos.
  1. Problema: polinômios de grau alto apresentam muita variação na concavidade.
  2. Solução: usar polinômios de grau baixo em cada intervalo entre os nós.
- Isto chama-se *aproximação por polinômios seccionados*.
- O mais simples é usar polinômios seccionados de grau 1.

Comparação com polinômios de Lagrange

- Dados $n+1$ pontos do planos (que chamaremos de *nós*) podemos encontrar o único polinômio de grau n que interpola esses pontos.
  1. Problema: polinômios de grau alto apresentam muita variação na concavidade.
  2. Solução: usar polinômios de grau baixo em cada intervalo entre os nós.
- Isto chama-se *aproximação por polinômios seccionados*.
- O mais simples é usar polinômios seccionados de grau 1.
  1. Problema: a função obtida pode não ser derivável nos nós.

Comparação com polinômios de Lagrange

- Dados $n+1$ pontos do planos (que chamaremos de *nós*) podemos encontrar o único polinômio de grau n que interpola esses pontos.
  1. Problema: polinômios de grau alto apresentam muita variação na concavidade.
  2. Solução: usar polinômios de grau baixo em cada intervalo entre os nós.
- Isto chama-se *aproximação por polinômios seccionados*.
- O mais simples é usar polinômios seccionados de grau 1.
  1. Problema: a função obtida pode não ser derivável nos nós.
  2. Solução: usar polinômios seccionados de grau maior.

Comparação com polinômios de Lagrange

- Dados $n+1$ pontos do planos (que chamaremos de *nós*) podemos encontrar o único polinômio de grau n que interpola esses pontos.
  1. Problema: polinômios de grau alto apresentam muita variação na concavidade.
  2. Solução: usar polinômios de grau baixo em cada intervalo entre os nós.
- Isto chama-se *aproximação por polinômios seccionados*.
- O mais simples é usar polinômios seccionados de grau 1.
  1. Problema: a função obtida pode não ser derivável nos nós.
  2. Solução: usar polinômios seccionados de grau maior.
- Polinômios de grau 2?

Comparação com polinômios de Lagrange

- Dados $n+1$ pontos do planos (que chamaremos de *nós*) podemos encontrar o único polinômio de grau n que interpola esses pontos.
  1. Problema: polinômios de grau alto apresentam muita variação na concavidade.
  2. Solução: usar polinômios de grau baixo em cada intervalo entre os nós.
- Isto chama-se *aproximação por polinômios seccionados*.
- O mais simples é usar polinômios seccionados de grau 1.
  1. Problema: a função obtida pode não ser derivável nos nós.
  2. Solução: usar polinômios seccionados de grau maior.
- Polinômios de grau 2?
- Também não!

Comparação com polinômios de Lagrange

- Dados $n + 1$ pontos do planos (que chamaremos de *nós*) podemos encontrar o único polinômio de grau n que interpola esses pontos.
  1. Problema: polinômios de grau alto apresentam muita variação na concavidade.
  2. Solução: usar polinômios de grau baixo em cada intervalo entre os nós.
- Isto chama-se *aproximação por polinômios seccionados*.
- O mais simples é usar polinômios seccionados de grau 1.
  1. Problema: a função obtida pode não ser derivável nos nós.
  2. Solução: usar polinômios seccionados de grau maior.
- Polinômios de grau 2?
- Também não!
- Se a derivada é pré-determinada nos nós mais extremos a existência da aproximação por polinômios seccionados de grau 2 fica comprometida.

O que é um spline cúbico?

- Tipicamente usa-se a aproximação por polinômios seccionados de grau 3 e ela é chamada de *interpolação com spline cúbico*.

O que é um spline cúbico?

- Tipicamente usa-se a aproximação por polinômios seccionados de grau 3 e ela é chamada de *interpolação com spline cúbico*.
- Se $p(x)$ tem grau 3 então existem 4 constantes a determinar.

O que é um spline cúbico?

- Tipicamente usa-se a aproximação por polinômios seccionados de grau 3 e ela é chamada de *interpolação com spline cúbico*.
- Se $p(x)$ tem grau 3 então existem 4 constantes a determinar.
    1. Vantagem: isto permite que possamos garantir continuidade da função e até de sua derivada de segunda ordem, mesmo quando especificamos a derivada primeira da função a ser interpolada nos extremos do intervalo.

O que é um spline cúbico?

- Tipicamente usa-se a aproximação por polinômios seccionados de grau 3 e ela é chamada de *interpolação com spline cúbico*.
- Se $p(x)$ tem grau 3 então existem 4 constantes a determinar.
  1. Vantagem: isto permite que possamos garantir continuidade da função e até de sua derivada de segunda ordem, mesmo quando especificamos a derivada primeira da função a ser interpolada nos extremos do intervalo.
  2. Desvantagem: as derivadas primeiras do spline não coincidem com a função original, mesmo nos nós.

Formalização do conceito

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, um *spline cúbico interpolador* é um função $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo

Formalização do conceito

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, um *spline cúbico interpolador* é um função $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo
  1. $S(x)$ é um polinômio cúbico, indicado por $S_j(x)$ no intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para cada $0 \leq j \leq n - 1$;

Formalização do conceito

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, um *spline cúbico interpolador* é um função $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo
  1. $S(x)$ é um polinômio cúbico, indicado por $S_j(x)$ no intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para cada $0 \leq j \leq n - 1$;
  2. $S(x_j) = f(x_j)$, para cada $0 \leq j \leq n$;

Formalização do conceito

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, um *spline cúbico interpolador* é um função $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo
    1. $S(x)$ é um polinômio cúbico, indicado por $S_j(x)$ no intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para cada $0 \leq j \leq n - 1$;
    2. $S(x_j) = f(x_j)$, para cada $0 \leq j \leq n$;
    3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n - 2$;

Formalização do conceito

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, um *spline cúbico interpolador* é um função $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo
  1. $S(x)$ é um polinômio cúbico, indicado por $S_j(x)$ no intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para cada $0 \leq j \leq n - 1$;
  2. $S(x_j) = f(x_j)$, para cada $0 \leq j \leq n$;
  3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n - 2$;
  4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n - 2$;

Formalização do conceito

- Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, um *spline cúbico interpolador* é um função $S:[a,b]\to\mathbb{R}$ satisfazendo
    1. $S(x)$ é um polinômio cúbico, indicado por $S_j(x)$ no intervalo $[x_j,x_{j+1}]$, para cada $0\leq j\leq n-1$;
    2. $S(x_j)=f(x_j)$, para cada $0\leq j\leq n$;
    3. $S_{j+1}(x_{j+1})=S_j(x_{j+1})$, para cada $0\leq j\leq n-2$;
    4. $S'_{j+1}(x_{j+1})=S'_j(x_{j+1})$, para cada $0\leq j\leq n-2$;
    5. $S''_{j+1}(x_{j+1})=S''_j(x_{j+1})$, para cada $0\leq j\leq n-2$;

Formalização do conceito

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, um *spline cúbico interpolador* é um função $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo
  1. $S(x)$ é um polinômio cúbico, indicado por $S_j(x)$ no intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para cada $0 \leq j \leq n-1$;
  2. $S(x_j) = f(x_j)$, para cada $0 \leq j \leq n$;
  3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n-2$;
  4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n-2$;
  5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n-2$;
  6. Vale uma das seguintes propriedades

Formalização do conceito

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, um *spline cúbico interpolador* é um função $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo
  1. $S(x)$ é um polinômio cúbico, indicado por $S_j(x)$ no intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para cada $0 \leq j \leq n - 1$;
  2. $S(x_j) = f(x_j)$, para cada $0 \leq j \leq n$;
  3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n - 2$;
  4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n - 2$;
  5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n - 2$;
  6. Vale uma das seguintes propriedades
     - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (chamado *spline natural* ou de *contorno livre*);

FORMALIZAÇÃO DO CONCEITO

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, um *spline cúbico interpolador* é um função $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo
  1. $S(x)$ é um polinômio cúbico, indicado por $S_j(x)$ no intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para cada $0 \leq j \leq n-1$;
  2. $S(x_j) = f(x_j)$, para cada $0 \leq j \leq n$;
  3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n-2$;
  4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n-2$;
  5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n-2$;
  6. Vale uma das seguintes propriedades
     - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (chamado *spline natural* ou de *contorno livre*);
     - $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$ (chamado *spline restrito*);

Formalização do conceito

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, um *spline cúbico interpolador* é um função $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo
  1. $S(x)$ é um polinômio cúbico, indicado por $S_j(x)$ no intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para cada $0 \leq j \leq n-1$;
  2. $S(x_j) = f(x_j)$, para cada $0 \leq j \leq n$;
  3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n-2$;
  4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n-2$;
  5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n-2$;
  6. Vale uma das seguintes propriedades
     - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (chamado *spline natural* ou de *contorno livre*);
     - $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$ (chamado *spline restrito*);
  7. O nome contorno livre deve-se ao fato desse spline ter a forma de uma haste flexível se esta fosse forçada a passar pelos nós dados;

Formalização do conceito

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, um *spline cúbico interpolador* é um função $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo
  1. $S(x)$ é um polinômio cúbico, indicado por $S_j(x)$ no intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para cada $0 \leq j \leq n - 1$;
  2. $S(x_j) = f(x_j)$, para cada $0 \leq j \leq n$;
  3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n - 2$;
  4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n - 2$;
  5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$, para cada $0 \leq j \leq n - 2$;
  6. Vale uma das seguintes propriedades
     - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (chamado *spline natural* ou de *contorno livre*);
     - $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$ (chamado *spline restrito*);
  7. O nome contorno livre deve-se ao fato desse spline ter a forma de uma haste flexível se esta fosse forçada a passar pelos nós dados;
  8. Splines restritos dão aproximações melhores que os naturais, mas exigem mais informação sobre função a ser interpolada.

Como são os coeficientes de um spline?

- Cada secção do spline, S_j, para $0 \leq j \leq n-1$, tem a forma

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3.$$

Como são os coeficientes de um spline?

- Cada secção do spline, S_j, para $0 \leq j \leq n-1$, tem a forma

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3.$$

- Lembrando que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$, $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ e chamando $x_{j+1} - x_j = h_j$ temos

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3, 0 \leq j \leq n-1. \tag{1}$$

Como são os coeficientes de um spline?

- Cada secção do spline, S_j, para $0 \leq j \leq n-1$, tem a forma

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3.$$

- Lembrando que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$, $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ e chamando $x_{j+1} - x_j = h_j$ temos

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3, 0 \leq j \leq n-1. \tag{1}$$

- Definindo $b_n = S'(x_n)$ e lembrando que $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ temos

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2, 0 \leq j \leq n-1. \tag{2}$$

Como são os coeficientes de um spline?

- Cada secção do spline, S_j, para $0 \leq j \leq n-1$, tem a forma

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3.$$

- Lembrando que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$, $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ e chamando $x_{j+1} - x_j = h_j$ temos

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3, 0 \leq j \leq n-1. \tag{1}$$

- Definindo $b_n = S'(x_n)$ e lembrando que $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ temos

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2, 0 \leq j \leq n-1. \tag{2}$$

- Definindo $c_n = S''(x_n)/2$ e lembrando que $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ temos

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j, 0 \leq j \leq n-1. \tag{3}$$

Mais contas...

- Isolando d_j em (3) e substituindo em (1) e (2), para cada $0 \leq j \leq n$ obtemos

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}), \tag{4}$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}). \tag{5}$$

Mais contas...

- Isolando d_j em (3) e substituindo em (1) e (2), para cada $0 \leq j \leq n$ obtemos

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}), \tag{4}$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}). \tag{5}$$

- Isolando b_j em (4) obtemos

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}). \tag{6}$$

e trocando j por $j - 1$ temos

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j). \tag{7}$$

Um pouco mais...

- Trocando j por $j-1$ em (5) e substituindo (7) e (6) nela obtemos, para cada $1 \leq j \leq n-1$,

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1}+h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1}-a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}). \quad (8)$$

Um pouco mais...

- Trocando j por $j-1$ em (5) e substituindo (7) e (6) nela obtemos, para cada $1 \leq j \leq n-1$,

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}). \quad (8)$$

- As equações acima produzem um sistema linear cujas incógnitas são somente os c_j, uma vez que h_j e a_j são dados iniciais do problema.

Um pouco mais...

- Trocando j por $j-1$ em (5) e substituindo (7) e (6) nela obtemos, para cada $1 \leq j \leq n-1$,

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}). \quad (8)$$

- As equações acima produzem um sistema linear cujas incógnitas são somente os c_j, uma vez que h_j e a_j são dados iniciais do problema.
- Veremos a seguir que o sistema obtido com as equações em (8) é sempre possível e determinado tanto no caso de um spline natural como no de um spline restrito.

Existência e unicidade do Spline Natural

- O seguinte resultado garante a unicidade do spline natural.

Teorema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ um conjunto dado de nós. Então f admite um único spline natural S com esses nós.

Existência e unicidade do Spline Natural

- O seguinte resultado garante a unicidade do spline natural.

Teorema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ um conjunto dado de nós. Então f admite um único spline natural S com esses nós.

- Demonstração:

Existência e unicidade do Spline Natural

- O seguinte resultado garante a unicidade do spline natural.

Teorema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ um conjunto dado de nós. Então f admite um único spline natural S com esses nós.

- Demonstração:
  1. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, donde $c_n = S''(x_n) = 0$ e $2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0) = S''(x_0) = 0$, ou seja $c_0 = 0$.

Existência e unicidade do Spline Natural

- O seguinte resultado garante a unicidade do spline natural.

Teorema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ um conjunto dado de nós. Então f admite um único spline natural S com esses nós.

- Demonstração:
  1. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, donde $c_n = S''(x_n) = 0$ e $2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0) = S''(x_0) = 0$, ou seja $c_0 = 0$.
  2. Esses valores junto com as equações (8) produzem um sistema $Ax = b$ possível determinado.

Existência e unicidade do Spline Natural

- As matrizes envolvidas no sistema anterior são

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

e

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2-a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1-a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1}-a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Existência e unicidade do Spline Restrito

- O seguinte resultado garante a unicidade do spline restrito.

Teorema

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ *um conjunto dado de nós. Então* f *admite um único spline restrito* S *com esses nós satisfazendo* $S'(a) = f'(a)$ *e* $S'(b) = f'(b)$.

Existência e unicidade do Spline Restrito

- O seguinte resultado garante a unicidade do spline restrito.

Teorema

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ um conjunto dado de nós. Então f admite um único spline restrito S com esses nós satisfazendo $S'(a) = f'(a)$ e $S'(b) = f'(b)$.

- Demonstração:

Existência e unicidade do Spline Restrito

- O seguinte resultado garante a unicidade do spline restrito.

Teorema

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ um conjunto dado de nós. Então f admite um único spline restrito S com esses nós satisfazendo $S'(a) = f'(a)$ e $S'(b) = f'(b)$.

- Demonstração:
  1. $b_0 = S'(x_0) = f'(a)$, donde, usando (6) com $j = 0$ temos

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0)f'(a).$$

analogamente temos

$$2h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}).$$

Existência e unicidade do Spline Restrito

- O seguinte resultado garante a unicidade do spline restrito.

Teorema

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ um conjunto dado de nós. Então f admite um único spline restrito S com esses nós satisfazendo $S'(a) = f'(a)$ e $S'(b) = f'(b)$.

- Demonstração:
  1. $b_0 = S'(x_0) = f'(a)$, donde, usando (6) com $j = 0$ temos
  $$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0)f'(a).$$
  analogamente temos
  $$2h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}).$$
  2. Essas equações junto com as equações (8) produzem um sistema $Ax = b$ possível determinado.

Existência e unicidade do Spline Restrito

- As matrizes envolvidas no sistema anterior são as mesmas do caso dos splines naturais, exceto a primeira e última linhas de A e b que são respectivamente

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ A_n &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}.$$

e

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ b_n &= 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Minimalidade do spline natural

- Considere V o espaço vetorial de todas as funções de classe $C^2([a, b])$ que interpolam os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

Minimalidade do spline natural

- Considere V o espaço vetorial de todas as funções de classe $C^2([a,b])$ que interpolam os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

Teorema

Se $s \in V$ é o spline cúbico natural então $\|s''\|_2 \leq \|f''\|_2$ para toda $f \in V$.

Minimalidade do spline natural

- Considere V o espaço vetorial de todas as funções de classe $C^2([a, b])$ que interpolam os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

Teorema

Se $s \in V$ é o spline cúbico natural então $\|s''\|_2 \leq \|f''\|_2$ para toda $f \in V$.

- Demonstração:

Minimalidade do spline natural

- Considere V o espaço vetorial de todas as funções de classe $C^2([a,b])$ que interpolam os pontos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$.

Teorema

Se $s \in V$ é o spline cúbico natural então $\|s''\|_2 \leq \|f''\|_2$ para toda $f \in V$.

- Demonstração:
  1. Se $f \in V$, então existe $g \in C^2([a,b])$, com $g(x_i) = 0, 0 \leq i \leq n$ tal que $f(x) = s(x) + g(x)$.

Minimalidade do spline natural

- Considere V o espaço vetorial de todas as funções de classe $C^2([a,b])$ que interpolam os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

Teorema

Se $s \in V$ é o spline cúbico natural então $\|s''\|_2 \leq \|f''\|_2$ para toda $f \in V$.

- Demonstração:
  1. Se $f \in V$, então existe $g \in C^2([a,b])$, com $g(x_i) = 0, 0 \leq i \leq n$ tal que $f(x) = s(x) + g(x)$.
  2. Logo $f''(x) = s''(x) + g''(x)$ e

Minimalidade do spline natural

- Considere V o espaço vetorial de todas as funções de classe $C^2([a,b])$ que interpolam os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

Teorema

Se $s \in V$ é o spline cúbico natural então $\|s''\|_2 \leq \|f''\|_2$ para toda $f \in V$.

- Demonstração:
  1. Se $f \in V$, então existe $g \in C^2([a,b])$, com $g(x_i) = 0, 0 \leq i \leq n$ tal que $f(x) = s(x) + g(x)$.
  2. Logo $f''(x) = s''(x) + g''(x)$ e
  3. $\|f''\|_2^2 = \|s''(x) + g''(x)\|_2^2 = \|s''(x)\|_2^2 + \|g''(x)\|_2^2 + 2\langle s'', g''\rangle_2$, onde

Minimalidade do spline natural

- Considere V o espaço vetorial de todas as funções de classe $C^2([a,b])$ que interpolam os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

Teorema

Se $s \in V$ é o spline cúbico natural então $\|s''\|_2 \leq \|f''\|_2$ para toda $f \in V$.

- Demonstração:
  1. Se $f \in V$, então existe $g \in C^2([a,b])$, com $g(x_i) = 0, 0 \leq i \leq n$ tal que $f(x) = s(x) + g(x)$.
  2. Logo $f''(x) = s''(x) + g''(x)$ e
  3. $\|f''\|_2^2 = \|s''(x) + g''(x)\|_2^2 = \|s''(x)\|_2^2 + \|g''(x)\|_2^2 + 2\langle s'', g''\rangle_2$, onde
  4. $\langle s'', g''\rangle_2 = \int_{x_0}^{x_n} s''g''\,dx = 0$ (integrando por partes).

Minimalidade do spline natural

- Considere V o espaço vetorial de todas as funções de classe $C^2([a,b])$ que interpolam os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

Teorema

Se $s \in V$ é o spline cúbico natural então $\|s''\|_2 \leq \|f''\|_2$ para toda $f \in V$.

- Demonstração:
  1. Se $f \in V$, então existe $g \in C^2([a,b])$, com $g(x_i) = 0, 0 \leq i \leq n$ tal que $f(x) = s(x) + g(x)$.
  2. Logo $f''(x) = s''(x) + g''(x)$ e
  3. $\|f''\|_2^2 = \|s''(x) + g''(x)\|_2^2 = \|s''(x)\|_2^2 + \|g''(x)\|_2^2 + 2\langle s'', g''\rangle_2$, onde
  4. $\langle s'', g''\rangle_2 = \displaystyle\int_{x_0}^{x_n} s''g''\,dx = 0$ (integrando por partes).
  5. Logo $\|s''\|_2 \leq \|f''\|_2$.

Eficiência na aproximação

- O seguinte resultado fornece estimativa para o erro máximo entre o spline e a função interpolada.

Teorema

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^4 *tal que*

$$\max_{x \in [a,b]} \left\{ f^{(4)}(x) \right\} = M$$

e S *o spline restrito que interpola* f *nos pontos* $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$. *Então*

$$\max_{x \in [a,b]} \{ f(x) - s(x) \} \leq \frac{5M}{384} \max_{0 \leq j \leq n-1} \{ h_j \}.$$

Tudo pronto!

- O MATLAB possui uma rotina pronta chamada `spline` que faz tanto splines naturais como restritos.

Tudo pronto!

- O MATLAB possui uma rotina pronta chamada `spline` que faz tanto splines naturais como restritos.
- Um spline natural que ajusta 10 pontos igualmente espaçados entre 0 e 10 para a função $f(x) = \sin(x)$ obtêm-se fazendo

Tudo pronto!

- O MATLAB possui uma rotina pronta chamada `spline` que faz tanto splines naturais como restritos.
- Um spline natural que ajusta 10 pontos igualmente espaçados entre 0 e 10 para a função $f(x) = \sin(x)$ obtêm-se fazendo
- `x=0:10; y=sin(x);`

Tudo pronto!

- O MATLAB possui uma rotina pronta chamada `spline` que faz tanto splines naturais como restritos.
- Um spline natural que ajusta 10 pontos igualmente espaçados entre 0 e 10 para a função $f(x) = \sin(x)$ obtêm-se fazendo
- `x=0:10; y=sin(x);`
- `xx=0:0.01:10; yy=spline(x,y,xx);`

Tudo pronto!

- O MATLAB possui uma rotina pronta chamada `spline` que faz tanto splines naturais como restritos.
- Um spline natural que ajusta 10 pontos igualmente espaçados entre 0 e 10 para a função $f(x) = \sin(x)$ obtêm-se fazendo
- `x=0:10; y=sin(x);`
- `xx=0:0.01:10; yy=spline(x,y,xx);`
- `plot(x,y,'o',xx,yy,'b',xx,sin(xx),'g');`

Tudo pronto!

- O MATLAB possui uma rotina pronta chamada `spline` que faz tanto splines naturais como restritos.
- Um spline natural que ajusta 10 pontos igualmente espaçados entre 0 e 10 para a função $f(x) = \sin(x)$ obtêm-se fazendo
- `x=0:10; y=sin(x);`
- `xx=0:0.01:10; yy=spline(x,y,xx);`
- `plot(x,y,'o',xx,yy,'b',xx,sin(xx),'g');`
- Um spline restrito que ajusta os mesmos pontos para a função $f(x) = \sin(x)$, com a condição $s'(0) = m$ e $s'(10) = n$ obtêm-se fazendo

Tudo pronto!

- O MATLAB possui uma rotina pronta chamada `spline` que faz tanto splines naturais como restritos.
- Um spline natural que ajusta 10 pontos igualmente espaçados entre 0 e 10 para a função $f(x) = \sin(x)$ obtêm-se fazendo
- `x=0:10; y=sin(x);`
- `xx=0:0.01:10; yy=spline(x,y,xx);`
- `plot(x,y,'o',xx,yy,'b',xx,sin(xx),'g');`
- Um spline restrito que ajusta os mesmos pontos para a função $f(x) = \sin(x)$, com a condição $s'(0) = m$ e $s'(10) = n$ obtêm-se fazendo
- `z=[m y n];`

Tudo pronto!

- O MATLAB possui uma rotina pronta chamada `spline` que faz tanto splines naturais como restritos.
- Um spline natural que ajusta 10 pontos igualmente espaçados entre 0 e 10 para a função $f(x) = \sin(x)$ obtêm-se fazendo
- `x=0:10; y=sin(x);`
- `xx=0:0.01:10; yy=spline(x,y,xx);`
- `plot(x,y,'o',xx,yy,'b',xx,sin(xx),'g');`
- Um spline restrito que ajusta os mesmos pontos para a função $f(x) = \sin(x)$, com a condição $s'(0) = m$ e $s'(10) = n$ obtêm-se fazendo
- `z=[m y n];`
- `zz=spline(x,z,xx);`

Tudo pronto!

- O MATLAB possui uma rotina pronta chamada `spline` que faz tanto splines naturais como restritos.
- Um spline natural que ajusta 10 pontos igualmente espaçados entre 0 e 10 para a função $f(x) = \sin(x)$ obtêm-se fazendo
- `x=0:10; y=sin(x);`
- `xx=0:0.01:10; yy=spline(x,y,xx);`
- `plot(x,y,'o',xx,yy,'b',xx,sin(xx),'g');`
- Um spline restrito que ajusta os mesmos pontos para a função $f(x) = \sin(x)$, com a condição $s'(0) = m$ e $s'(10) = n$ obtêm-se fazendo
- `z=[m y n];`
- `zz=spline(x,z,xx);`
- `plot(x,y,'o',xx,zz,'b',xx,sin(xx),'r');`

Vôo do pato

- Os seguintes dados foram obtidos a partir de pontos do perfil das costas de um pato ao longo de um vôo

x	y	x	y	x	y
0.9	1.3	4.4	2.15	10.5	1.4
1.3	1.5	4.7	2.05	11.3	0.9
1.9	1.85	5	2.1	11.6	0.7
2.1	2.1	6	2.25	12	0.6
2.6	2.6	7	2.3	12.6	0.5
3	2.7	8	2.25	13	0.4
3.9	2.4	9.2	1.95	13.3	0.25

Vôo do pato

- Os seguintes dados foram obtidos a partir de pontos do perfil das costas de um pato ao longo de um vôo

x	y	x	y	x	y
0.9	1.3	4.4	2.15	10.5	1.4
1.3	1.5	4.7	2.05	11.3	0.9
1.9	1.85	5	2.1	11.6	0.7
2.1	2.1	6	2.25	12	0.6
2.6	2.6	7	2.3	12.6	0.5
3	2.7	8	2.25	13	0.4
3.9	2.4	9.2	1.95	13.3	0.25

- Determine o polinômio interpolador de grau 20, bem como o spline natural e o restrito (estime valores para as derivadas nos extremos) para esse conjunto de dados.