

1Q1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear simétrico, onde \mathbb{R}^2 é munido de seu produto interno canônico. Considere a base $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ e suponha que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

- (a) $a = 1$;
- (b) $a = -1$;
- (c) $a = 0$;
- (d) $a = 2$;
- (e) $a = -2$.

1Q2. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial real de dimensão $n < +\infty$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) T é inversível se e somente se zero não é um autovalor de T ;
- (II) se T é diagonalizável então kT é diagonalizável, para todo $k \in \mathbb{R}$;
- (III) se M é uma matriz inversível $n \times n$, B é uma base de V e $M^{-1}[T]_B M$ é uma matriz diagonal então $M^{-1} = M^t$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

1Q3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

onde $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. Temos que $T(3, 5, 4)$ é igual a:

- (a) $(3, 4, 5)$;
- (b) $(7, 11, 13)$;
- (c) $(10, 12, 12)$;
- (d) $(5, 5, 7)$;
- (e) $(0, 1, 2)$.

1Q4. Seja dado um sistema de coordenadas ortogonal. Uma equação reduzida para a cônica:

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y = 5$$

é:

- (a) $3u^2 - v^2 = 7$;
- (b) $3u^2 - v^2 = 5$;
- (c) $u^2 - 3v^2 = 7$;
- (d) $3u^2 + v^2 = 7$;
- (e) $-u^2 + 3v^2 = 10$.

1Q5. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) se A é uma matriz real $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de A então o seu conjugado $\bar{\lambda}$ também é um autovalor de A ;
- (b) se W_1, W_2, W_3 são subespaços de um espaço vetorial V tais que as interseções $W_1 \cap W_2$ e $W_1 \cap W_3$ são nulas então $W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{0\}$;
- (c) se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ é um operador linear diagonalizável então $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^2)$;
- (d) se A é uma matriz real simétrica $n \times n$ então a matriz $A - iI$ é inversível, onde I denota a matriz identidade $n \times n$ e i denota a unidade imaginária;
- (e) se A é uma matriz $n \times n$ e as colunas de A constituem uma base ortonormal de \mathbb{R}^n relativamente a seu produto interno canônico então A é inversível e $A^{-1} = A^t$.

1Q6. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + cy(t), \\ y'(t) = cx(t) + by(t), \end{cases}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que a matriz $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ tem autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 7$, e que $(2, 5)$ é um autovetor associado a λ_1 então a solução geral do sistema acima é:

- (a) $x(t) = 2k_1e^{3t} - 5k_2e^{7t}, y(t) = 5k_1e^{3t} + 2k_2e^{7t}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$;
- (b) $x(t) = -2k_1e^{3t} - 5k_2e^{7t}, y(t) = 5k_1e^{3t} + 2k_2e^{7t}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$;
- (c) $x(t) = 2k_1e^{3t} + 5k_2e^{7t}, y(t) = 5k_1e^{3t} + 2k_2e^{7t}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$;
- (d) $x(t) = 2k_1e^{3t} - 5k_2e^{7t}, y(t) = -5k_1e^{3t} + 2k_2e^{7t}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$;
- (e) $x(t) = 2k_1e^{3t} - 5k_2e^{7t}, y(t) = 5k_1e^{3t} - 2k_2e^{7t}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

1Q7. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se B é uma base de V então o determinante de $[T]_B$ é igual ao produto $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de T , repetidos de acordo com suas multiplicidades algébricas;
- (II) T é necessariamente diagonalizável;
- (III) se λ é um autovalor de T então seu conjugado $\bar{\lambda}$ também é um autovalor de T e $\dim(V(\lambda)) = \dim(V(\bar{\lambda}))$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

1Q8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que a matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

tem autovalores 3 e 8, pode-se concluir que:

- (a) $\{a, b\} = \{3, 8\}$;
- (b) $\{a, b\} = \{2, 3\}$;
- (c) $a = 3$ e $b = 3$;
- (d) $a = 6$ e $b = 6$;
- (e) $\{a, b\} = \{5, 6\}$.

1Q9. Considere \mathbb{R}^4 munido de seu produto interno canônico e seja S o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado pelos vetores $(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1, 0)$. Se $v = (a, b, c, d)$ é o vetor de S mais próximo do vetor $(1, 2, 0, 1)$ então:

- (a) $3(a + b + c + d) = 5$;
- (b) $2(a + b + c + d) = 7$;
- (c) $3(a + b + c + d) = 10$;
- (d) $3(a + b + c + d) = 7$;
- (e) $2(a + b + c + d) = 5$.

1Q10. A solução do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -x(t), \end{cases}$$

satisfazendo as condições iniciais $x(0) = -1$, $y(0) = 3$ é:

- (a) $x(t) = e^t(5 \operatorname{sen} t + \cos t)$, $y(t) = e^t(-3 \cos t - 2 \operatorname{sen} t)$;
- (b) $x(t) = e^t(3 \operatorname{sen} t - \cos t)$, $y(t) = e^t(3 \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$;
- (c) $x(t) = e^{2t}(3 \operatorname{sen} t - \cos t)$, $y(t) = e^{2t}(3 \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$;
- (d) $x(t) = e^t(5 \operatorname{sen} t - \cos t)$, $y(t) = e^t(3 \cos t - 2 \operatorname{sen} t)$;
- (e) $x(t) = 5 \operatorname{sen} t - \cos t$, $y(t) = 3 \cos t - 2 \operatorname{sen} t$.

1Q11. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a expressão:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos x - (ax + b)]^2 dx$$

assume o seu valor mínimo. Assinale a alternativa correta:

- (a) $a = 0$ e $b = \frac{2}{\pi}$;
- (b) $a = b = 0$;
- (c) $a = \frac{2}{\pi}$ e $b = 0$;
- (d) $a = 0$ e $b = \pi$;
- (e) $a = \pi$ e $b = 0$.

1Q12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico, onde \mathbb{R}^3 é munido de seu produto interno canônico. Assuma que:

$$\operatorname{Ker}(T) = [(1, 1, 0), (0, 1, 1)].$$

Se $\lambda = 2$ é um autovalor de T então $T(5, -2, 2)$ é igual a:

- (a) $(1, -1, 1)$;
- (b) $(2, -5, -1)$;
- (c) $(0, 0, 0)$;
- (d) $(6, -6, 6)$;
- (e) $(3, -3, 3)$.

1Q13. Dado um número real $a > 1$ então:

$$\langle\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle\rangle = ax_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2, \quad x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R},$$

define um produto interno em \mathbb{R}^2 . Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 1) = (1, -1)$. Sabendo-se que T é simétrico em relação ao produto interno $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$, pode-se concluir que:

- (a) $a = 2$;
- (b) $a = 4$;
- (c) $a = 5$;
- (d) $a = 3$;
- (e) $a = \frac{3}{2}$.

1Q14. Seja dado um sistema de coordenadas ortogonal. Uma equação reduzida para a quádrlica:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + x + y + z = 5$$

é:

- (a) $3u^2 = 7$;
- (b) $3u^2 = 4$;
- (c) $u^2 + v^2 + w^2 = \frac{7}{4}$;
- (d) $u^2 = \frac{7}{4}$;
- (e) $3u^2 + v^2 + w^2 = \frac{7}{4}$.

1Q15. Sejam $T, S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operadores lineares tais que:

$$T(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, 3z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad [S \circ T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

O traço da matriz $[S]_{\text{can}}$ (ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal de $[S]_{\text{can}}$) é igual a:

- (a) 3;
- (b) 2;
- (c) 5;
- (d) 1;
- (e) 4.

1Q16. Suponha que $A = MBM^{-1}$, onde:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e $a \in \mathbb{R}$. Se $A^{100} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ então $x + y + z + t$ é igual a:

- (a) $1 + 2^{100} + a(1 + 2^{100})$;
- (b) $1 - 2^{100} + a(1 + 2^{100})$;
- (c) $1 + a^{100} + 2^{100}$;
- (d) $1 + 2^{100} + a(1 - 2^{100})$;
- (e) $1 + a(1 - 2^{100})$.

1Q17. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $T(p) = p'$, para todo $p \in P_2(\mathbb{R})$. Pode-se afirmar que:

- (a) T é diagonalizável;
- (b) T não é diagonalizável, pois 0 é um autovalor de multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1;
- (c) T não é diagonalizável, pois 0 é um autovalor de multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 2;
- (d) T não é diagonalizável, pois 0 é um autovalor de multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 1;
- (e) T não é diagonalizável, pois seu polinômio característico possui uma raiz complexa não real.

1Q18. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 7, S_1 e S_2 subespaços de V tais que $V = S_1 + S_2$ e $\dim(S_1) = \dim(S_2)$. Pode-se afirmar que:

- (a) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 5$;
- (b) $\dim(S_1 \cap S_2)$ é ímpar;
- (c) $\dim(S_1 \cap S_2) \geq 3$;
- (d) $\dim(S_1 \cap S_2) \leq 5$;
- (e) $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 3$.

1Q19. Seja $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ um operador linear com polinômio característico $p(t) = (1 - t)^2(2 - t)^3$. Se T é diagonalizável, pode-se afirmar que:

- (a) $\dim(\text{Ker}(T - I)) + \dim(\text{Im}(T - 2I)) = 6$;
- (b) $\dim(\text{Im}(T - I)) + \dim(\text{Ker}(T - 2I)) = 5$;
- (c) $\dim(\text{Im}(T - I)) + \dim(\text{Im}(T - 2I)) = 6$;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T - I)) + \dim(\text{Im}(T - 2I)) = 5$;
- (e) $\dim(\text{Im}(T - I)) + \dim(\text{Ker}(T - 2I)) = 6$.

1Q20. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se existe uma base ortogonal de V formada por autovetores de T então T é simétrico;
- (II) se T é simétrico e $u, v \in V$ são autovetores de T associados a um autovalor λ então u é ortogonal a v ;
- (III) T é simétrico se e somente se T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.