Q1. Seja V um espaço vetorial de dimensão 10 e sejam W_1, W_2 subespaços de V tais que $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 8$, $W_1 \neq W_2$ e $W_1 + W_2 \neq V$. Pode-se afirmar que a dimensão de $W_1 \cap W_2$ é igual a:

(a) 7;
(b) 8;
(c) 0;
(d) 1;
(e) 4.

Q2. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e sejam:

$$u_1 = \big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\big), \quad u_2 = \big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big), \quad u_3 = \big(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}\big).$$

Se $v \in \mathbb{R}^3$ é tal que:

$$\langle v, u_1 \rangle = \sqrt{2}, \quad \langle v, u_2 \rangle = \sqrt{3}, \quad \langle v, u_3 \rangle = \sqrt{6},$$

então um vetor ortogonal a v é:

(a) $(3, 0, 1)$;
(b) $(2, 1, 0)$;
(c) $(1, 0, -2)$;
(d) $(0, -2, 3)$;
(e) $(1, 1, 1)$.

Q3. Considere o espaço vetorial das funções contínuas $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

O elemento de $P_2(\mathbb{R})$ mais próximo de $f(t) = |t|$ é:

(a) $\frac{3}{16} + \frac{15}{16}t^2$;
(b) $\frac{17}{18} + \frac{1}{6}t^2$;
(c) $1 + \frac{1}{2}t^2$;
(d) $\frac{1}{2} + 3t^2$;
(e) $\frac{5}{6} + \frac{13}{18}t^2$.

Q4. Sejam $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $T(X) = AX - XA$, para todo $X \in M_2(\mathbb{R})$ e:

$$S = \big\{B \in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(B) = 0\big\},$$

onde $\operatorname{tr}(B)$ denota o *traço* de B, i.e., a soma dos elementos da diagonal principal de B. Considere a base:

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

de $M_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa que contém uma afirmação **FALSA**:

(a) $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 3$;

(b) S é invariante por T;

(c) T não é injetor;

(d) $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

(e) $\operatorname{Im}(T) \subset S$.

Q5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $2n$, com $n \geq 1$ e seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os operadores lineares $T : V \to V$ tais que $T^2 \neq 0$ e $\operatorname{Ker}(T) \subset \operatorname{Im}(T)$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) > n$, para todo $T \in \mathcal{S}$;

(b) $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) \leq n$, para todo $T \in \mathcal{S}$;

(c) existe $T \in \mathcal{S}$ tal que $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = n$;

(d) para todo $T \in \mathcal{S}$, existe $k \geq 1$ tal que $T^k = 0$;

(e) para todo $T \in \mathcal{S}$, $T^2 = T$.

Q6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onde:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1,2), (1,-1)\}.$$

Temos que $T(1,1,-1)$ é igual a:

(a) $(-2,-1)$;

(b) $(2,0)$;

(c) $(2,4)$;

(d) $(-1,1)$;

(e) $(4,2)$.

Q7. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita $n > 1$ e $T : V \to \mathbb{R}$ uma transformação linear não nula. Assinale a alternativa que contém uma afirmação **FALSA**:

(a) se $v \in V$ e $v \neq 0$ então $V = [v] \oplus \mathrm{Ker}(T)$;
(b) se $v \in V$ e $V = [v] \oplus \mathrm{Ker}(T)$ então $v \neq 0$;
(c) dado $v \in V$ então $V = [v] \oplus \mathrm{Ker}(T)$ se e somente se $T(v) \neq 0$;
(d) T é sobrejetora;
(e) T não é injetora.

Q8. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, $T : V \to V$ um operador linear e $v_1, \ldots, v_{n+1} \in V$ vetores (não necessariamente distintos) tais que:

$$T(v_j) = jv_j,$$

para todo $j = 1, \ldots, n + 1$. Considere as seguintes afirmações:

(I) T é diagonalizável;
(II) T é invertível;
(III) $v_j = 0$, para algum $j = 1, \ldots, n + 1$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira;
(d) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q9. Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ um operador linear com 3 autovalores reais distintos tal que:

$$\mathrm{Im}(T) = [T(1, 0, 0, 0, 0), T(0, 1, 0, 0, 0)].$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$;
(II) T é diagonalizável;
(III) T é injetor.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(b) todas as afirmações são falsas;
(c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q10. Sejam $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ e & b & d \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) se $a = c$ e $a \neq b$ então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se e somente se $d = e = 0$;

(b) se a, b e c são dois a dois distintos então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, para quaisquer $e, d \in \mathbb{R}$;

(c) se $a = b$ e $a \neq c$ então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se e somente se $e = 0$;

(d) se $b = c$ e $b \neq a$ então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se e somente se $d = 0$;

(e) se $a = b = c$ então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ se e somente se $d = e = 0$.

Q11. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se $A^{2010} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ então $a + b + c + d$ é igual a:

(a) $2^{2013} - 2 \cdot 3^{2011}$;

(b) $2^{2010} + 3^{2010}$;

(c) $2^{2011} - 2 \cdot 3^{2010}$;

(d) $2^{2012} + 2 \cdot 3^{2011}$;

(e) $2^{2014} + 3^{2011}$.

Q12. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita n munido de um produto interno. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $T : V \to V$ é um operador simétrico e W é um subespaço de V invariante por T então $W^{\perp}$ também é invariante por T;

(II) se $T : V \to V$ é um operador linear e se para todo subespaço W de V que é invariante por T temos que $W^{\perp}$ também é invariante por T então T é simétrico;

(III) se $T : V \to V$ é um operador simétrico que possui n autovalores distintos então toda base de V formada por autovetores de T é ortogonal.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q13. Sabe-se que $(1, 1, 1)$ e $(1, -1, 0)$ são autovetores da matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Se uma quádrica possui equação:

$$x^2 + y^2 + 10z^2 + 14xy - 4xz - 4yz + 6\sqrt{2}\,(x - y) + 6 = 0$$

relativamente a um certo sistema de coordenadas ortogonal então uma equação reduzida para essa quádrica é:

(a) $u^2 - v^2 + 2w^2 + 2 = 0$;
(b) $u^2 + v^2 + 2w^2 - 2 = 0$;
(c) $6u^2 - 6v^2 + 12w^2 + 10 = 0$;
(d) $3u^2 - 3v^2 + 6w^2 + 2 = 0$;
(e) $u^2 + v^2 + 10w^2 + 6 = 0$.

Q14. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ o operador linear que é representado na base canônica de $\mathbb{C}^3$ pela matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que T é diagonalizável se e somente se:

(a) $a \neq 0$ ou $b = c = 0$;

(b) $a \neq 0$;

(c) $b = 0$ e $c = 0$;

(d) $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$;

(e) $a = 0$ ou $b = c = 0$.

Q15. Seja (x, y) a solução do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 6y(t), \\ y'(t) = -x(t) + y(t), \end{cases}$$

satisfazendo a condição inicial $x(0) = -5$, $y(0) = 2$. Assinale a alternativa correta:

(a) $x(\ln 2) = -64$, $y(\ln 2) = 24$;

(b) $x(\ln 2) = 64$, $y(\ln 2) = -24$;

(c) $x(\ln 2) = 24$, $y(\ln 2) = 64$;

(d) $x(\ln 2) = -24$, $y(\ln 2) = -64$;

(e) $x(\ln 2) = 3$, $y(\ln 2) = 4$.

Q16. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$[A - (1+2i)\mathrm{I}] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad [A - (1+2i)\mathrm{I}] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0,$$

onde $\mathrm{I} \in M_4(\mathbb{R})$ denota a matriz identidade. Se (x_1, x_2, x_3, x_4) denota a solução do sistema homogêneo de equações diferenciais lineares com matriz de coeficientes A satisfazendo a condição inicial $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 3$, $x_4(0) = 4$ então $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\left(\frac{\pi}{4}\right)$ é igual a:

(a) $4e^{\frac{\pi}{4}}$;

(b) $10e^{\frac{\pi}{4}}$;

(c) $6e^{\frac{\pi}{4}}$;

(d) $e^{\frac{\pi}{4}}$;

(e) $-4e^{\frac{\pi}{4}}$.