MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

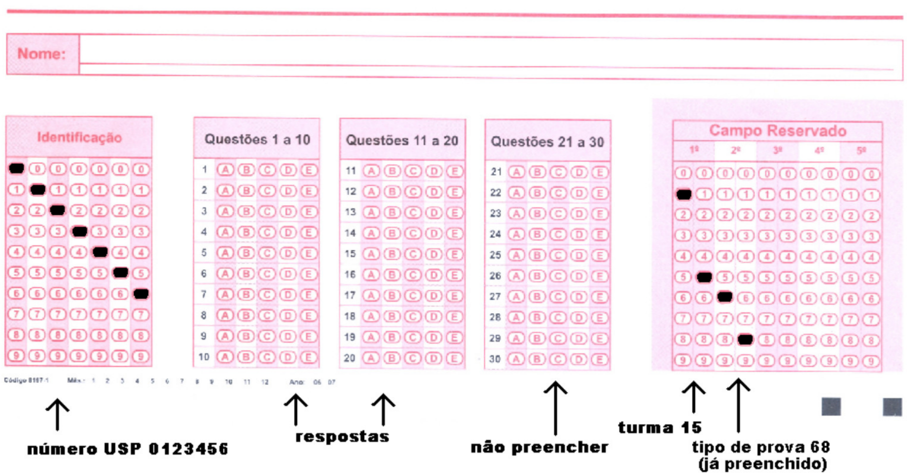
Prova de Recuperação - 05/02/2014

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Professor: ______________________________ **Turma:** ______________

INSTRUÇÕES

(1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
(2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
(3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
(4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
(5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
(6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
(7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
(8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
(9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.



Notações: Nesta prova, se V é um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$, então $[v_1, \ldots, v_n]$ denotará o subespaço vetorial de V gerado por $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Se T é um operador linear em um espaço vetorial e n é um inteiro positivo, então T^n denota o operador linear composto $T \circ T \circ \cdots \circ T$, em que T ocorre n vezes.

A transposta de uma matriz A será denotada por A^{t}.

A base canônica de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ será denotada por can.

Questão 1. Considere $P(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Se $f(x) = \alpha + \beta x^2$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, é o polinômio par de grau menor ou igual a dois que melhor aproxima o polinômio ímpar $g(x) = x + x^3$, então $\alpha + \beta$ é igual a

a. -1

b. 0

c. -2

d. 1

e. 2

Questão 2. Considere as bases $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, 1 + x^2\}$ e $\mathcal{D} = \{(0,1), (1,1)\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que satisfaz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Assinale a afirmação **FALSA**.

a. T é sobrejetora.

b. A dimensão do núcleo de T é 1.

c. $T(3 + x^2) = (4, 2)$.

d. Existe uma base $\mathcal{F}$ de $P_2(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{F}\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

e. $\{T(1 - x), T(1 + x)\}$ é uma base da imagem de T.

Questão 3. Se $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, então **NÃO** é uma solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ a função

a. $X(t) = (1,0,1)e^{3t} + (1,2,0)e^t\cos(t) - 2(1,1,2)e^t\operatorname{sen}(t)$
b. $X(t) = (1,0,1)e^t - 2(1,2,1)e^{2t}\cos(3t) + (1,2,1)e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$
c. $X(t) = (1,1,0) + (1,0,1)e^t\cos(t) + (1,1,1)e^t\operatorname{sen}(t)$
d. $X(t) = (1,0,1)e^t - 3(1,2,1)e^t\cos(t) + (1,1,2)e^t\operatorname{sen}(t)$
e. $X(t) = (1,0,1)e^{2t} + (1,0,2)e^t\operatorname{sen}(3t) + (0,1,2)e^t\cos(3t)$

Questão 4. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear com polinômio característico $p(t) = (\alpha - t)(1-t)(2-t)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Assinale a afirmação **FALSA**, sabendo que $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ são autovetores de T, associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente.

a. Se $\alpha \neq 0$, então T é sobrejetor.
b. Se $\alpha = 0$, então a matriz de T na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é simétrica.
c. O operador linear $T^2 - T$ não é injetor.
d. Se $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$, então T é injetor.
e. Se matriz de T na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é simétrica, então $(0,0,1)$ é autovetor de T.

Questão 5. Sejam $a, b, c, d, F \in \mathbb{R}$ e considere a cônica Γ de equação

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + Fx + Fy + d = 0,$$

com respeito a um sistema de coordenadas em E^2 de base ortonormal. Sabendo que 1 e 2 são autovalores da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ e que $(1,1), (1,-1)$ são autovetores dessa matriz associados a 1 e 2, respectivamente, pode-se afirmar corretamente que

a. se $F^2 = d$, então Γ é um par de retas concorrentes.
b. se $F^2 < d$, então Γ é uma hipérbole.
c. se $F^2 = 2d$, então Γ contém um único ponto.
d. se $F^2 > 2d$, então Γ não é limitada.
e. se $F^2 > d$, então Γ é uma circunferência.

Questão 6. Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $L, T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ são operadores lineares tais que

$$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

então é correto afirmar que

a. para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, a composta $L \circ T$ é diagonalizável.
b. se L é diagonalizável, então T é diagonalizável.
c. se L é diagonalizável, então a composta $L \circ T$ também é diagonalizável.
d. se T é diagonalizável, então a composta $L \circ T$ também é diagonalizável.
e. para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, L e T são diagonalizáveis.

Questão 7. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$$

Sabendo que $(1,1)$ e $(1,2/3)$ são autovetores da matriz $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, se $\big(x(t), y(t)\big)$ é a solução do sistema que satisfaz $\big(x(0), y(0)\big) = (2, 5/3)$, pode-se concluir que $x(1) - 3y(1)$ é igual a

a. $e^3 - 2e^4$
b. $-2e^3 - 3e^4$
c. $-2e^3 - e^4$
d. $-2e^2 + 3e^3$
e. $3e^4 - 2e^3$

Questão 8. Seja $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear tal que $A = [T]_{\mathsf{can}} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Seja $u + iv$ um autovetor de T, com $u, v \in \mathbb{R}^n$, ambos não nulos, e seja $\lambda \in \mathbb{C}$ o autovalor associado a $u + iv$. Considere as afirmações abaixo:

(I) Se λ é real, então u e v são autovetores de A.

(II) Se λ não é real, então u e v são linearmente independentes.

(III) Se λ é real, então u e v são linearmente dependentes.

É correto o que se afirma em

a. (I), (II) e (III).

b. (I) e (II), apenas.

c. (III), apenas.

d. (I), apenas.

e. (II) e (III), apenas.

Questão 9. Seja n um inteiro maior do que 1. A respeito de matrizes $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tais que $AB = 0$, é correto afirmar que

a. todo vetor não nulo que é combinação linear das colunas de$B$ é autovetor de A.

b. todo autovalor de B é também autovalor de A.

c. a matriz B não é inversível.

d. a matriz A não é inversível.

e. se $A \neq 0$, então $B = 0$.

Questão 10. Considere as afirmações abaixo acerca de um operador linear T em um espaço vetorial V de dimensão finita maior ou igual a 2, munido de um produto interno.

(I) Se T é simétrico e possui um único autovalor, então a matriz de T em relação a qualquer base de V é simétrica.

(II) Se T é simétrico, então existem infinitas bases ortonormais de V em relação às quais a matriz de T é simétrica.

(III) Se V possui uma base ortonormal constituída de autovetores de T, então T é simétrico.

É correto o que se afirma em

a. (II), apenas.

b. (I) e (II), apenas.

c. (I), (II) e (III).

d. (II) e (III), apenas.

e. (I) e (III), apenas.

Questão 11. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathsf{can}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

pode-se afirmar corretamente que a soma dos elementos na primeira coluna de $[T^5]_{\mathsf{can}}$ é igual a

a. $5^5/3$

b. 5^5

c. $2^6/3 + 2^5$

d. $2^6 + 5^5$

e. 2^6

Questão 12. A respeito dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$,

$$A = \{(1,0,-1),(0,1,1),(1,1,0)\} \quad \text{e} \quad B = \{(1,1,1),(1,0,0)\},$$

é correto afirmar que

a. para todo $u \in \mathbb{R}^3$, existem infinitos $v \in [A]$ e infinitos $w \in [B]$ tais que $u = v + w$.
b. $[B] \subset [A]$.
c. $\dim([A] + [B]) = 2$.
d. $[A] \cup [B] = [A] + [B]$.
e. $[A] \cup [B]$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Questão 13. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz cujo polinômio característico possui uma raiz complexa não real. Sejam $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ os operadores lineares cujas matrizes nas bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{C}^3$, respectivamente, são iguais a A. Assinale a afirmação **FALSA**.

a. Existe uma base de $\mathbb{C}^3$ formada por autovetores de $T_{\mathbb{C}}$.
b. $T_{\mathbb{C}}$ possui um autovalor real.
c. Os autovalores de $T_{\mathbb{C}}$ são todos distintos.
d. T é diagonalizável.
e. $T_{\mathbb{C}}$ é diagonalizável, mas T não é diagonalizável.

Questão 14. Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,i),(1,-i)\}$ do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^2$. A respeito do operador linear $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dado por

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

é correto afirmar que

a. o subconjunto $W = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : x,y \in \mathbb{R}\}$ é invariante por T.

b. T tem um autovalor complexo não real.

c. existe uma base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^2$ constituída de vetores reais de modo que $[T]_{\mathcal{C}}$ seja diagonal.

d. se $A = [T]_{\mathcal{D}}$, em que $\mathcal{D} = \{(1,0),(0,1)\}$, então $A + A^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

e. $(1,0)$ e $(0,1)$ são autovetores de T.

Questão 15. Considere $\mathbb{R}^n$ com o produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ usual, e seja $v = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário. Se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denota a projeção ortogonal sobre $[v]$, então **NÃO** é correto afirmar que

a. $T(w) = \langle w, v\rangle v$, para todo $w \in \mathbb{R}^n$.

b. $\dim \operatorname{Ker}(T) = n - 1$.

c. $\operatorname{Ker}(T) = [v]^{\perp}$.

d. se $w \notin [v]$, então $T(w) = 0$.

e. o coeficiente na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^n$ é igual a $a_i a_j$.

Questão 16. Seja V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear que satisfaz $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Ker}(T)$. Então, pode-se afirmar corretamente que

a. $T^2 = T$.

b. $\operatorname{Im}(T) + \operatorname{Ker}(T) = V$.

c. $T = 0$.

d. $T^2 = 0$ e $T \neq 0$.

e. $\dim V$ pode ser igual a 3.

Gabarito do Aluno

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Tipo de prova: ____________

Questão	a	b	c	d	e
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐
11	☐	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐	☐
13	☐	☐	☐	☐	☐
14	☐	☐	☐	☐	☐
15	☐	☐	☐	☐	☐
16	☐	☐	☐	☐	☐