MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

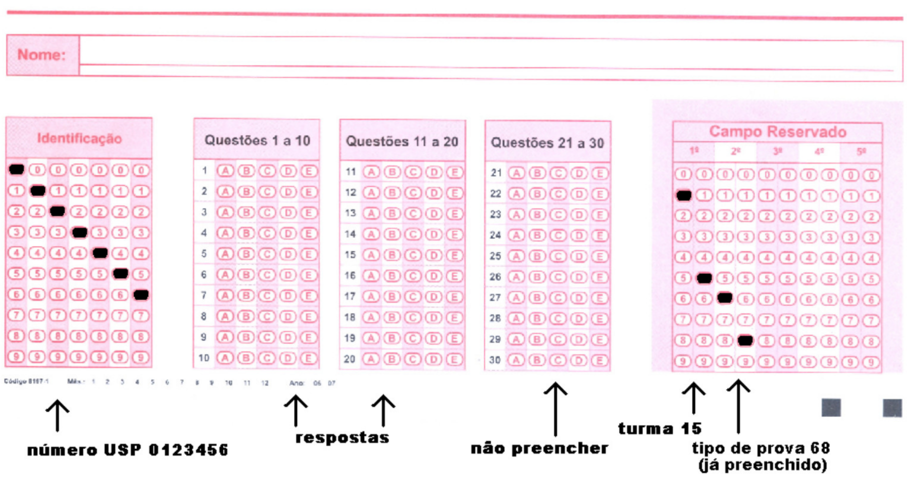
Prova 3 - 27/11/2013

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Professor: ______________________________ **Turma:** ______________

Instruções

(1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
(2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
(3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
(4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
(5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
(6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
(7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
(8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
(9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.



Notações: Nesta prova, se V é um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$, então $[v_1, \dots, v_n]$ denota o subespaço vetorial de V gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Se T é um operador linear em um espaço vetorial e n é um inteiro positivo, então T^n denota o operador linear composto $T \circ T \circ \cdots \circ T$, em que T ocorre n vezes.

O operador linear identidade em um espaço vetorial é denotado por I.

Se λ é um escalar e T, um operador linear em um espaço vetorial, denota-se $V(\lambda) = \operatorname{Ker}(T - \lambda I)$. Quando λ é um autovalor de T, $V(\lambda)$ chama-se autoespaço de T associado a λ.

Questão 1. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual, e seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear de matriz A na base $\mathcal{B}$. É correto afirmar que

a. T tem um único autovalor.

b. existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

c. T é simétrico.

d. T é diagonalizável, mas pode não existir uma baseortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

e. T não é diagonalizável.

Questão 2. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere a cônica Γ de equação

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

com respeito a um sistema de coordenadas de E^2 com origem O e base $\mathcal{B}$ ortonormal. Sabendo que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

é correto afirmar que uma equação reduzida de Γ é

a. $\frac{r^2}{3} - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{B}}, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{B}} \right\}$.

b. $3r^2 - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{B}}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{B}} \right\}$.

c. $3r^2 - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{B}}, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{B}} \right\}$.

d. $\frac{r^2}{3} - s^2 = 1$, onde (r, s) são coordenadas relativas ao sistema de origem O e base $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{B}}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{B}} \right\}$.

e. impossível de ser determinada a partir dos dados da questão.

Questão 3. Sabe-se que

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Seja $\big(x(t), y(t)\big)$ a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

que satisfaz $x(0) = 2, y(0) = 1$. Então, $x(t) - y(t)$ é igual a

a. e^{2t}
b. e^{-t}
c. e^{t}
d. 0
e. e^{-2t}

Questão 4. Sabendo que $(1, -1 - i)$ é um autovetor da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ associado ao autovalor $3 + i$, pode-se afirmar corretamente que as soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ são da forma

a. $ae^{3t}(-\cos t + \operatorname{sen} t, -\cos t) + be^{3t}(-\cos t + \operatorname{sen} t, \cos t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
b. $ae^{3t}(\cos t - \operatorname{sen} t) + be^{3t}(\cos t + \operatorname{sen} t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
c. $ae^{3t}(\cos t, -\cos t + \operatorname{sen} t) + be^{3t}(\operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t - \cos t)$ com $a, b \in \mathbb{R}$.
d. $ae^{3t}(\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$, com $a \in \mathbb{R}$.
e. $ae^{3t}(\cos t, \cos t) + be^{3t}(\operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Questão 5. Se A é uma matriz de $M_2(\mathbb{R})$ que satisfaz

$$A\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\2\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix},$$

então é correto afirmar que A é igual a

a. $\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 2\\ \sqrt{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 2\\ \sqrt{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & 2\\ -\sqrt{2} & -1\end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 2\\ \sqrt{2} & -1\end{bmatrix}$

Questão 6. Seja n um inteiro positivo. Considere as seguintes afirmações a respeito de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, de um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ e de um vetor $v \in \mathbb{C}^n$.

(I) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e v é um autovetor de A associado ao autovalor λ, então $\overline{v}$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\overline{\lambda}$.

(II) Se λ é um autovalor de A, então $\overline{\lambda}$ também é um autovalor de A.

(III) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ e todos seus autovalores são reais, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Pode-se afirmar corretamente que

a. apenas (II) e (III) são verdadeiras.

b. (I), (II) e (III) são falsas.

c. apenas (I) e (II) são verdadeiras.

d. (I), (II) e (III) são verdadeiras.

e. apenas (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 7. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja T um operador linear de $\mathbb{R}^3$. Sejam $u, v, w \in R^3$ vetores não nulos tais que $\{v, w\}$ seja linearmente independente. Suponha que $V(2) = [u]$ e $V(3) = [v, w]$. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\langle u, v + w \rangle \neq 0$, então T não é simétrico.

(II) Se $\langle v, w \rangle \neq 0$ então T não é simétrico.

(III) Se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$, então T é simétrico.

Está correto o que se afirma em

a. (I), (II) e (III).

b. (I) e (III), apenas.

c. (I) e (II), apenas.

d. (II) e (III), apenas.

e. (III), apenas.

Questão 8. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e seja $T\colon V \to V$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se λ e μ são números reais distintos e u, v, w são vetores de V tais que $V(\lambda) = [u, v]$ e $V(\mu) = [w]$, então $\langle w, u \rangle = \langle w, v \rangle = 0$.

(II) Quaisquer dois autovetores de T distintos são ortogonais.

(III) Se $\langle T(u), u \rangle > 0$, para todo vetor não nulo $u \in V$, então os autovalores de T são todos positivos.

Está correto apenas o que se afirma em

a. (III).

b. (I).

c. (I) e (III).

d. (I) e (II).

e. (II) e (III).

Questão 9. Considere a superfície quádrica de equação

$$2x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 6yz - 5x + 3y = 2$$

com respeito a um sistema de coordenadas em E^3 de base ortonormal. Então, existe um sistema coordenadas em E^3 de base ortonormal, com respeito ao qual a quádrica tem equação da forma

a. $z' = a(x')^2 + b(y')^2$, com $a > 0, b > 0$.
b. $z' = a(x')^2$, com $a \in \mathbb{R}$.
c. $a(x')^2 + b(y')^2 + c(z')^2 = d$, com $a > 0, b > 0, c < 0, d \in \mathbb{R}$.
d. $a(x')^2 + b(y')^2 + c(z')^2 = d$, com $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
e. $z' = a(x')^2 + b(y')^2$, com $a > 0, b < 0$.

Questão 10. Seja $\Sigma = (O, v_1, v_2)$ um sistema de coordenadas de E^2 em que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de V^2. Seja Γ a cônica de equação

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$$

com respeito ao sistema Σ. Então, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V^2 tal que Γ tem uma equação reduzida com respeito ao sistema de coordenadas (O, e_1, e_2), em que

a. $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)_{\mathcal{B}}$ e Γ é uma elipse.
b. $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)_{\mathcal{B}}$ e Γ é uma hipérbole.
c. $e_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)_{\mathcal{B}}$ e Γ é uma elipse.
d. $e_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)_{\mathcal{B}}$ e Γ é uma hipérbole.
e. $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)_{\mathcal{B}}$ e Γ é uma parábola.

Questão 11. Considere as seguintes afirmações sobre um operador linear T de $\mathbb{R}^4$ que tenha o polinômio $(t^2+4)(t-2)(t+2)$ como polinômio característico:

(I) T é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

(II) T^4 é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

(III) 4 é o único autovalor de T^2.

Está correto o que se afirma em

a. (I) e (III), apenas.

b. (I) e (II), apenas.

c. (I), (II) e (III).

d. (II), apenas.

e. (II) e (III), apenas.

Questão 12. Acerca de uma matriz $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ que tem polinômio característico igual a $-t(t^2+1)(t-a)(t-b)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar corretamente que

a. se $a = b = 0$ e se o operador T de matriz A na base canônica tem núcleo de dimensão 2, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não sobre $\mathbb{R}$.

b. se $a = 0$, $b \neq 0$ e se o operador T de matriz A na base canônica tem núcleo de dimensão 1, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não sobre $\mathbb{R}$.

c. se $a = b$ e $a \neq 0$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ e sobre $\mathbb{R}$.

d. se $a \neq b$, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

e. se $0, a, b$ são dois a dois distintos, então A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Questão 13. Sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ tem polinômio característico igual a $(1-t)(t^2-4t+13)$, pode-se afirmar corretamente que

a. A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas não sobre $\mathbb{R}$.
b. os autovalores de A são todos reais, e A é diagonalizável.
c. $\dim V(2+3i) = 2$.
d. $\dim V(1) = 2$.
e. os autovalores de A são todos reais, mas A não é diagonalizável.

Questão 14. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja matriz com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$ seja simétrica. Suponha que $\mathrm{Ker}(T-2I) = [(1,0,1)]$ e que $\mathrm{Ker}(T) = [(1,0,-1)]$. É correto afirmar que

a. $T(2,0,0) = (2,1,0)$.
b. existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \lambda \neq 2$, tal que $T(1,1,0) = \lambda(1,1,0)$.
c. existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \lambda \neq 2$, tal que $T(0,1,0) = \lambda(0,1,0)$.
d. $T(1,0,-1) = (2,0,-2)$.
e. $T(2,0,0) = (1,0,0)$.

Questão 15. Seja n um inteiro positivo. Assinale a altenativa **FALSA** sobre uma matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica.

a. Existe uma matriz P inversível tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz real diagonal.
b. A matriz A tem n autovalores distintos, e existe um conjunto ortonormal formado por n autovetores de A.
c. Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ são tais que $Av_1 = v_1$ e $Av_2 = 2v_2$, então v_1 e v_2 são ortogonais.
d. Todos os autovalores de A são reais.
e. A soma das dimensões dos autoespaços de A é igual a n.

Questão 16. Seja n um inteiro positivo e seja $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz não nula diagonalizável sobre $\mathbb{R}$. A respeito do sistema linear de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ é **FALSO** afirmar que

a. se o sistema admite soluções complexas, ele também admite soluções reais.

b. existem soluções não nulas do tipo $X(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$, onde $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ são funções polinomais.

c. a soma de duas soluções do sistema ainda é solução do sistema.

d. dado $X_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução $X(t)$ tal que $X(0) = X_0$.

e. existem n funções $f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tais que toda solução do sistema é uma combinação linear de $f_1, \ldots, f_n$.

Gabarito do Aluno

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Tipo de prova: ____________

Questão	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐
11	☐	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐	☐
13	☐	☐	☐	☐	☐
14	☐	☐	☐	☐	☐
15	☐	☐	☐	☐	☐
16	☐	☐	☐	☐	☐