Notações: Nesta prova, se V é um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$, então $[v_1, \ldots, v_n]$ denota o subespaço vetorial de V gerado por $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

O espaço vetorial de todos os polinômios de grau $\leq n$, incluindo o polinômio nulo, é denotado por $P_n(\mathbb{R})$. E se $p \in P_n(\mathbb{R})$, então p' é a sua derivada.

O operador linear identidade em um espaço vetorial é denotado por I.

Se T é um operador linear em um espaço vetorial e n é um inteiro positivo, então T^n denota o operador linear composto $T \circ T \circ \cdots \circ T$, em que T ocorre n vezes.

Se λ é um autovalor de um operador linear T, o subespaço formado por todos os autovetores de T associados a λ, mais o vetor nulo, é denominado auto-espaço de T associado a λ.

Questão 1. Sabendo que a matriz do operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação a uma base de $\mathbb{R}^2$ é

$$\begin{bmatrix} 4 & b \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

em que $b \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que

a. se $b = -8$, então T não é diagonalizável.

b. se $b = 1$, então $T(u) = 6u$, para todo $u \in \mathbb{R}^2$.

c. existe um valor de b para o qual T possui um auto-espaço de dimensão 2.

d. não existe valor de b para o qual 0 seja autovalor de T.

X **e.** existe um valor de b para o qual T possui um único autovalor.

Q1) POLINÔMIO CARACTERÍSTICO: $p(\lambda) = (4-\lambda)(8-\lambda) + 4b \Rightarrow$

$p(\lambda) = 32 + 4b - 12\lambda + \lambda^2$ TEM DESCRIMINANTE

$\Delta = (12)^2 - 4(32+4b) = 16(1-b)$. ENTÃO CONCLUI-SE

a) Se $b = -8$, $p(\lambda)$ possui 2 raízes distintas e T é diagonalizável. Alternativa é Falsa.

b) FALSO POIS $[T(1,0)]^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) FALSO POIS $b = 1$ e T possui um único auto-espaço de dimensão 1 ou $b \neq 1$ e T possui 2 auto-espaços distintos ou não possui auto-espaço.

d) FALSO POIS PARA $b = -8$, $\lambda = 0$ é AUTO-VALOR.

e) CORRETO POIS PARA $b = 1$, $\lambda = 6$ é o único auto-valor.

Questão 2. Dizemos que uma reta que passa pela origem de $\mathbb{R}^2$ é invariante pelo operador linear $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se $S(x)$ estiver nessa reta sempre que x estiver. A respeito dos operadores lineares L, R, T de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem

$$[L]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [R]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$, é correto afirmar que

a. há uma única reta invariante por R e uma única reta invariante por T.
b. não há retas invariantes por T e há uma única reta invariante por L.
c. há única reta invariante por L e uma única reta invariante por T.
d. não há retas invariantes por R e exitem duas retas invariantes por T.
e. não há retas invariantes por R e exitem duas retas invariantes por L.

Questão 3. Em um espaço vetorial de dimensão finita, considere um operador linear invertível T com autovetores u e v associados, respectivamente, a autovalores distintos λ e μ. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\lambda \neq 0$ e u é um autovetor do operador linear T^{-1} associado ao autovalor λ^{-1}.
(II) $u + v$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda + \mu$.
(III) v é um autovetor do operador linear $T^3 + 2T^2$ associado ao autovalor $\mu^3 + 2\mu^2$.

Está correto o que ser afirma em

a. (I) e (II), apenas.
b. (I), apenas.
c. (I), (II) e (III).
d. (I) e (III), apenas.
e. (II) e (III), apenas.

Q2 Seja $r = \{(x,y) \mid ax + by = 0\}$ uma reta que passa pela origem $\Rightarrow r = [(-b,a)_\mathcal{B}] \subset \mathbb{R}^2$ um subespaço de $\mathbb{R}^2$ de dim 1.

Uma reta r é invariante pelo operador $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $[S]_\mathcal{B} \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}_\mathcal{B} = \lambda \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}_\mathcal{B} \Rightarrow$ se $\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}_\mathcal{B}$ é autovetor de $[S]_\mathcal{B}$.

$\underline{L}$: $p_L(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 4-t & -1 \\ 2 & 1-t \end{bmatrix}\right) = (4-t)(1-t) + 2 = (t-2)(t-3)$

$\Rightarrow L$ é diagonalizável $\Rightarrow$ existem dois autovetores LI $\Rightarrow$ existem <u>duas retas</u> invariantes <u>por L</u>

$\underline{R}$: $p_R(t) = \det \begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{bmatrix} = t^2 + 1$ não há autovalores

$\Rightarrow$ <u>não há</u> retas invariantes <u>por R</u>

$\underline{T}$: $p_T(t) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 3 \\ 0 & 2-t \end{bmatrix} = (2-t)^2$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_\mathcal{B} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_\mathcal{B}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = [(0,1)_\mathcal{B}] \Rightarrow$ há <u>uma única</u> reta invariante <u>por T</u>

a alternativa correta é $\boxed{e.}$

Q3: (I) é <u>verdadeira</u>, pois $u \neq 0$, $T(u) = \lambda u$, T é invertível $\Rightarrow T^{-1}$ é linear

$\Rightarrow T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(\lambda u) \Rightarrow u = \lambda T^{-1}(u)$, $\lambda \neq 0 \Rightarrow T^{-1}(u) = \frac{1}{\lambda} u$.

(II) é <u>falsa</u>, pois $T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \mu v \neq (\lambda + \mu)(u+v)$

(III) é <u>verdadeira</u>, pois $(T^3 + 2T^2)(v) = T^3(v) + 2T^2(v) = T \circ T \circ T(v) + 2 T \circ T(v) =$
$= \mu^3 v + 2\mu^2 v = (\mu^3 + 2\mu^2) v$

a alternativa correta é $\boxed{d.}$

Questão 4. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-2z = 0\}$. Se $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denota a projeção ortogonal sobre S, então **NÃO** é correto afirmar que

a. T é diagonalizável.
X **b.** a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é invertível.
c. T possui exatamente dois auto-espaços.
d. o polinômio característico de T é $p(t) = -t(t-1)^2$.
e. S é um auto-espaço de T.

Questão 5. Considere a transformação linear $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p)(x) = xp'(x) + 6\int_0^x p(t)dt$$

e a base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então

a. $p_1(x) = 3x,\ p_2(x) = x + 3x^2$ e $p_3(x) = x^2/2 + x^3$
b. $p_1(x) = 6x,\ p_2(x) = x + 3x^2$ e $p_3(x) = 2x^2 + 2x^3/2$
c. $p_1(x) = 3x,\ p_2(x) = x/3 + x^2/3$ e $p_3(x) = x^2 + x^3/2$
X **d.** $p_1(x) = 3x,\ p_2(x) = x/3 + x^2$ e $p_3(x) = x^2/2 + x^3/2$
e. $p_1(x) = 2x,\ p_2(x) = 3x + 3x^2$ e $p_3(x) = 4x^2 + 4x^3$

Q4) a) A IMAGEM DE T É S E É UM AUTO-ESPAÇO DE T ASSOCIADO AO AUTOVALOR 1. dim(S) = 2.
O NÚCLEO DE T É AUTO-ESPAÇO DE T ASSOCIADO AO AUTO-VALOR NULO. ENTÃO $KER(T) \oplus IM(T) = \mathbb{R}^3$ E T É DIAGONALIZÁVEL. ALTERNATIVA CORRETA.

b) FALSO POIS $KER(T) \neq \{0\}$.

c) CORRETO, IM(T) E KER(T) SÃO AUTO-ESPAÇOS

d) CORRETO; $\dim(KER(T)) = 1$ E $\dim(Im(T)) = 2$ E ENTÃO MULT. ÁLGEBRICA DE $\lambda = 0$ É 1 E DE $\lambda = 1$ É 2.

e) CORRETO, $S = IM(T)$ É AUTO-ESPAÇO ASSOCIADO AO AUTO-VALOR $\lambda = 1$.

Q5) $T(1)(x) = 6x = 2p_1(x) \Rightarrow p_1(x) = 3x$

$T(x) = x + 3x^2 = 3P_2(x) \Rightarrow P_2(x) = \frac{x}{3} + x^2$

$T(x^2) = 2x^2 + 2x^3 = 4P_3(x) \Rightarrow P_3(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}$

Questão 6. Assinale a afirmação **FALSA** acerca de um operador linear T em um espaço vetorial de dimensão 2.

a. Se T^2 não possui autovalor, então T também não possui autovalor.
b. Se T é diagonalizável, então T^2 também é.
c. Se T não é nulo e $T^2 = T$, então T possui pelo menos um autovalor distinto de zero.
X **d.** Se T^2 é diagonalizável, então T também é.
e. Se $T^2 = T$, então T é diagonalizável.

Q6) a) CORRETO
Se $T(v) = \lambda v$ com v não-nulo, então $T^2(v) = \lambda^2 v$. Conclui-se que se T possui autovalor, então T^2 também possui. Portanto se T^2 não possui autovalor, T também não possui.

b) CORRETO POIS SE EXISTE BASE B TAL QUE $[T]_B = D$ DIAGONAL RESULTA QUE $[T^2]_B = D^2$, TAMBÉM DIAGONAL.

c) CORRETO POIS T É NÃO NULO E PORTANTO $T(v) \neq 0$ PARA ALGUM v. $T(T(v)) = T(v)$, ENTÃO $T(v)$ É AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR $\lambda = 1$.

d) FALSA $T(x,y) = (-y, x)$ NÃO É DIAGONALIZÁVEL MAS $T^2(x,y) = (-x,-y)$ É DIAGONALIZÁVEL.

e) CORRETO: A IMAGEM DE T, $Im(T)$ É UM AUTOESPAÇO DE T ASSOCIADO AO AUTOVALOR $\lambda = 1$. $\dim(KER(T)) + \dim(Im(T)) = 2$. SE $KER(T) \neq \{0\}$, $KER(T)$ É TAMBÉM AUTOESPAÇO. SENÃO $IM(T)$ É O ÚNICO AUTOESPAÇO.

Questão 7. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear que satisfaz

$$T(3,2) = 2(3,2) \quad \text{e} \quad T(1,1) = 3(1,2).$$

Se A denota a matriz de T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$, então o determinante de A é igual a

X **a.** 24
b. −14
c. 6
d. −18
e. 12

Q7) CONSIDERE A BASE CANÔNICA C E A BASE $B = \{(3,2); (1,2)\}$ PARA $\mathbb{R}^2$.

$$[T]_C = M_{CB}[T]_B M_{CB}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \det[T]_C = 24$$

Questão 8. Seja n um inteiro maior do que 1. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$:

(I) Se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $Ax = \lambda x$ para algum escalar não nulo λ, então x é um autovetor de A.

(II) Se 0 for um autovalor de A, então as colunas de A formam um conjunto linearmente dependente em $\mathbb{R}^n$.

(III) Se $n = 2$ e o polinômio característico de A for $t^2 - 1$, então A será diagonalizável e invertível.

Está correto o que se afirma em

a. (I), (II) e (III).
b. (II) e (III), apenas.
c. (I) e (II), apenas.
d. (II), apenas.
e. (I) e (III), apenas.

Questão 9. Suponha que $\mathbb{R}^2$ tenha um produto interno $\langle\, ,\, \rangle$ com respeito ao qual a base $B = \{(1,1),(1,2)\}$ seja ortonormal. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por

$$T(x,y) = (\alpha x + \beta y, \beta y),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então, T é simétrico com relação ao produto interno $\langle\, ,\, \rangle$ se, e somente se,

a. $\alpha + 3\beta = 0$
b. $3\alpha + 2\beta = 0$
c. $2\alpha + 3\beta = 0$
d. $3\alpha + \beta = 0$
e. $\alpha + 2\beta = 0$

Q8: (I) é ~~falsa~~ falsa, pois se x é um autovalor de $A \Rightarrow x \neq 0$

(II) é verdadeira, pois se 0 for um autovalor de A $\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow$ o sistema homogêneo $Ax = 0$ tem soluções não triviais $\Rightarrow$ existe uma combinação linear das colunas de A cujos coeficientes não todos $= 0$ $\Rightarrow$ as colunas de A formam um conjunto liarmente dependente em $\mathbb{R}^n$.

(III) é verdadeira, pois $p_A(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, então $\mathbb{R}^2$ possui uma base $\{u, v\}$, onde u e v são autovetores de A associados aos autovalores 1 e -1, respetivamente $\Rightarrow A$ é diagonalizável. Como $\lambda = 0$ não é autovalor $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ é invertível $\Rightarrow$ alternativa certa é $\boxed{b.}$

Q9) $[T]_B = M_{CB}^{-1} [T]_C M_{CB} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

AQUI C É A BASE CANÔNICA DE $\mathbb{R}^2$.

ENTÃO $[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha+2\beta \\ \beta & 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & 2\alpha+2\beta \\ -\alpha & -\alpha \end{pmatrix}$

PARA QUE T SEJA SIMÉTRICO EM RELAÇÃO A $\langle\, ,\, \rangle$ A MATRIZ $[T]_B$ DEVE SER SIMÉTRICA. PORTANTO

$-\alpha = 2\alpha + 2\beta \iff 3\alpha + 2\beta = 0$

Questão 10. Acerca de um operador linear T cujo polinômio característico é $p_T(t) = -t(t^2-1)(t^2-4)$, é correto afirmar que

a. $p_{T^2}(t) = p_T(t)^2$.
b. T^2 tem cinco autovalores distintos e é diagonalizável.
c. T é invertível e $p_{T^{-1}}(t) = -t(t^2-1)(t^2-\frac{1}{4})$.
d. T^2-4I tem quatro autovalores distintos e não é diagonalizável.
e. T^3-T é diagonalizável e $p_{T^3-T}(t) = -t^3(t-6)(t+6)$.

Questão 11. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear tal que

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z-w=0 \text{ e } y-w=0\}.$$

Sabendo que T é diagonalizável, que 3 é um autovalor de T e que $\dim(\mathrm{Ker}(T-3I)) = 1$, é correto afirmar que o polinômio característico de T é igual a

a. $t(t-3)^2(t-\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 3$ e $\lambda \neq 0$.
b. $t(t-3)(t-\lambda)(t-\mu)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e algum $\mu \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda \neq 3$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 3$ e $\mu \neq 0$.
c. $t^2(t-3)^2$.
d. $t(t^2+1)(t-3)$.
e. $t^2(t-3)(t-\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 3$ e $\lambda \neq 0$.

Questão 12. Seja $F\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear satisfazendo $\mathrm{Ker}(F) = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p'' = 0 \text{ e } p(-1) = 0\}$. Se $1+x^2$ e $-x+2x^2$ são autovetores de F associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente, então $F(1-x^2)$ é igual a

a. $1-2x+5x^2$
b. $2-2x^2$
c. $3+4x-5x^2$
d. $1-x+3x^2$
e. $3+2x-x^2$

Q10. Como $p_T(t) = -t(t^2-1)(t^2-4) = -t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)$
T tem cinco autovalores distintos, então
existe uma base $\{v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2\}$ de V, onde
v_i é autovetor de T associado ao autovalor $i \Rightarrow T(v_i) = i v_i$

a. é falsa, pois grau $p_{T^2}(t) = 5 \neq 10 = \text{grau}\, p_T(t)^2$.

b. é falsa, pois $v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2$ são autovetores de T^2 associados aos autovalores $4, 1, 0, 1, 4$, respectivamente

c. é falsa, pois $\lambda = 0$ é um autovalor de $T \Rightarrow \mathrm{Ker}\, T \neq \{0\}$
$\Rightarrow T$ não é invertível

d. é falsa, pois $v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2$ são autovetores de T^2-4I associados aos autovalores $0, -3, -4, -3, 0$, respectivamente
$\Rightarrow T^2-4I$ é diagonalizável.

$\boxed{\text{e.}}$ é verdadeira, pois $v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2$ são autovetores de T^3-T associados aos autovalores $-6, 0, 0, 0, 6$ respectivamente

---

Q11. $\mathrm{Ker}(T) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z-w=0 \text{ e } y-w=0\} =$
$= \{(x,y,-x,y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, T = 2$

T é diagonalizável $\Rightarrow$ multiplicidade algébrica de $\lambda = 0$
$t=0$ em $p_T(t) = \dim \mathrm{Ker}\, T = 2$

e a multiplicidade algébrica de $t=3$ em $p_T(t) =$
em $p_T(t)$ é igual a $\dim \mathrm{Ker}(T-3I) = 1$

Como grau $p_T(t) = 4$ obtemos $p_T(t) = t^2(t-3)(t-\lambda)$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 3$
$\Rightarrow$ alternativa verdadeira é $\boxed{\text{e.}}$

Q12: $p(x) = a+bx+cx^2 \in \mathrm{Ker}\, F \Rightarrow p''(x) = 2c = 0$ e $0 = p(-1) = a-b \Rightarrow \mathrm{Ker}\, F = [1+x]$
Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. $1-x^2 = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(-x+2x^2)$

$$\begin{cases} 1 = \alpha+\beta \\ 0 = \alpha-\gamma \\ -1 = \beta+2\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ 2 = \alpha - 2\alpha \\ 1 = \alpha+\beta \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha = \gamma = -2 \\ \beta = 3 \end{matrix}$$

Logo $F(1-x^2) = F(-2(1+x) + 3(1+x^2) - 2(-x+2x^2)) = 3F(1+x^2) - 2F(-x+2x^2) = 3+3x^2+4x-8x^2$
$= 3+4x-5x^2 \Rightarrow$ alternativa verdadeira é $\boxed{\text{c.}}$

Questão 13. Considere as matrizes A, B e C abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & 1 & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix},$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se C é invertível e satisfaz $C^{-1}AC = B$, então $a + b + c$ é igual a

X **a.** 2
b. 0
c. -2
d. -1
e. 1

$$A+I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Q13) PARA QUE $C^{-1}AC = B$, $\lambda = -1$ E $\lambda = -2$ DEVEM SER AUTOVALORES DE A COM MULT. GEOMÉTRICA 2 e 1; RESPECTIVAMENTE. ENTÃO AS 2 PRIMEIRAS COLUNAS DE C SÃO AUTOVETORES DE $\lambda = -1$ E A ÚLTIMA É AUTOVETOR DE $\lambda = -2$. VAMOS CALCULÁ-LOS.

E $A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ RESULTA QUE

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a + b + c = -1 + 2 + 1 = 2$$

Questão 14. Seja $D\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear derivação, isto é, D é definida por $D(p) = p'$, para todo $p \in P_2(\mathbb{R})$, e seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$[F]_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^3$ e de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1 + x, x, x + x^2\},$$

respectivamente. Então, $\operatorname{Ker}(D \circ F)$ é

a. $[(1,1,-1)]$.
b. $[(1,-1,1), (1,1,-1)]$.
c. $[(1,-1,0)]$.
d. $[(0,-1,1)]$.
e. $\{(0,0,0)\}$.

Q14. Seja $can = \{1, x, x^2\}$ uma base canonica de $P_2(\mathbb{R})$

$$[D \circ F]_{B\,can} = [D]_{C,can} \cdot [F]_{BC}$$

$(1+x)' = 1$
$x' = 1$
$(x + x^2)' = 1 + 2x$

$$\Rightarrow [D]_{C,can} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D \circ F]_{B\,can} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Consideramos

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{can} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(D \circ F) = \{(x, 0, -x)_B \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,-1)_B] =$$

$$= [(1,0,1) - (1,1,0)] = [(0,-1,1)]$$

a alternativa correta é $\boxed{d.}$

Questão 15. Sobre duas matrizes A e B quadradas, do mesmo tamanho, e semelhantes, **NÃO** é correto afirmar que

a. A e B têm os mesmos autovalores.
b. existe alguma matriz invertível S tal que $B = SAS^{-1}$.
c. A é invertível, se e somente se, B for invertível.
d. A e B têm os mesmos autovetores.
e. $\det A = \det B$.

Questão 16. Seja $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $M_2(\mathbb{R})$ e de $P_1(\mathbb{R})$, respectivamente, dadas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1 + x, 2 + 3x\}.$$

Então, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ é igual a

a. $(2a + c) + (b - c - d)x$
b. $(2b - 2c + d) + (-a + 3b - 3c + d)x$
c. $(2a - c - 2d) + (2a + 3b - 3d)x$
d. $(2a + d) + (-a + b - c)x$
e. $(2a + b - 2c) + (3a + 3c - d)x$

Q15. Duas matrizes A e B são <u>semelhantes</u> se existir uma matriz invertível M tal que $A = M^{-1}BM$

a. é <u>verdadeira</u> pois $p_A(t) = \det(A - tI) = \det(M^{-1}BM - tI) =$
$= \det(M^{-1})\det(B - tI)\det M = \det(B - tI) = p_B(t)$

b. é <u>verdadeira</u> pela definição, $S = M^{-1}$

c. é <u>verdadeira</u> pois $\det A = \det M^{-1} \det B \det M = \det B$
$\Rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.

$\boxed{d.}$ é <u>falsa</u>, pois matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ são semelhantes
$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e não é um autovetor de $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

e. é <u>verdadeira</u> pois $\det A = \det(M^{-1}BM) = (\det M)^{-1}\det B \det M = \det B$

Q16. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ logo}$$

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = \alpha + \beta + \gamma \\ c = \delta \\ d = \gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = a \\ \beta = b - a - d \\ \gamma = d \\ \delta = c \end{cases}$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b - a - d \\ d \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + d \\ b - a - d + d - c \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2a + d \\ b - a - c \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}$$

$$(2a + d, b - a - c)_{\mathcal{C}} = (2a + d)(1 + x) + (b - a - c)(2 + 3x) =$$
$$= (2b - 2c + d) + (-a + 3b - 3c + d)$$

a alternativa correta é $\boxed{b.}$