# MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

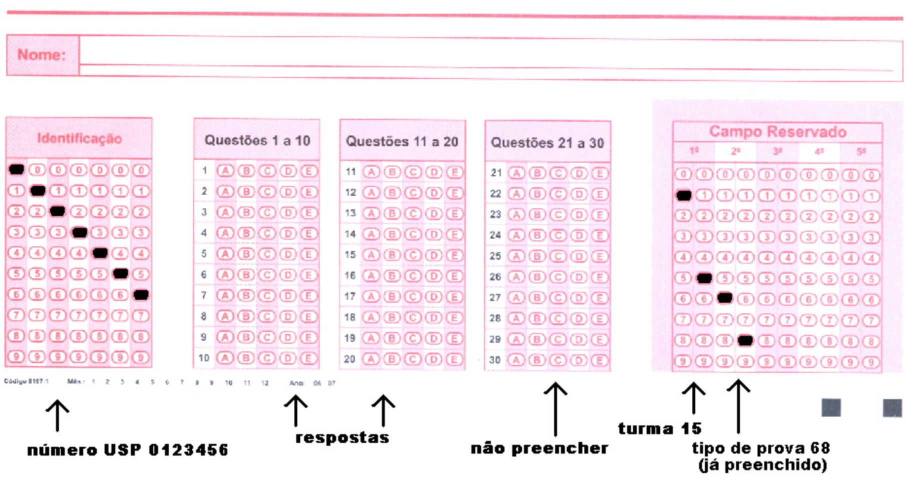
## Prova 2 - 16/10/2013

**Nome:** ______________________________ **NUSP:** ______________

**Professor:** ______________________________ **Turma:** ______________

INSTRUÇÕES

(1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
(2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
(3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
(4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
(5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
(6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
(7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
(8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
(9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.



**Notações:** Nesta prova, se $V$ é um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$, então $[v_1, \dots, v_n]$ denota o subespaço vetorial de $V$ gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$.

O espaço vetorial de todos os polinômios de grau $\leq n$, incluindo o polinômio nulo, é denotado por $P_n(\mathbb{R})$. E se $p \in P_n(\mathbb{R})$, então $p'$ é a sua derivada.

O operador linear identidade em um espaço vetorial é denotado por $I$.

Se $T$ é um operador linear em um espaço vetorial e $n$ é um inteiro positivo, então $T^n$ denota o operador linear composto $T \circ T \circ \cdots \circ T$, em que $T$ ocorre $n$ vezes.

Se $\lambda$ é um autovalor de um operador linear $T$, o subespaço formado por todos os autovetores de $T$ associados a $\lambda$, mais o vetor nulo, é denominado auto-espaço de $T$ associado a $\lambda$.

**Questão 1.** Sabendo que a matriz do operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação a uma base de $\mathbb{R}^2$ é

$$\begin{bmatrix} 4 & b \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

em que $b \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que

**a.** existe um valor de $b$ para o qual $T$ possui um único autovalor.

**b.** se $b = 1$, então $T(u) = 6u$, para todo $u \in \mathbb{R}^2$.

**c.** existe um valor de $b$ para o qual $T$ possui um auto-espaço de dimensão 2.

**d.** se $b = -8$, então $T$ não é diagonalizável.

**e.** não existe valor de $b$ para o qual $0$ seja autovalor de $T$.

**Questão 2.** Considere a transformação linear $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p)(x) = xp'(x) + 6\int_0^x p(t)dt$$

e a base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Se $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então

**a.** $p_1(x) = 3x,\ p_2(x) = x + 3x^2$ e $p_3(x) = x^2/2 + x^3$

**b.** $p_1(x) = 2x,\ p_2(x) = 3x + 3x^2$ e $p_3(x) = 4x^2 + 4x^3$

**c.** $p_1(x) = 3x,\ p_2(x) = x/3 + x^2/3$ e $p_3(x) = x^2 + x^3/2$

**d.** $p_1(x) = 3x,\ p_2(x) = x/3 + x^2$ e $p_3(x) = x^2/2 + x^3/2$

**e.** $p_1(x) = 6x,\ p_2(x) = x + 3x^2$ e $p_3(x) = 2x^2 + 2x^3/2$

**Questão 3.** Seja $n$ um inteiro maior do que 1. Considere as seguintes afirmações sobre uma matriz $A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$:

(I) Se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $Ax = \lambda x$ para algum escalar não nulo $\lambda$, então $x$ é um autovetor de $A$.

(II) Se 0 for um autovalor de $A$, então as colunas de $A$ formam um conjunto linearmente dependente em $\mathbb{R}^n$.

(III) Se $n = 2$ e o polinômio característico de $A$ for $t^2 - 1$, então $A$ será diagonalizável e invertível.

Está correto o que se afirma em

**a.** (I), (II) e (III).

**b.** (I) e (III), apenas.

**c.** (II) e (III), apenas.

**d.** (II), apenas.

**e.** (I) e (II), apenas.

**Questão 4.** Seja $F\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear satisfazendo $\operatorname{Ker}(F) = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p'' = 0 \text{ e } p(-1) = 0\}$. Se $1 + x^2$ e $-x + 2x^2$ são autovetores de $F$ associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente, então $F(1 - x^2)$ é igual a

**a.** $3 + 4x - 5x^2$
**b.** $3 + 2x - x^2$
**c.** $2 - 2x^2$
**d.** $1 - x + 3x^2$
**e.** $1 - 2x + 5x^2$

**Questão 5.** Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear que satisfaz

$$T(3,2) = 2(3,2) \quad \text{e} \quad T(1,1) = 3(1,2).$$

Se $A$ denota a matriz de $T$ com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$, então o determinante de $A$ é igual a

**a.** $-18$
**b.** 24
**c.** 6
**d.** 12
**e.** $-14$

**Questão 6.** Em um espaço vetorial de dimensão finita, considere um operador linear invertível $T$ com autovetores $u$ e $v$ associados, respectivamente, a autovalores distintos $\lambda$ e $\mu$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\lambda \neq 0$ e $u$ é um autovetor do operador linear $T^{-1}$ associado ao autovalor $\lambda^{-1}$.

(II) $u + v$ é um autovetor de $T$ associado ao autovalor $\lambda + \mu$.

(III) $v$ é um autovetor do operador linear $T^3 + 2T^2$ associado ao autovalor $\mu^3 + 2\mu^2$.

Está correto o que ser afirma em

**a.** (I), (II) e (III).

**b.** (II) e (III), apenas.

**c.** (I), apenas.

**d.** (I) e (III), apenas.

**e.** (I) e (II), apenas.

**Questão 7.** Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear tal que

$$\operatorname{Ker}(T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - w = 0 \ \text{ e } \ y - w = 0\}.$$

Sabendo que $T$ é diagonalizável, que 3 é um autovalor de $T$ e que $\dim\big(\operatorname{Ker}(T - 3I)\big) = 1$, é correto afirmar que o polinômio característico de $T$ é igual a

**a.** $t(t-3)^2(t-\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 3$e $\lambda \neq 0$.

**b.** $t^2(t-3)^2$.

**c.** $t^2(t-3)(t-\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 3$e $\lambda \neq 0$.

**d.** $t(t^2+1)(t-3)$.

**e.** $t(t-3)(t-\lambda)(t-\mu)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e algum $\mu \in \mathbb{R}$ tais que$\lambda \neq 3$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 3$ e $\mu \neq 0$.

**Questão 8.** Considere as matrizes $A$, $B$ e $C$ abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & 1 & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix},$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se $C$ é invertível e satisfaz $C^{-1}AC = B$, então $a + b + c$ é igual a

**a.** $-1$

**b.** $2$

**c.** $-2$

**d.** $1$

**e.** $0$

**Questão 9.** Suponha que $\mathbb{R}^2$ tenha um produto interno $\langle \, , \, \rangle$ com respeito ao qual a base $B = \{(1,1), (1,2)\}$ seja ortonormal. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e seja $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por

$$T(x, y) = (\alpha x + \beta y, \beta y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então, $T$ é simétrico com relação ao produto interno $\langle \, , \, \rangle$ se, e somente se,

**a.** $3\alpha + 2\beta = 0$

**b.** $3\alpha + \beta = 0$

**c.** $\alpha + 2\beta = 0$

**d.** $\alpha + 3\beta = 0$

**e.** $2\alpha + 3\beta = 0$

**Questão 10.** Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$. Se $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denota a projeção ortogonal sobre $S$, então **NÃO** é correto afirmar que

**a.** a matriz de $T$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é invertível.
**b.** $T$ é diagonalizável.
**c.** o polinômio característico de $T$ é $p(t) = -t(t-1)^2$.
**d.** $T$ possui exatamente dois auto-espaços.
**e.** $S$ é um auto-espaço de $T$.

**Questão 11.** Seja $T\colon \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ e de $P_1(\mathbb{R})$, respectivamente, dadas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1 + x, 2 + 3x\}.$$

Então, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ é igual a

**a.** $(2a + c) + (b - c - d)x$
**b.** $(2b - 2c + d) + (-a + 3b - 3c + d)x$
**c.** $(2a + b - 2c) + (3a + 3c - d)x$
**d.** $(2a + d) + (-a + b - c)x$
**e.** $(2a - c - 2d) + (2a + 3b - 3d)x$

**Questão 12.** Acerca de um operador linear $T$ cujo polinômio característico é $p_T(t) = -t(t^2-1)(t^2-4)$, é correto afirmar que

**a.** $T^3 - T$ é diagonalizável e $p_{T^3-T}(t) = -t^3(t-6)(t+6)$.

**b.** $T^2 - 4I$ tem quatro autovalores distintos e não é diagonalizável.

**c.** $T$ é invertível e $p_{T^{-1}}(t) = -t(t^2-1)(t^2-\frac{1}{4})$.

**d.** $T^2$ tem cinco autovalores distintos e é diagonalizável.

**e.** $p_{T^2}(t) = p_T(t)^2$.

**Questão 13.** Seja $D\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear derivação, isto é, $D$ é definida por $D(p) = p'$, para todo $p \in P_2(\mathbb{R})$, e seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$[F]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases de $\mathbb{R}^3$ e de $P_2(\mathbb{R})$ dadas por

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1+x, x, x+x^2\},$$

respectivamente. Então, $\mathrm{Ker}(D \circ F)$ é

**a.** $[(1,1,-1)]$.

**b.** $\{(0,0,0)\}$.

**c.** $[(1,-1,0)]$.

**d.** $[(1,-1,1),(1,1,-1)]$.

**e.** $[(0,-1,1)]$.

**Questão 14.** Sobre duas matrizes $A$ e $B$ quadradas, do mesmo tamanho, e semelhantes, **NÃO** é correto afirmar que

**a.** $A$ e $B$ têm os mesmos autovetores.
**b.** $A$ e $B$ têm os mesmos autovalores.
**c.** $\det A = \det B$.
**d.** $A$ é invertível, se e somente se, $B$ for invertível.
**e.** existe alguma matriz invertível $S$ tal que $B = SAS^{-1}$.

**Questão 15.** Dizemos que uma reta que passa pela origem de $\mathbb{R}^2$ é invariante pelo operador linear $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se $S(x)$ estiver nessa reta sempre que $x$ estiver. A respeito dos operadores lineares $L, R, T$ de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem

$$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [R]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$, é correto afirmar que

**a.** há única reta invariante por $L$ e uma única reta invariante por $T$.
**b.** não há retas invariantes por $R$ e exitem duas retas invariantes por $L$.
**c.** não há retas invariantes por $T$ e há uma única reta invariante por $L$.
**d.** há uma única reta invariante por $R$ e uma única reta invariante por $T$.
**e.** não há retas invariantes por $R$ e exitem duas retas invariantes por $T$.

**Questão 16.** Assinale a afirmação **FALSA** acerca de um operador linear $T$ em um espaço vetorial de dimensão 2.

**a.** Se $T$ não é nulo e $T^2 = T$, então $T$ possui pelo menos um autovalor-distinto de zero.
**b.** Se $T^2$ não possui autovalor, então $T$ também não possui autovalor.
**c.** Se $T^2 = T$, então $T$ é diagonalizável.
**d.** Se $T$ é diagonalizável, então $T^2$ também é.
**e.** Se $T^2$ é diagonalizável, então $T$ também é.

# Gabarito do Aluno

**Nome:** ______________________________ **NUSP:** ______________

**Tipo de prova:** ____________

| **Questão** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | | | | | |
| 10 | | | | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | | | | |
| 13 | | | | | |
| 14 | | | | | |
| 15 | | | | | |
| 16 | | | | | |