MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

Prova 1 - 11/09/2013

Nome: _____ NUSP: _____

Professor: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

- (1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
- (2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
- (3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
- (4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
- (5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
- (6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
- (7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
- (8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
- (9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.

Nome: _____

O exemplo mostra a estrutura da folha óptica com cinco seções: 'Identificação', 'Questões 1 a 10', 'Questões 11 a 20', 'Questões 21 a 30' e 'Campo Reservado'. Cada seção contém uma grade de bolhas para marcar as respostas. O 'Campo Reservado' tem 5 colunas numeradas de 1ª a 5ª. Abaixo da grade, há uma linha de código com o número USP 0123456, o tipo de prova 68 e a turma 15. Arrows apontam para as bolhas preenchidas no exemplo.

Identificação									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A	B	C	D	E				
2	A	B	C	D	E				
3	A	B	C	D	E				
4	A	B	C	D	E				
5	A	B	C	D	E				
6	A	B	C	D	E				
7	A	B	C	D	E				
8	A	B	C	D	E				
9	A	B	C	D	E				
0	A	B	C	D	E				

Questões 1 a 10					
1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
0	A	B	C	D	E

Questões 11 a 20					
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

Questões 21 a 30					
21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E

Campo Reservado				
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

Código 8187.1 Mês: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Ano: 06 07

↑ número USP 0123456 ↑ respostas ↑ não preencher ↑ turma 15 ↑ tipo de prova 68 (já preenchido)

Notações: Nesta prova, se V é um espaço vetorial, o vetor nulo de V será denotado por 0_V e se $v_1, \dots, v_n$ são vetores de V , o subespaço vetorial de V gerado por eles será denotado por $[v_1, \dots, v_n]$.

Se V estiver munido de um produto interno, S for um subespaço de V e para $v \in V$, a projeção ortogonal de v sobre S existir, ela será denotada por $\text{proj}_S v$.

Para um inteiro não negativo n , $P_n(\mathbb{R})$ denota o espaço vetorial de todos os polinômios de grau $\leq n$, incluindo o polinômio nulo. O espaço vetorial de todos os polinômios será denotado por $P(\mathbb{R})$.

Dado um intervalo I contido em $\mathbb{R}$, o espaço vetorial de todas as funções $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas será denotado por $\mathcal{C}(I)$.

Questão 1. Dado um espaço vetorial V , sabe-se que uma função

$$\langle , \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

é um produto interno se, e somente se, estiverem satisfeitas:

- (i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, para todos $u, v \in V$;
- (ii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, para todos $u, v, w \in V$;
- (iii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todos $u, v \in V$; e
- (iv) para todo $u \in V$, $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0_V$ se, e somente se, $u = 0_V$.

Se $V = \mathbb{R}^2$, a respeito da função $\langle , \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

para todos $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$, é correto afirmar que $\langle , \rangle$

- a. satisfaz (i) e (ii), apenas.
- b. é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.
- c. não satisfaz (ii) nem (iv).
- d. não satisfaz (i) nem (iv).
- e. satisfaz (ii) e (iv), apenas.

Questão 2. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(2, 3) = (4, 6)$ e $T(1, 1) = (2, -1)$. Se $T(x, y) = (a, b)$, então $a + b$ é igual a

- a. $-11x - 8y$.
- b. $11x - 8y$.
- c. $-7x - 8y$.
- d. $11x + 8y$.
- e. $-7x + 8y$.

Questão 3. Sejam V e W subespaços vetoriais de dimensão finita de um espaço vetorial E . Considere as seguintes afirmações:

- (I) A soma $V + W$ é direta se, e somente se, $\dim(V + W) = \dim V + \dim W$.
- (II) Se $\dim(V \cap W) = 1$, então a união de uma base de V com uma base de W é um conjunto gerador de $V + W$.
- (III) Se $\dim(V \cap W) = 0$, então a união de uma base de V com uma base de W é sempre um conjunto linearmente independente em E .

Está correto o que se afirma em

- a. (I) e (II), apenas.
- b. (I) e (III), apenas.
- c. (II), apenas.
- d. (I), (II) e (III).
- e. (II) e (III), apenas.

Questão 4. Considere as afirmações abaixo.

- (I) Existe um operador linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que é injetor mas não é sobrejetor.
- (II) Existe uma transformação linear $T: P_4(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ sobrejetora.
- (III) Para todo $n > 0$, existe uma transformação linear $T: \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ injetora.

A respeito dessas afirmações, é correto afirmar que

- a. apenas (I) e (III) são falsas.
- b. apenas (II) é falsa.
- c. apenas (II) e (III) são falsas.
- d. (I), (II) e (III) são falsas.
- e. apenas (III) é falsa.

Questão 5. Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt,$$

para todos $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Então, a melhor aproximação afim g (ou seja, da forma $g(t) = at + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$) da função $f(t) = \sin t$ em $[-\pi, \pi]$ é

- a. $g(t) = -\frac{2}{\pi^2}t + \frac{1}{\pi}$
- b. $g(t) = \frac{3}{\pi^2}t$
- c. $g(t) = -\frac{1}{\pi^2}t$
- d. $g(t) = \frac{2}{\pi^2}t - \frac{1}{\pi}$
- e. $g(t) = \frac{1}{\pi^2}t$

Questão 6. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja Y um subespaço vetorial de E . Considere as seguintes afirmações:

- (I) Para qualquer $x \in E$, existem únicos $y \in Y$ e $z \in Y^\perp$ tais que $x = y + z$.
- (II) Se $\dim Y = 3$ e $\dim Y^\perp = 2$, então existe uma transformação linear $T: E \rightarrow E$ tal que $\text{Ker } T = Y^\perp$ e $\text{Im } T = Y$.
- (III) Se $\dim Y = 1$ e $\dim E = 4$, então existe uma transformação linear $T: E \rightarrow E$ tal que $\text{Ker } T = \text{Im } T = Y$.

Está correto o que se afirma em

- a. (I), (II) e (III).
- b. (II) e (III), apenas.
- c. (I) e (II), apenas.
- d. (I) e (III), apenas.
- e. (I), apenas.

Questão 7. Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e seja $\| \cdot \|$ a norma associada. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $-\|x\|\|y\| \leq \langle x, y \rangle$ para todos x, y em E .
- (II) $\langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|$ para todos x, y em E .
- (III) Se x e y são vetores não nulos de E que satisfazem $\langle x, y \rangle = 0$, então $\{x, y\}$ é linearmente independente.

Está correto o que se afirma em

- a. (II) e (III), apenas.
- b. (II), apenas.
- c. (I) e (III), apenas.
- d. (I), (II) e (III).
- e. (I) e (II), apenas.

Questão 8. Se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x, 2x + y - z, -x, x + y + z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então $\dim(\text{Im } T)$ e $\dim(\text{Ker } T)$ são iguais a, respectivamente,

- a. 3 e 0.
- b. 1 e 2.
- c. 3 e 1.
- d. 2 e 1.
- e. 2 e 0.

Questão 9. Considere a transformação linear $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$, definida por $T(f) = f + f'$, para todo $f \in P_3(\mathbb{R})$, onde f' denota a derivada de f . É correto afirmar que

- a. T é injetora, e $\dim(\text{Ker } T) = 1$.
- b. $\dim(\text{Ker } T) = 1$, e T é sobrejetora.
- c. T é injetora, e $\dim(\text{Im } T) = 2$.
- d. T é injetora e sobrejetora.
- e. $\dim(\text{Ker } T) = 1$, e $\dim(\text{Im } T) = 3$.

Questão 10. Considere as seguintes afirmações acerca de um espaço vetorial E com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

- (I) Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de E e se, dado $x \in E$, temos $\langle x, e_i \rangle = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, então $x = 0_E$.
- (II) Se Y e Z são subespaços vetoriais de E tais que $E = Y \oplus Z$, então $Z = Y^\perp$ e $Y = Z^\perp$.
- (III) Se Y e Z são subespaços vetoriais de E tais que $E = Y \oplus Z$, e se B e C são bases ortonormais de Y e de Z , respectivamente, então $B \cup C$ é uma base ortonormal de E .

Está correto o que se afirma em

- a. (I) e (II), apenas.
- b. (II) e (III), apenas.
- c. (III), apenas.
- d. (I) e (III), apenas.
- e. (I), apenas.

Questão 11. Assinale a alternativa que contém a definição de uma função T que **NÃO** é uma transformação linear.

- a. $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = AA^t$, para toda $A \in M_2(\mathbb{R})$, onde A^t denota a matriz transposta de A .
- b. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = \text{proj}_Y(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, onde $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
- c. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (x + 2y, x - 4y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- d. $T: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$, dada por $T(p) = 2p + p'$, para todo $p \in P(\mathbb{R})$, onde p' denota a derivada de p .
- e. $T: \mathcal{C}([0, 2]) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $T(f) = f(1) + \int_0^2 f(t)dt$, para toda $f \in \mathcal{C}([0, 2])$.

Questão 12. Seja $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} 2a + 5b - c & -a - 3b + c + d \\ a + 2c + 5d & 3a + 7b - c + d \end{pmatrix},$$

para todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Então, $\dim(\text{Ker } T)$ e $\dim(\text{Im } T)$ são iguais a, respectivamente,

- a. 0 e 4.
- b. 1 e 3.
- c. 2 e 2.
- d. 3 e 1.
- e. 1 e 2.

Questão 13. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja S um subespaço vetorial de V . Assinale a alternativa correta do operador linear $T: V \rightarrow V$ definido por $T(v) = \text{proj}_S v$, para todo $v \in V$.

- a. $\text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0_V\}$ e $V \neq \text{Ker } T + \text{Im } T$.
- b. $\text{Ker } T = \text{Im } T = S$.
- c. $V \neq \text{Ker } T + \text{Im } T$ e $\text{Ker } T \cap \text{Im } T \neq \{0_V\}$.
- d. $\text{Ker } T = S$ e $\text{Im } T = S^\perp$.
- e. $\text{Ker } T = S^\perp$ e $\text{Im } T = S$.

Questão 14. Sejam V e W os subespaços vetoriais de $P_3(\mathbb{R})$ definidos por

$$V = [1 + t^2, t + t^2, 1 - t] \quad \text{e} \quad W = [t, t^3].$$

Então, $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V + W)$ são iguais a, respectivamente,

- a. 2 e 2.
- b. 1 e 4.
- c. 0 e 3.
- d. 1 e 3.
- e. 0 e 4.

Questão 15. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt,$$

para todos $f, g \in P_2(\mathbb{R})$. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o seguinte subespaço vetorial:

$$V = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = p(-1)\}.$$

Então, uma base ortonormal de V é

- a. $\left\{1, \frac{3\sqrt{5}}{2}t^2\right\}$.
- b. $\left\{\frac{3\sqrt{5}}{2}, 2t, t^2 - \frac{1}{3}\right\}$.
- c. $\left\{1, \frac{3\sqrt{5}}{2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$.
- d. $\left\{\frac{3\sqrt{5}}{2}, t^2 - \frac{1}{3}\right\}$.
- e. $\left\{1, 2t, \frac{3\sqrt{5}}{2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$.

Questão 16. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno usual, ou seja,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$

para todos $a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{R}$. Seja $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear que satisfaz

$$T \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\text{Im } T = \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right].$$

Assinale a alternativa correta acerca de T .

- a. $\text{Ker } T = (\text{Im } T)^\perp$.
- b. $\text{Ker } T = \text{Im } T$.
- c. $(\text{Im } T)^\perp \subset \text{Ker } T$, mas $\text{Ker } T \neq (\text{Im } T)^\perp$.
- d. $\text{Ker } T \subset \text{Im } T$, mas $\text{Ker } T \neq \text{Im } T$.
- e. $\text{Ker } T \subset (\text{Im } T)^\perp$, mas $\text{Ker } T \neq (\text{Im } T)^\perp$.

Gabarito do Aluno

Nome: _____ NUSP: _____

Tipo de prova: _____

Questão	a	b	c	d	e
1	☐				
2	☐				
3	☐				
4	☐				
5	☐				
6	☐				
7	☐				
8	☐				
9	☐				
10	☐				
11	☐				
12	☐				
13	☐				
14	☐				
15	☐				
16	☐				