# MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

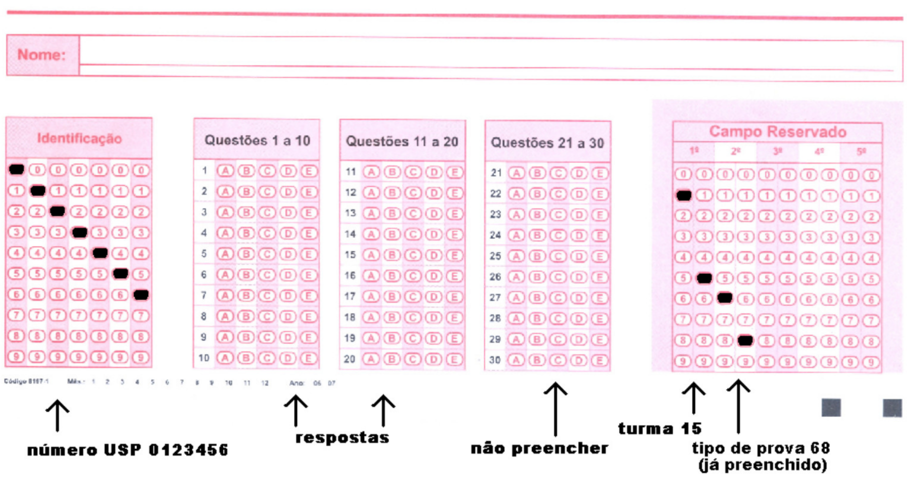
## Prova 1 - 11/09/2013

**Nome:** ______________________________ **NUSP:** ______________

**Professor:** ______________________________ **Turma:** ______________

### INSTRUÇÕES

(1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
(2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
(3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
(4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
(5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
(6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
(7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
(8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
(9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.



**Notações:** Nesta prova, se $V$ é um espaço vetorial, o vetor nulo de $V$ será denotado por $0_V$ e se $v_1, \dots, v_n$ são vetores de $V$, o subespaço vetorial de $V$ gerado por eles será denotado por $[v_1, \dots, v_n]$.

Se $V$ estiver munido de um produto interno, $S$ for um subespaço de $V$ e para $v \in V$, a projeção ortogonal de $v$ sobre $S$ existir, ela será denotada por $\operatorname{proj}_S v$.

Para um inteiro não negativo $n$, $P_n(\mathbb{R})$ denota o espaço vetorial de todos os polinômios de grau $\leq n$, incluindo o polinômio nulo. O espaço vetorial de todos os polinômios será denotado por $P(\mathbb{R})$.

Dado um intervalo $I$ contido em $\mathbb{R}$, o espaço vetorial de todas as funções $f\colon I \to \mathbb{R}$ contínuas será denotado por $\mathscr{C}(I)$.

**Questão 1.** Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt,$$

para todos $f, g \in P_2(\mathbb{R})$. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o seguinte subespaço vetorial:

$$V = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = p(-1)\}.$$

Então, uma base ortonormal de $V$ é

**a.** $\left\{\frac{3\sqrt{5}}{2},\ 2t,\ t^2 - \frac{1}{3}\right\}$.

**b.** $\left\{1,\ \frac{3\sqrt{5}}{2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$.

**c.** $\left\{1,\ 2t,\ \frac{3\sqrt{5}}{2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$.

**d.** $\left\{\frac{3\sqrt{5}}{2},\ t^2 - \frac{1}{3}\right\}$.

**e.** $\left\{1,\ \frac{3\sqrt{5}}{2}t^2\right\}$.

**Questão 2.** Sejam $V$ e $W$ os subespaços vetoriais de $P_3(\mathbb{R})$ definidos por

$$V = [1+t^2, t+t^2, 1-t] \quad \text{e} \quad W = [t, t^3].$$

Então, $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V+W)$ são iguais a, respectivamente,

**a.** 0 e 4.
**b.** 1 e 4.
**c.** 2 e 2.
**d.** 1 e 3.
**e.** 0 e 3.

**Questão 3.** Considere as seguintes afirmações acerca de um espaço vetorial $E$ com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$:

(I) Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $E$ e se, dado $x \in E$, temos $\langle x, e_i \rangle = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$, então $x = 0_E$.

(II) Se $Y$ e $Z$ são subespaços vetoriais de $E$ tais que $E = Y \oplus Z$, então $Z = Y^\perp$ e $Y = Z^\perp$.

(III) Se $Y$ e $Z$ são subespaços vetoriais de $E$ tais que $E = Y \oplus Z$, e se $B$ e $C$ são bases ortonormais de $Y$ e de $Z$, respectivamente, então $B \cup C$ é uma base ortonormal $E$.

Está correto o que se afirma em

**a.** (I), apenas.
**b.** (I) e (III), apenas.
**c.** (III), apenas.
**d.** (I) e (II), apenas.
**e.** (II) e (III), apenas.

**Questão 4.** Seja $T\colon P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} 2a + 5b - c & -a - 3b + c + d \\ a + 2c + 5d & 3a + 7b - c + d \end{pmatrix},$$

para todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Então, $\dim(\operatorname{Ker} T)$ e $\dim(\operatorname{Im} T)$ são iguais a, respectivemente,

**a.** 2 e 2.

**b.** 3 e 1.

**c.** 1 e 2.

**d.** 1 e 3.

**e.** 0 e 4.

**Questão 5.** Considere o espaço vetorial $\mathscr{C}([-\pi, \pi])$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt,$$

para todos $f, g \in \mathscr{C}([-\pi, \pi])$. Então, a melhor aproximação afim $g$ (ou seja, da forma $g(t) = at + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$) da função $f(t) = \operatorname{sen} t$ em $[-\pi, \pi]$ é

**a.** $g(t) = \frac{2}{\pi^2}t - \frac{1}{\pi}$

**b.** $g(t) = \frac{3}{\pi^2}t$

**c.** $g(t) = \frac{1}{\pi^2}t$

**d.** $g(t) = -\frac{2}{\pi^2}t + \frac{1}{\pi}$

**e.** $g(t) = -\frac{1}{\pi^2}t$

**Questão 6.** Seja $E$ um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja $Y$ um subespaço vetorial de $E$. Considere as seguintes afirmações:

(I) Para qualquer $x \in E$, existem únicos $y \in Y$ e $z \in Y^{\perp}$ tais que $x = y + z$.

(II) Se $\dim Y = 3$ e $\dim Y^{\perp} = 2$, então existe uma transformação linear $T\colon E \to E$ tal que $\operatorname{Ker} T = Y^{\perp}$ e $\operatorname{Im} T = Y$.

(III) Se $\dim Y = 1$ e $\dim E = 4$, então existe uma transformação linear $T\colon E \to E$ tal que $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T = Y$.

Está correto o que se afirma em

**a.** (II) e (III), apenas.

**b.** (I) e (III), apenas.

**c.** (I) e (II), apenas.

**d.** (I), (II) e (III).

**e.** (I), apenas.

**Questão 7.** Se $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x, 2x + y - z, -x, x + y + z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então $\dim(\operatorname{Im} T)$ e $\dim(\operatorname{Ker} T)$ são iguais a, respectivamente,

**a.** 2 e 1.

**b.** 3 e 0.

**c.** 3 e 1.

**d.** 2 e 0.

**e.** 1 e 2.

**Questão 8.** Sejam $V$ e $W$ subespaços vetoriais de dimensão finita de um espaço vetorial $E$. Considere as seguintes afirmações:

(I) A soma $V + W$ é direta se, e somente se, $\dim(V + W) = \dim V + \dim W$.

(II) Se $\dim(V \cap W) = 1$, então a união de uma base de $V$ com uma base de $W$ é um conjunto gerador de $V + W$.

(III) Se $\dim(V \cap W) = 0$, então a união de uma base de $V$ com uma base de $W$ é sempre um conjunto linearmente independente em $E$.

Está correto o que se afirma em

**a.** (I) e (II), apenas.

**b.** (I) e (III), apenas.

**c.** (II) e (III), apenas.

**d.** (II), apenas.

**e.** (I), (II) e (III).

**Questão 9.** Seja $E$ um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e seja $\|\ \|$ a norma associada. Considere as seguintes afirmações:

(I) $-\|x\|\|y\| \leq \langle x, y\rangle$ para todos $x, y$ em $E$.

(II) $\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$ para todos $x, y$ em $E$.

(III) Se $x$ e $y$ são vetores não nulos de $E$ que satisfazem $\langle x, y\rangle = 0$, então $\{x, y\}$ é linearmente independente.

Está correto o que se afirma em

**a.** (II), apenas.

**b.** (I) e (III), apenas.

**c.** (I) e (II), apenas.

**d.** (I), (II) e (III).

**e.** (II) e (III), apenas.

**Questão 10.** Considere as afirmações abaixo.

(I) Existe um operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que é injetor mas não é sobrejetor.

(II) Existe uma transformação linear $T\colon P_4(\mathbb{R}) \to M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ sobrejetora.

(III) Para todo $n > 0$, existe uma transformação linear $T\colon \mathscr{C}([0,1]) \to \mathbb{R}^n$ injetora.

A respeito dessas afirmações, é correto afirmar que

**a.** apenas (II) é falsa.

**b.** apenas (II) e (III) são falsas.

**c.** (I), (II) e (III) são falsas.

**d.** apenas (III) é falsa.

**e.** apenas (I) e (III) são falsas.

**Questão 11.** Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(2,3) = (4,6)$ e $T(1,1) = (2,-1)$. Se $T(x,y) = (a,b)$, então $a+b$ é igual a

**a.** $11x - 8y$.

**b.** $-7x - 8y$.

**c.** $-7x + 8y$.

**d.** $11x + 8y$.

**e.** $-11x - 8y$.

**Questão 12.** Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja $S$ um subespaço vetorial de $V$. Assinale a alternativa correta acerta do operador linear $T\colon V \to V$ definido por $T(v) = \operatorname{proj}_S v$, para todo $v \in V$.

**a.** $V \neq \operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T$ e $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T \neq \{0_V\}$.

**b.** $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T = S$.

**c.** $\operatorname{Ker} T = S$ e $\operatorname{Im} T = S^\perp$.

**d.** $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T = \{0_V\}$ e $V \neq \operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T$.

**e.** $\operatorname{Ker} T = S^\perp$ e $\operatorname{Im} T = S$.

**Questão 13.** Considere a transformação linear $T\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, definida por $T(f) = f + f'$, para todo $f \in P_3(\mathbb{R})$, onde $f'$ denota a derivada de $f$. É correto afirmar que

**a.** $T$ é injetora, e $\dim(\operatorname{Im} T) = 2$.
**b.** $T$ é injetora, e $\dim(\operatorname{Ker} T) = 1$.
**c.** $\dim(\operatorname{Ker} T) = 1$, e $T$ é sobrejetora.
**d.** $\dim(\operatorname{Ker} T) = 1$, e $\dim(\operatorname{Im} T) = 3$.
**e.** $T$ é injetora e sobrejetora.

**Questão 14.** Assinale a alternativa que contém a definição de uma função $T$ que **NÃO** é uma transformação linear.

**a.** $T\colon P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$, dada por $T(p) = 2p + p'$, para todo $p \in P(\mathbb{R})$, onde $p'$ denota a derivada de $p$.
**b.** $T\colon \mathscr{C}([0,2]) \to \mathbb{R}$, dada por $T(f) = f(1) + \int_0^2 f(t)dt$, para toda $f \in \mathscr{C}([0,2])$.
**c.** $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = AA^{\mathrm{t}}$, para toda $A \in M_2(\mathbb{R})$, onde $A^{\mathrm{t}}$ denota a matriz transposta de $A$.
**d.** $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y,z) = \operatorname{proj}_Y(x,y,z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, onde $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$.
**e.** $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) = (x+2y, x-4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**Questão 15.** Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno usual, ou seja,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$

para todos $a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{R}$. Seja $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear que satisfaz

$$T\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\operatorname{Im} T = \left[ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right].$$

Assinale a alternativa correta acerca de $T$.

**a.** $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Im} T$, mas $\operatorname{Ker} T \neq \operatorname{Im} T$.

**b.** $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T)^\perp$.

**c.** $\operatorname{Ker} T \subset (\operatorname{Im} T)^\perp$, mas $\operatorname{Ker} T \neq (\operatorname{Im} T)^\perp$.

**d.** $(\operatorname{Im} T)^\perp \subset \operatorname{Ker} T$, mas $\operatorname{Ker} T \neq (\operatorname{Im} T)^\perp$.

**e.** $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$.

**Questão 16.** Dado um espaço vetorial $V$, sabe-se que uma função

$$\langle\ ,\ \rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$$

é um produto interno se, e somente se, estiverem satisfeitas:

(i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, para todos $u, v \in V$;

(ii) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$, para todos $u, v, w \in V$;

(iii) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todos $u, v \in V$; e

(iv) para todo $u \in V$, $\langle u, u\rangle \geq 0$ e $\langle u, u\rangle = 0_V$ se, e somente se, $u = 0_V$.

Se $V = \mathbb{R}^2$, a respeito da função $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)\rangle = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix},$$

para todos $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$, é correto afirmar que $\langle\ ,\ \rangle$

**a.** é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

**b.** satisfaz (ii) e (iv), apenas.

**c.** não satisfaz (i) nem (iv).

**d.** não satisfaz (ii) nem (iv).

**e.** satisfaz (i) e (ii), apenas.

# Gabarito do Aluno

**Nome:** ______________________________ **NUSP:** ______________

**Tipo de prova:** ____________

| Questão | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | | | | | |
| 10 | | | | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | | | | |
| 13 | | | | | |
| 14 | | | | | |
| 15 | | | | | |
| 16 | | | | | |