

MAT2458 - Álgebra Linear para Engenharia II

Prova 1 - 11/09/2013

Nome: _____ NUSP: _____

Professor: _____ Turma: _____

INSTRUÇÕES

- (1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
- (2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
- (3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
- (4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
- (5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
- (6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
- (7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
- (8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
- (9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.

Nome: _____

Identificação											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Código 8187-1 Mês: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Ano: 08 07

↑
número USP 0123456

Questões 1 a 10											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

↑
respostas

Questões 11 a 20											
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

↑
não preencher

Questões 21 a 30											
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

↑
turma 15

Campo Reservado											
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125

↑
tipo de prova 68 (já preenchido)

Notações: Nesta prova, se V é um espaço vetorial, o vetor nulo de V será denotado por 0_V e se $v_1, \dots, v_n$ são vetores de V , o subespaço vetorial de V gerado por eles será denotado por $[v_1, \dots, v_n]$.

Se V estiver munido de um produto interno, S for um subespaço de V e para $v \in V$, a projeção ortogonal de v sobre S existir, ela será denotada por $\text{proj}_S v$.

Para um inteiro não negativo n , $P_n(\mathbb{R})$ denota o espaço vetorial de todos os polinômios de grau $\leq n$, incluindo o polinômio nulo. O espaço vetorial de todos os polinômios será denotado por $P(\mathbb{R})$.

Dado um intervalo I contido em $\mathbb{R}$, o espaço vetorial de todas as funções $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas será denotado por $\mathcal{C}(I)$.

Questão 1. Sejam V e W subespaços vetoriais de dimensão finita de um espaço vetorial E . Considere as seguintes afirmações:

- (I) A soma $V + W$ é direta se, e somente se, $\dim(V + W) = \dim V + \dim W$.
- (II) Se $\dim(V \cap W) = 1$, então a união de uma base de V com uma base de W é um conjunto gerador de $V + W$.
- (III) Se $\dim(V \cap W) = 0$, então a união de uma base de V com uma base de W é sempre um conjunto linearmente independente em E .

Está correto o que se afirma em

- a. (I) e (III), apenas.
- b. (I) e (II), apenas.
- c. (II), apenas.
- d. (I), (II) e (III).
- e. (II) e (III), apenas.

Questão 2. Considere a transformação linear $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$, definida por $T(f) = f + f'$, para todo $f \in P_3(\mathbb{R})$, onde f' denota a derivada de f . É correto afirmar que

- a. $\dim(\text{Ker } T) = 1$, e T é sobrejetora.
- b. T é injetora e sobrejetora.
- c. T é injetora, e $\dim(\text{Ker } T) = 1$.
- d. $\dim(\text{Ker } T) = 1$, e $\dim(\text{Im } T) = 3$.
- e. T é injetora, e $\dim(\text{Im } T) = 2$.

Questão 3. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja Y um subespaço vetorial de E . Considere as seguintes afirmações:

- (I) Para qualquer $x \in E$, existem únicos $y \in Y$ e $z \in Y^\perp$ tais que $x = y + z$.
- (II) Se $\dim Y = 3$ e $\dim Y^\perp = 2$, então existe uma transformação linear $T: E \rightarrow E$ tal que $\text{Ker } T = Y^\perp$ e $\text{Im } T = Y$.
- (III) Se $\dim Y = 1$ e $\dim E = 4$, então existe uma transformação linear $T: E \rightarrow E$ tal que $\text{Ker } T = \text{Im } T = Y$.

Está correto o que se afirma em

- a. (II) e (III), apenas.
- b. (I), (II) e (III).
- c. (I), apenas.
- d. (I) e (III), apenas.
- e. (I) e (II), apenas.

Questão 4. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno usual, ou seja,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$

para todos $a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{R}$. Seja $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear que satisfaz

$$T \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\text{Im } T = \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right].$$

Assinale a alternativa correta acerca de T .

- a.** $\text{Ker } T = (\text{Im } T)^\perp$.
- b.** $(\text{Im } T)^\perp \subset \text{Ker } T$, mas $\text{Ker } T \neq (\text{Im } T)^\perp$.
- c.** $\text{Ker } T \subset \text{Im } T$, mas $\text{Ker } T \neq \text{Im } T$.
- d.** $\text{Ker } T \subset (\text{Im } T)^\perp$, mas $\text{Ker } T \neq (\text{Im } T)^\perp$.
- e.** $\text{Ker } T = \text{Im } T$.

Questão 5. Considere as seguintes afirmações acerca de um espaço vetorial E com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

- (I) Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de E e se, dado $x \in E$, temos $\langle x, e_i \rangle = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, então $x = 0_E$.
- (II) Se Y e Z são subespaços vetoriais de E tais que $E = Y \oplus Z$, então $Z = Y^\perp$ e $Y = Z^\perp$.
- (III) Se Y e Z são subespaços vetoriais de E tais que $E = Y \oplus Z$, e se B e C são bases ortonormais de Y e de Z , respectivamente, então $B \cup C$ é uma base ortonormal E .

Está correto o que se afirma em

- a. (I) e (II), apenas.
- b. (I) e (III), apenas.
- c. (II) e (III), apenas.
- d. (I), apenas.
- e. (III), apenas.

Questão 6. Assinale a alternativa que contém a definição de uma função T que **NÃO** é uma transformação linear.

- a. $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = AA^t$, para toda $A \in M_2(\mathbb{R})$, onde A^t denota a matriz transposta de A .
- b. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = \text{proj}_Y(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, onde $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
- c. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (x + 2y, x - 4y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- d. $T: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$, dada por $T(p) = 2p + p'$, para todo $p \in P(\mathbb{R})$, onde p' denota a derivada de p .
- e. $T: \mathcal{C}([0, 2]) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $T(f) = f(1) + \int_0^2 f(t)dt$, para toda $f \in \mathcal{C}([0, 2])$.

Questão 7. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja S um subespaço vetorial de V . Assinale a alternativa correta acerca do operador linear $T: V \rightarrow V$ definido por $T(v) = \text{proj}_S v$, para todo $v \in V$.

- a. $\text{Ker } T = S$ e $\text{Im } T = S^\perp$.
- b. $\text{Ker } T = \text{Im } T = S$.
- c. $V \neq \text{Ker } T + \text{Im } T$ e $\text{Ker } T \cap \text{Im } T \neq \{0_V\}$.
- d. $\text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0_V\}$ e $V \neq \text{Ker } T + \text{Im } T$.
- e. $\text{Ker } T = S^\perp$ e $\text{Im } T = S$.

Questão 8. Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\| \cdot \|$ a norma associada. Considere as seguintes afirmações:

- (I) $-\|x\|\|y\| \leq \langle x, y \rangle$ para todos x, y em E .
- (II) $\langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|$ para todos x, y em E .
- (III) Se x e y são vetores não nulos de E que satisfazem $\langle x, y \rangle = 0$, então $\{x, y\}$ é linearmente independente.

Está correto o que se afirma em

- a. (I) e (II), apenas.
- b. (I), (II) e (III).
- c. (II), apenas.
- d. (I) e (III), apenas.
- e. (II) e (III), apenas.

Questão 9. Se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x, 2x + y - z, -x, x + y + z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então $\dim(\text{Im } T)$ e $\dim(\text{Ker } T)$ são iguais a, respectivamente,

- a. 3 e 1.
- b. 2 e 1.
- c. 3 e 0.
- d. 1 e 2.
- e. 2 e 0.

Questão 10. Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt,$$

para todos $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Então, a melhor aproximação afim g (ou seja, da forma $g(t) = at + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$) da função $f(t) = \sin t$ em $[-\pi, \pi]$ é

- a. $g(t) = -\frac{1}{\pi^2}t$
- b. $g(t) = \frac{3}{\pi^2}t$
- c. $g(t) = \frac{2}{\pi^2}t - \frac{1}{\pi}$
- d. $g(t) = -\frac{2}{\pi^2}t + \frac{1}{\pi}$
- e. $g(t) = \frac{1}{\pi^2}t$

Questão 11. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(2, 3) = (4, 6)$ e $T(1, 1) = (2, -1)$. Se $T(x, y) = (a, b)$, então $a + b$ é igual a

- a. $-7x - 8y$.
- b. $11x - 8y$.
- c. $11x + 8y$.
- d. $-11x - 8y$.
- e. $-7x + 8y$.

Questão 12. Seja $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} 2a + 5b - c & -a - 3b + c + d \\ a + 2c + 5d & 3a + 7b - c + d \end{pmatrix},$$

para todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Então, $\dim(\text{Ker } T)$ e $\dim(\text{Im } T)$ são iguais a, respectivamente,

- a. 2 e 2.
- b. 3 e 1.
- c. 1 e 3.
- d. 0 e 4.
- e. 1 e 2.

Questão 13. Dado um espaço vetorial V , sabe-se que uma função

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

é um produto interno se, e somente se, estiverem satisfeitas:

- (i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, para todos $u, v \in V$;
- (ii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, para todos $u, v, w \in V$;
- (iii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todos $u, v \in V$; e
- (iv) para todo $u \in V$, $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0_V$ se, e somente se, $u = 0_V$.

Se $V = \mathbb{R}^2$, a respeito da função $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

para todos $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$, é correto afirmar que $\langle , \rangle$

- a. é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.
- b. não satisfaz (i) nem (iv).
- c. não satisfaz (ii) nem (iv).
- d. satisfaz (i) e (ii), apenas.
- e. satisfaz (ii) e (iv), apenas.

Questão 14. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt,$$

para todos $f, g \in P_2(\mathbb{R})$. Considere, em $P_2(\mathbb{R})$, o seguinte subespaço vetorial:

$$V = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = p(-1)\}.$$

Então, uma base ortonormal de V é

- a. $\left\{1, \frac{3\sqrt{5}}{2}t^2\right\}$.
- b. $\left\{1, \frac{3\sqrt{5}}{2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$.
- c. $\left\{1, 2t, \frac{3\sqrt{5}}{2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$.
- d. $\left\{\frac{3\sqrt{5}}{2}, 2t, t^2 - \frac{1}{3}\right\}$.
- e. $\left\{\frac{3\sqrt{5}}{2}, t^2 - \frac{1}{3}\right\}$.

Questão 15. Considere as afirmações abaixo.

- (I) Existe um operador linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que é injetor mas não é sobrejetor.
- (II) Existe uma transformação linear $T: P_4(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ sobrejetora.
- (III) Para todo $n > 0$, existe uma transformação linear $T: \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ injetora.

A respeito dessas afirmações, é correto afirmar que

- a. apenas (II) e (III) são falsas.
- b. apenas (III) é falsa.
- c. apenas (I) e (III) são falsas.
- d. apenas (II) é falsa.
- e. (I), (II) e (III) são falsas.

Questão 16. Sejam V e W os subespaços vetoriais de $P_3(\mathbb{R})$ definidos por

$$V = [1 + t^2, t + t^2, 1 - t] \quad \text{e} \quad W = [t, t^3].$$

Então, $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V + W)$ são iguais a, respectivamente,

- a. 1 e 4.
- b. 0 e 4.
- c. 2 e 2.
- d. 0 e 3.
- e. 1 e 3.

Gabarito do Aluno

Nome: _____ NUSP: _____

Tipo de prova: _____

Questão	a	b	c	d	e
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐
11	☐	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐	☐
13	☐	☐	☐	☐	☐
14	☐	☐	☐	☐	☐
15	☐	☐	☐	☐	☐
16	☐	☐	☐	☐	☐