

**1Q1.** A solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x(t)$$

é:

- (a)  $x(t) = c_1 e^t (\cos(2t), \sin(2t), 0) + c_2 e^t (\sin(2t), -\cos(2t), 0) + c_3 e^{3t} (1, 0, 0)$ ,  
 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $x(t) = c_1 e^t (\cos(2t), \sin(2t), 0) + c_2 e^t (\sin(2t), \cos(2t), 0) + c_3 e^{3t} (0, 0, 1)$ ,  
 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $x(t) = c_1 e^t (\cos(2t), \sin(2t), 0) + c_2 e^t (\sin(2t), -\cos(2t), 0)$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $x(t) = c_1 e^{2t} (\cos t, \sin t, 0) + c_2 e^{2t} (\sin t, \cos t, 0) + c_3 e^{3t} (0, 0, 1)$ ,  
 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ ;
- (e)  $x(t) = c_1 e^t (\cos(2t), \sin(2t), 0) + c_2 e^t (\sin(2t), -\cos(2t), 0) + c_3 e^{3t} (0, 0, 1)$ ,  
 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

**1Q2.** Seja  $T$  um operador linear em um espaço vetorial  $E$  munido de um produto interno. Suponha que  $F$  seja um subespaço de  $E$  e que  $x$  seja um autovetor de  $T$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) o subespaço  $[x]$  é invariante por  $T$  se e somente se  $T$  for simétrico;
- (II) o subespaço  $[x]^\perp$  é necessariamente invariante por  $T$ ;
- (III) se  $T$  é simétrico então  $F$  é necessariamente invariante por  $T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são falsas.

**1Q3.** Seja  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  a solução do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t), \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t), \\ x_3'(t) = x_2(t) + x_3(t), \end{cases}$$

tal que  $x(0) = (1, 1, -1)$ . Temos que  $x(\ln 2)$  é igual a:

- (a)  $(2, 2, 0)$ ;
- (b)  $(4, 1, -1)$ ;
- (c)  $(2, 1, -1)$ ;
- (d)  $(1, 1, -1)$ ;
- (e)  $(0, 1, -1)$ .

**1Q4.** Seja  $A \in M_2(\mathbb{R})$  uma matriz real com autovalores  $3 + i$  e  $3 - i$  e seja  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  o operador linear no espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^2$  cuja matriz em relação à base canônica é  $A$ . Se  $\text{Ker}(T - (3 + i)\text{I}) = [(1, -i)]$  então a solução do sistema de equações diferenciais  $x'(t) = Ax(t)$  tal que  $x(0) = (1, -1)$  é:

- (a)  $x(t) = e^{3t}(1, -1)$ ;
- (b)  $x(t) = e^{3t}(-\cos t + \text{sen } t, \text{sen } t + \cos t)$ ;
- (c)  $x(t) = e^{3t}(\cos t + \text{sen } t, \text{sen } t - \cos t)$ ;
- (d)  $x(t) = e^t(\cos(3t) - \text{sen}(3t), \text{sen}(3t) - \cos(3t))$ ;
- (e)  $x(t) = e^{3t}(\cos t, -\cos t)$ .

**1Q5.** Seja  $A \in M_4(\mathbb{R})$  uma matriz real e seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  o operador linear no espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^4$  cuja matriz em relação à base canônica é  $A$ . Se  $i$  é um autovalor de  $T$  e  $(-i, 1 - i, 1, 0)$  e  $(0, 1 + i, 0, 2)$  são autovetores de  $T$  associados a  $i$  então:

- (a)  $A^{15} = 0$ ;
- (b)  $A^{15} = A$ ;
- (c)  $A^{15} = \text{I}$ ;
- (d)  $A^{15} = -A$ ;
- (e)  $A^{15} = -\text{I}$ .

**1Q6.** Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Considere a equação:

$$ax^2 - 2xy + ay^2 - 1 = 0,$$

onde  $a$  é um número real não nulo. Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se  $0 < a < 1$  então a equação define uma hipérbole;
- (II) se  $a > 1$  então a equação define uma elipse;
- (III) se  $a = 1$  então a equação define um par de retas paralelas.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são falsas.

**1Q7.** Sejam  $E$  um espaço vetorial com produto interno e  $T : E \rightarrow E$  um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $B$  é uma base ortogonal de  $E$  então a matriz  $[T]_B$  é simétrica;
- (II) se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são autovalores distintos de  $T$ ,  $A_1$  e  $A_2$  são conjuntos ortogonais de vetores de  $E$  tais que:

$$A_1 \subset \text{Ker}(T - \lambda_1 I), \quad A_2 \subset \text{Ker}(T - \lambda_2 I),$$

então a união  $A_1 \cup A_2$  é um conjunto ortogonal;

- (III) se  $B$  é uma base de  $E$  tal que a matriz  $[T]_B$  é diagonal então  $B$  é ortonormal.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**1Q8.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear não injetor, simétrico com respeito ao produto interno canônico de  $\mathbb{R}^3$ , que satisfaz  $T(v) = v$ , para todo  $v$  pertencente ao subespaço:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}.$$

A matriz  $[T]_{\text{can}}$  de  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{R}^3$  é igual a:

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$
- (b)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$
- (c)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$
- (d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$
- (e)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

**1Q9.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear cuja matriz em relação à base canônica é:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que  $T$  tem autovalores 0,  $-1$  e 2, com autoespaços:

$$\text{Ker}(T) = [(0, 0, 1)], \quad \text{Ker}(T+I) = [(2, -\sqrt{2}, 0)], \quad \text{Ker}(T-2I) = [(1, \sqrt{2}, 0)].$$

Se uma quádrlica possui equação  $y^2 + 2\sqrt{2}xy - z = 0$  relativamente a um certo sistema de coordenadas ortogonal então uma equação reduzida para essa quádrlica é:

- (a)  $-v^2 + 2t^2 - u = 0;$
- (b)  $-v^2 + 2t^2 + 1 = 0;$
- (c)  $-v^2 + 2t^2 = 0;$
- (d)  $-v^2 + 2t^2 + 2u = 0;$
- (e)  $-v^2 + 2t^2 + \frac{1}{4} = 0.$

**1Q10.** Seja dado  $k \in \mathbb{R}$ . A equação:

$$5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 10x + 4y + 12z = k,$$

com incógnitas  $x, y, z$ , não tem solução se:

- (a)  $k = -11$ ;
- (b)  $k = 0$ ;
- (c)  $k = 11$ ;
- (d)  $k = 22$ ;
- (e)  $k = -22$ .

**1Q11.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno canônico. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear cuja matriz em relação à base  $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  é:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $T$  não é simétrico, mas é diagonalizável;
- (II)  $T$  é simétrico;
- (III)  $T$  não é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são falsas;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**1Q12.** Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde  $a \in \mathbb{R}$ . Assinale a alternativa correta:

- (a) se  $a = 2$  então  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (b) se  $-2 < a < 2$  então  $A$  não é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (c) se  $-2 < a < 2$  então  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (d) se  $a = -2$  então  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (e) se  $-2 < a < 2$  então  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ , mas não sobre  $\mathbb{R}$ .

**1Q13.** Considere a parábola cuja equação é:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0,$$

relativamente a um certo sistema de coordenadas ortogonal. Uma equação reduzida para essa parábola é:

(a)  $t = \frac{2}{\sqrt{2}} w^2;$

(b)  $t = \frac{1}{\sqrt{32}} w^2;$

(c)  $t = \frac{4}{\sqrt{2}} w^2;$

(d)  $t = \frac{1}{\sqrt{2}} w^2;$

(e)  $t = \frac{1}{\sqrt{8}} w^2.$

**1Q14.** Considere as seguintes afirmações:

- (I) existe um operador linear em  $\mathbb{R}^4$ , simétrico com respeito ao produto interno canônico, com autovalores  $-1$ ,  $1$ ,  $1 + 2i$  e  $1 - 2i$ ;
- (II) se  $B = \{(2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  e se  $T$  é o operador linear em  $\mathbb{R}^3$  tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

então  $T$  é simétrico com respeito ao produto interno canônico;

- (III) existe um operador linear em  $\mathbb{R}^2$ , simétrico com respeito ao produto interno canônico, com autovalores  $2$  e  $3$ , tal que  $\text{Ker}(T - 2I) = [(1, 3)]$  e  $\text{Ker}(T - 3I) = [(-3, 2)]$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são falsas;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

**1Q15.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se que:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

então a solução do sistema de equações diferenciais  $x'(t) = Ax(t)$  que satisfaz  $x(0) = (2, 1, 2)$  é:

- (a)  $x(t) = (2e^{4t}, e^{2t}, 2e^{4t})$ ;
- (b)  $x(t) = (2e^{4t}, e^{4t}, 2e^{4t})$ ;
- (c)  $x(t) = (2e^{2t}, e^{2t}, 2e^{4t})$ ;
- (d)  $x(t) = (2e^{2t}, e^{4t}, 2e^{2t})$ ;
- (e)  $x(t) = (2e^{4t}, e^{2t}, 2e^{2t})$ .

**1Q16.** Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa contendo uma matriz ortogonal  $M$  tal que:

$$M^t A M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix};$$

$$(b) \quad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(c) \quad M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix};$$

$$(d) \quad M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix};$$

$$(e) \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$



**1Q17.** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a) a matriz  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$  se e somente se  $a \neq 1$  e  $c = 0$ ;
- (b) a matriz  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$  se e somente se  $a \neq 1$  e  $b = 0$ ;
- (c) para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , a matriz  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (d) a matriz  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$  se e somente se  $a \neq 0$ ;
- (e) para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , a matriz  $A$  não é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**1Q18.** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz real e seja  $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  o operador linear no espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^n$  cuja matriz em relação à base canônica é  $A$ . Denote por  $p_T$  o polinômio característico de  $T$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  são tais que  $\{v_1, \dots, v_k\}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$  então  $\{v_1, \dots, v_k\}$  também é linearmente independente sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (II) se  $\alpha \in \mathbb{C}$  é um autovalor de  $T$  e  $\alpha \notin \mathbb{R}$  então existe  $v \in \mathbb{R}^n$  não nulo tal que  $T(v) = \alpha v$ ;
- (III) dado  $\alpha \in \mathbb{C}$ , então  $\alpha$  é raiz de  $p_T$  se e somente se seu complexo conjugado  $\bar{\alpha}$  for raiz de  $p_T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**1Q19.** Sejam  $n$  um inteiro maior do que 1 e  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz real. Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (II)  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (III) todas as raízes complexas do polinômio característico de  $A$  são reais.

Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) (I) não implica (III);
- (b) (II) implica (III);
- (c) (III) implica (I);
- (d) (II) implica (I);
- (e) assumindo-se (I) e (III), conclui-se (II).

**1Q20.** Assinale a alternativa correta:

- (a) existem um espaço vetorial  $V$  com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , bases ortonormais  $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $B_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$  de  $V$  e um operador linear  $T : V \rightarrow V$  tal que  $\langle T(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, T(e_j) \rangle$ , para todos  $i, j = 1, \dots, n$ , mas não vale que  $\langle T(f_i), f_j \rangle = \langle f_i, T(f_j) \rangle$ , para todos  $i, j = 1, \dots, n$ ;
- (b) se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o operador linear tal que  $[T]_{\text{can}, B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , onde  $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ , então  $T$  é simétrico com respeito ao produto interno canônico;
- (c) se  $A, M \in M_n(\mathbb{R})$  são tais que  $A$  é simétrica,  $M$  é inversível e  $M^{-1}AM$  é diagonal então  $M^t = M^{-1}$ ;
- (d) se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o operador linear tal que  $[T]_{\text{can}, B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , onde  $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ , então os autovalores de  $T$  são  $2 + i$  e  $2 - i$ ;
- (e) se  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base de um espaço vetorial  $V$  com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e se existe um operador linear  $T : V \rightarrow V$  tal que, para todos  $i, j = 1, \dots, n$ , vale que  $\langle T(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, T(e_j) \rangle$  então a base  $B$  é ortonormal.