

Nesta prova, se V denota um espaço vetorial, o vetor nulo de V é denotado por 0_V . O subespaço de V gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_n \in V$ é denotado por $[v_1, \dots, v_n]$. Se o espaço vetorial V está munido de um produto interno e S é um subespaço de V , a projeção ortogonal de um vetor $v \in V$ sobre S é denotada por $\text{proj}_S v$. Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é uma matriz $n \times n$ então o traço de A é definido por $\text{tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$.

Q1. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Seja S um subespaço de V de dimensão finita e considere o operador linear $T : V \rightarrow V$ definido por $T(v) = \text{proj}_S v$, para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) ocorre necessariamente que $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$;
- (II) ocorre necessariamente que $V = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$, mas pode ocorrer que $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) \neq \{0_V\}$;
- (III) ocorre necessariamente que $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0_V\}$, mas pode ocorrer que $V \neq \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) todas as afirmações são falsas;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q2. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ um conjunto ortogonal, onde e_1, \dots, e_n são vetores não nulos e distintos de V . Pode-se afirmar que:

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n, \quad \text{para todo } v \in V,$$

se e somente se:

- (a) \mathcal{B} é uma base ortogonal de V ;
- (b) \mathcal{B} gera V ;
- (c) \mathcal{B} é uma base ortonormal de V ;
- (d) \mathcal{B} é uma base de V ;
- (e) $\dim(V) = n$.

Q3. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a + b & b + c \\ b + c & a + d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- (b) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 3$;
- (c) $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 4$;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 3$;
- (e) $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 1$.

Q4. Seja V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam S um subespaço de V e $z \in V$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) a transformação $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(v) = \langle v, v \rangle$, para todo $v \in V$, é linear;
- (II) a transformação $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(v) = \langle v, z \rangle$, para todo $v \in V$, é linear;
- (III) a transformação $T : V \rightarrow V$ definida por $T(v) = v - \text{proj}_S v$, para todo $v \in V$, é linear.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q5. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^6 munido do produto interno canônico. Seja S o subespaço de \mathbb{R}^6 definido por:

$$S = \{(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 : a + b + c = 0, d + e - f = 0\}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a) $S^\perp = \{(x, x, x, -y, -y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
- (b) $S^\perp = \{(x, x, x, -y, -y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
- (c) $S^\perp = \{(-x, x, -x, y, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
- (d) $S^\perp = \{(x, x, x, -y, y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
- (e) $S^\perp = \{(x, x, x, y, -y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Q6. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se E é um espaço vetorial de dimensão 7 então existe um operador linear $T : E \rightarrow E$ tal que $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$;
- (II) se E é um espaço vetorial de dimensão 8 então existe um operador linear $T : E \rightarrow E$ tal que $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$;
- (III) existe uma transformação linear injetora $T : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow P_4(\mathbb{R})$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são falsas;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são falsas;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são falsas;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são falsas;
- (e) apenas a afirmação (III) é falsa.

Q7. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ a única transformação linear tal que:

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(t^2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) $\text{Ker}(T) = [1 - t - t^2]$ e $\text{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$;
- (b) $\text{Ker}(T) = [1 - t + t^2]$ e $\text{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$;
- (c) $\text{Ker}(T) = [-1 - t + t^2]$ e $\text{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$;
- (d) $\text{Ker}(T) = [-1 + t + t^2]$ e $\text{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]$;
- (e) $\text{Ker}(T) = [1 + t - t^2]$ e $\text{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]$.

Q8. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Se $S = [1 - t, 1 - t^2] \subset P_2(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha - \beta t + t^2 \in S^\perp$ se e somente se:

- (a) $\alpha = 2$ e $\beta = -2$;
- (b) $\alpha = -2$ e $\beta = 2$;
- (c) $\alpha = 0$ e $\beta = 0$;
- (d) $\alpha = 0$ e $\beta = 2$;
- (e) $\alpha = 0$ e $\beta = -2$.

Q9. Considere as seguintes afirmações:

(I) a igualdade:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A), \quad A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

define um produto interno em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$;

(II) dados $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$, com $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, vale que a igualdade:

$$\langle p, q \rangle = p(t_1)q(t_1) + p(t_2)q(t_2) + p(t_3)q(t_3) + p(t_4)q(t_4), \quad p, q \in P_4(\mathbb{R})$$

define um produto interno em $P_4(\mathbb{R})$;

(III) a igualdade:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt, \quad f, g \in C([0, 2]),$$

define um produto interno em $C([0, 2])$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q10. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de U e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Seja:

$$\mathcal{C} = \{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$$

e assumo que os vetores $T(u_1), \dots, T(u_n)$ sejam distintos. Assinale a alternativa correta:

- (a) se \mathcal{C} é linearmente independente então T é injetora;
- (b) se T é injetora então \mathcal{C} é uma base de V ;
- (c) se T é sobrejetora então \mathcal{C} é uma base de V ;
- (d) \mathcal{C} é um conjunto gerador de V , possivelmente linearmente dependente;
- (e) se \mathcal{C} é linearmente independente então T é sobrejetora.

Q11. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do produto interno canônico. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e S o subespaço de \mathbb{R}^4 definido por:

$$S = [(1, a, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, b, 1)].$$

Pode-se afirmar que $\dim(S^\perp) = 1$ se e somente se:

- (a) $a \neq 0$ e $b \neq 0$;
- (b) $a + b \neq 0$;
- (c) $a - b = 0$;
- (d) $a - b \neq 0$;
- (e) $a + b = 0$.

Q12. Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para todos $u, v \in V$, vale que:

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \iff |\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|;$$

(II) para todos $u, v \in V$, vale que:

$$\|u + v\| = \|u - v\| \iff \langle u, v \rangle = 0;$$

(III) para todos $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se $v = \lambda u$ então $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q13. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o único operador linear tal que:

$$T(1, 0, 0) = (1, a, 0), \quad T(0, 1, 0) = (0, 1, a), \quad T(0, 0, 1) = (1, 0, -a).$$

Temos que T é sobrejetor se e somente se:

- (a) $a \neq 0$ ou $a \neq -1$;
- (b) $a \neq 0$ ou $a \neq 1$;
- (c) $a \neq 0$ e $a \neq -1$;
- (d) $a \neq -1$, $a \neq 0$ e $a \neq 1$;
- (e) $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

Q14. Considere em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno definido por:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $u(t) = a + bt$ é o polinômio de $P_1(\mathbb{R})$ mais próximo de $v(t) = t^2$, então $a + b$ é igual a:

- (a) $\frac{2}{3}$;
- (b) $-\frac{1}{3}$;
- (c) $\frac{1}{3}$;
- (d) 0;
- (e) $-\frac{2}{3}$.

Q15. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}).$$

Seja S o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se a projeção ortogonal de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sobre S é igual a $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, pode-se afirmar que:

- (a) $a - d - 1 = 0$ e $b - c - 1 = 0$;
- (b) $a + d - 1 = 0$ e $b - c + 1 = 0$;
- (c) $a + d + 1 = 0$ e $b - c + 1 = 0$;
- (d) $a + d + 1 = 0$ e $b + c - 1 = 0$;
- (e) $a + d - 1 = 0$ e $b + c - 1 = 0$.

Q16. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $T : M_{4 \times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$ o operador linear definido por:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad x, y, z, t \in \mathbb{R}.$$

Pode-se afirmar que T é injetor se e somente se:

- (a) $a \neq b$ ou $c \neq -d$;
- (b) $a \neq -b$ e $c \neq d$;
- (c) $a \neq b$ e $c \neq d$;
- (d) $a \neq b$ e $c \neq -d$;
- (e) $a \neq -b$ ou $c \neq d$.