

1Q1. Considere as bases:

$B = \{(0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$, $C = \{(2, 1, 3), (-1, 2, 2), (1, -1, -1)\}$
de \mathbb{R}^3 . Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $T(4, 3, 5)$ é igual a:

- (a) $(-1, 6, 4)$;
- (b) $(7, -1, 3)$;
- (c) $(40, 27, -6)$;
- (d) $(2, 0, 3)$;
- (e) $(18, 10, -3)$.

1Q2. Seja V um espaço vetorial de dimensão 9. Assinale a alternativa correta:

- (a) se U e W são subespaços de V tais que $\dim(U \cap W) = 5$ então temos que $\dim(U + W) \geq 6$;
- (b) se U e W são subespaços de V e se existem subespaços U_1 e W_1 de V , ambos de dimensão 4, tais que $U_1 \subset U$ e $W_1 \subset W$ então $U \cap W \neq \{0\}$;
- (c) existem subespaços U e W de V tais que $\dim(U) = 2 \dim(W)$ e tais que $V = U \oplus W$;
- (d) se U e W são subespaços não nulos de V , ambos com dimensão par, então $U \cap W \neq \{0\}$;
- (e) existem subespaços U e W de V tais que $\dim(U) = \dim(W)$ e tais que $V = U \oplus W$.

1Q3. O vetor do subespaço $W = [(1, 0, -1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, -2, 1, 3)]$ de \mathbb{R}^4 que está mais próximo, com respeito à distância definida pela norma usual, do vetor $(0, 9, 12, 3)$ é:

- (a) $(-6, 7, 8, 5)$;
- (b) $(-14, 28, 16, 18)$;
- (c) $(0, 9, 12, 3)$;
- (d) $\frac{1}{5}(-14, 28, 16, 18)$;
- (e) $(2, -1, 0, 5)$.

1Q4. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$, onde $n \geq 2$. Denote por p_A o polinômio característico de A . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ então o número de autovalores complexos não reais distintos de A é par;
- (b) A pode ter um número ímpar de autovalores complexos não reais distintos;
- (c) se p_A tem coeficientes reais e $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de A então $\bar{\lambda}$ também é autovalor de A ;
- (d) se p_A tem coeficientes reais e $u, v \in \mathbb{R}^n$ são tais que $w = u + iv$ é autovetor de A então $\bar{w} = u - iv$ também é autovetor de A ;
- (e) p_A pode ter coeficientes reais mesmo que $A \notin M_n(\mathbb{R})$.

1Q5. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Sejam B uma base qualquer de V e $A = [T]_B$. Em quais dos seguintes casos pode-se garantir que T é diagonalizável?

- (I) $A^2 = A$;
- (II) $A^2 = 0$;
- (III) $A^t = A$, onde A^t denota a transposta da matriz A .

- (a) em todos os casos;
- (b) apenas nos casos (I) e (III);
- (c) apenas nos casos (II) e (III);
- (d) apenas no caso (I);
- (e) apenas nos casos (I) e (II).

1Q6. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $T : U \rightarrow V$ uma aplicação linear. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) se T é sobrejetora então $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(U) - \dim(V)$;
- (b) se T é injetora então $\dim(U) \leq \dim(V)$;
- (c) T é injetora se e somente se $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(U)$;
- (d) se $\dim(U) = \dim(V)$ então T é sobrejetora se e somente se $\text{Ker}(T)$ é igual a $\{0\}$;
- (e) T é sobrejetora se e somente se $\dim(U) \geq \dim(V)$.

1Q7. Sejam $T, F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operadores lineares tais que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad [F]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$. Temos que $[F \circ T]_{B, \text{can}}$ é igual a:

- (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 7 \end{pmatrix};$
- (b) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 10 & 14 & 8 \end{pmatrix};$
- (c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 11 & 0 & -2 \\ 11 & 6 & 4 \end{pmatrix};$
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix};$
- (e) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$

1Q8. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e sejam U , W_1 e W_2 subespaços de V tais que:

$$V = U \oplus W_1, \quad V = U \oplus W_2.$$

Quais das seguintes afirmações implicam que $W_1 = W_2$?

- (I) $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 1$;
 - (II) $W_1 \subset U^\perp$ e $W_2 \subset U^\perp$;
 - (III) $W_1 \subset U^\perp$ ou $W_2 \subset U^\perp$.
- (a) apenas (II);
 - (b) todas as afirmações;
 - (c) nenhuma das afirmações;
 - (d) apenas (II) e (III);
 - (e) apenas (I) e (II).

1Q9. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, onde $n \geq 2$. Assuma que a soma dos elementos de qualquer linha de A seja igual a 1. Assinale a alternativa correta:

- (a) A pode não possuir autovalores reais;
- (b) 1 e 0 são necessariamente autovalores de A ;
- (c) A possui algum autovalor real, mas pode ser que nem 1 nem 0 sejam autovalores de A ;
- (d) 1 é necessariamente autovalor de A , mas 0 pode não ser;
- (e) 0 é necessariamente autovalor de A , mas 1 pode não ser.

1Q10. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Sejam W um subespaço de V e $T : V \rightarrow V$ o operador linear definido por $T(v) = \text{proj}_W v$, para todo $v \in V$. Assuma que $W \neq V$ e $W \neq \{0\}$. Pode-se afirmar que:

- (a) T é injetor;
- (b) se B é uma base de V então o traço da matriz $[T]_B$ é igual a $\dim(W)$;
- (c) a matriz $[T]_B$ é diagonal, qualquer que seja a base B de V ;
- (d) T é sobrejetor;
- (e) toda base de V obtida por extensão de uma base ortonormal de W é ortonormal.

1Q11. Considere o subespaço de \mathbb{R}^4 definido por:

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, x_1 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Se \mathbb{R}^4 é munido de seu produto interno canônico então W^\perp é igual a:

- (a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_4 = 0, x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$;
- (b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
- (c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 + x_4 = 0, x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$;
- (d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$;
- (e) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

1Q12. Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e seja n um inteiro positivo. Se $A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ então $3(c+d)$ é igual a:

- (a) $2^n - 2$;
- (b) $4^n - 4$;
- (c) $-4^n + 4$;
- (d) 0;
- (e) $-2^n + 2$.

1Q13. Considere a quádrlica de equação:

$$2x^2 - y^2 - z^2 + 6yz - 4x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z + 1 = 0,$$

com respeito a um sistema de coordenadas ortogonal. Uma equação reduzida para essa quádrlica é:

- (a) $u^2 + v^2 - 2w^2 = 0$;
- (b) $2u^2 + 2v^2 - 4w^2 = 1$;
- (c) $u^2 + v^2 - 2w^2 = -1$;
- (d) $2u^2 + 2v^2 - 4w^2 = -1$;
- (e) $u^2 + v^2 - 2w^2 = 1$.

1Q14. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico com respeito ao produto interno canônico de \mathbb{R}^3 , com autovalores 3 e 4, e tal que:

$$\text{Ker}(T - 3I) = [(1, 0, 1), (1, 1, 0)].$$

Nessas condições, pode-se afirmar que $T(3, 0, 0)$ é igual a:

- (a) $(4, -1, -1)$;
- (b) $(10, -1, -1)$;
- (c) $(4, 7, -1)$;
- (d) $(10, -1, 7)$;
- (e) $(10, 7, -1)$.

1Q15. A solução do sistema de equações diferenciais:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} X(t),$$

que satisfaz $X(0) = (0, 2, -6)$ é:

- (a) $3e^{4t}(1, 0, 0) - e^{4t}(0, 1, 3) - 3e^t(1, -1, 1)$;
- (b) $3e^{4t}(1, 0, 0) - (0, 1, 3) - 3e^{4t}(1, -1, 1)$;
- (c) $3e^{4t}(1, 0, 0) - e^{4t}(0, 1, 3) - 3(1, -1, 1)$;
- (d) $3(1, 0, 0) - e^{4t}(0, 1, 3) - 3e^{4t}(1, -1, 1)$;
- (e) $3e^{4t}(1, 0, 0) - e^t(0, 1, 3) - 3e^{4t}(1, -1, 1)$.

1Q16. Seja $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ um operador linear tal que $[T]_{\text{can}} \in M_3(\mathbb{R})$. Sabendo-se que T possui 3 autovalores distintos e que $(1, 2, 3)$ é um autovetor de T , qual dos seguintes vetores de \mathbb{C}^3 **não** pode ser autovetor de T ?

- (a) $(1, 2, 3) + i(2, 4, 6)$;
- (b) $i(1, 2, 3)$;
- (c) $(2, 4, 6) + i(1, 1, 1)$;
- (d) $(1, 2, 3) + 4(5, 6, 7)$;
- (e) $(1, 1, 1) + i(2, 2, 2)$.

1Q17. Seja A uma matriz real 4×4 . Sabendo-se que $1 + 2i$ é um autovalor de A cujo autoespaço associado é gerado por:

$$\{(1, i, 0, -1), (-3 + i, -1, -i, 0)\},$$

pode-se afirmar que uma base para o espaço das soluções reais do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ é:

- (a) $\{e^t(\cos 2t, -\sin 2t, 0, -\cos 2t), e^t(\sin 2t, \cos 2t, 0, -\sin 2t), e^t(-3 \cos 2t - \sin 2t, -\cos 2t, \sin 2t, 0), e^t(\cos 2t - 3 \sin 2t, -\sin 2t, -\cos 2t, 0)\}$;
- (b) $\{e^t(\sin 2t, -\cos 2t, 0, -\sin 2t), e^t(\cos 2t, \sin 2t, 0, -\cos 2t), e^t(-3 \sin 2t - \cos 2t, -\sin 2t, \cos 2t, 0), e^t(\sin 2t - 3 \cos 2t, -\cos 2t, -\sin 2t, 0)\}$;
- (c) $\{e^{2t}(\sin t, -\cos t, 0, -\sin t), e^{2t}(\cos t, \sin t, 0, -\cos t), e^{2t}(-3 \sin t - \cos t, -\sin t, \cos t, 0), e^{2t}(\sin t - 3 \cos t, -\cos t, -\sin t, 0)\}$;
- (d) $\{e^{2t}(\cos t, -\sin t, 0, -\cos t), e^{2t}(\sin t, \cos t, 0, -\sin t), e^{2t}(-3 \cos t - \sin t, -\cos t, \sin t, 0), e^{2t}(\cos t - 3 \sin t, -\sin t, -\cos t, 0)\}$;
- (e) $\{e^t(\cos 2t + \sin 2t, 0, 0, -\cos 2t - \sin 2t), e^t(0, \cos 2t + \sin 2t, 0, 0), e^t(-3 \cos 2t - 3 \sin 2t, -\cos 2t - \sin 2t, 0, 0), e^t(\cos 2t + \sin 2t, 0, -\cos 2t - \sin 2t, 0)\}$.

1Q18. Sejam $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & e \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) se $e = 0$, $a = 1$ e $b \neq a$ então A é diagonalizável;
- (b) se $c \neq 0$, $d \neq 0$ e $e \neq 0$ então A não é diagonalizável;
- (c) se $e \neq 0$, $a = 1$ e $b \neq a$ então A não é diagonalizável;
- (d) se $a = b$, $c = e$ e $d = 0$ então A é diagonalizável;
- (e) se $a = 1$, $b = 1$ e $e \neq 0$ então A não é diagonalizável.

1Q19. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Seja $S \neq V$ um subespaço de V e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear simétrico. Considere a afirmação abaixo:

“Se S é (i) então S^\perp é (ii)”.

A substituição de (i) e (ii), respectivamente, pelas expressões abaixo que forma uma afirmação **FALSA** é:

- (a) “invariante por T ”, “autoespaço de T ”;
- (b) “a imagem de T ”, “autoespaço de T ”;
- (c) “a imagem de T ”, “o núcleo de T ”;
- (d) “autoespaço de T ”, “invariante por T ”;
- (e) “o núcleo de T ”, “a imagem de T ”.

1Q20. Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e sejam $u, v \in V$. Considere as seguintes relações envolvendo o produto interno e a norma em V :

- | | |
|---|---|
| (A) $\ u\ = \ v\ $; | (I) $\langle u, v \rangle = \ u\ \ v\ $; |
| (B) $\ u + v\ ^2 = \ u\ ^2 + \ v\ ^2$; | (II) $\langle u + v, u - v \rangle = 0$; |
| (C) $\ u + v\ = \ u\ + \ v\ $; | (III) $\langle u, v \rangle = 0$. |

Assinale a alternativa contendo equivalências corretas:

- (a) (A) \iff (III), (B) \iff (II), (C) \iff (I);
- (b) (A) \iff (II), (B) \iff (I), (C) \iff (III);
- (c) (A) \iff (I), (B) \iff (III), (C) \iff (II);
- (d) (A) \iff (II), (B) \iff (III), (C) \iff (I);
- (e) (A) \iff (I), (B) \iff (II), (C) \iff (III).