

Nesta prova, se  $V$  denota um espaço vetorial, o vetor nulo de  $V$  é denotado por  $0_V$ . O subespaço de  $V$  gerado pelos vetores  $v_1, \dots, v_n \in V$  é denotado por  $[v_1, \dots, v_n]$ . Se o espaço vetorial  $V$  está munido de um produto interno e  $S$  é um subespaço de  $V$ , a projeção ortogonal de um vetor  $v \in V$  sobre  $S$  é denotada por  $\text{proj}_S v$ . Se  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  é uma matriz  $n \times n$  então o traço de  $A$  é definido por  $\text{tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$ .

**Q1.** Seja  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno. Seja  $S$  um subespaço de  $V$  de dimensão finita e considere o operador linear  $T : V \rightarrow V$  definido por  $T(v) = \text{proj}_S v$ , para todo  $v \in V$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) ocorre necessariamente que  $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$ ;
- (II) ocorre necessariamente que  $V = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$ , mas pode ocorrer que  $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) \neq \{0_V\}$ ;
- (III) ocorre necessariamente que  $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0_V\}$ , mas pode ocorrer que  $V \neq \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) todas as afirmações são falsas.

**Q2.** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $E$  é um espaço vetorial de dimensão 7 então existe um operador linear  $T : E \rightarrow E$  tal que  $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$ ;
- (II) se  $E$  é um espaço vetorial de dimensão 8 então existe um operador linear  $T : E \rightarrow E$  tal que  $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$ ;
- (III) existe uma transformação linear injetora  $T : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow P_4(\mathbb{R})$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são falsas;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são falsas;
- (c) apenas a afirmação (III) é falsa;
- (d) todas as afirmações são falsas;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.

**Q3.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do produto interno canônico. Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  definido por:

$$S = [(1, a, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, b, 1)].$$

Pode-se afirmar que  $\dim(S^\perp) = 1$  se e somente se:

- (a)  $a + b = 0$ ;
- (b)  $a - b \neq 0$ ;
- (c)  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ ;
- (d)  $a + b \neq 0$ ;
- (e)  $a - b = 0$ .

**Q4.** Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $T : M_{4 \times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$  o operador linear definido por:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad x, y, z, t \in \mathbb{R}.$$

Pode-se afirmar que  $T$  é injetor se e somente se:

- (a)  $a \neq -b$  ou  $c \neq d$ ;
- (b)  $a \neq b$  ou  $c \neq -d$ ;
- (c)  $a \neq b$  e  $c \neq -d$ ;
- (d)  $a \neq b$  e  $c \neq d$ ;
- (e)  $a \neq -b$  e  $c \neq d$ .

**Q5.** Considere o espaço vetorial  $M_2(\mathbb{R})$  munido do produto interno:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}).$$

Seja  $S$  o subespaço de  $M_2(\mathbb{R})$  definido por:

$$S = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Se a projeção ortogonal de  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sobre  $S$  é igual a  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , pode-se afirmar que:

- (a)  $a + d + 1 = 0$  e  $b + c - 1 = 0$ ;
- (b)  $a + d - 1 = 0$  e  $b - c + 1 = 0$ ;
- (c)  $a - d - 1 = 0$  e  $b - c - 1 = 0$ ;
- (d)  $a + d - 1 = 0$  e  $b + c - 1 = 0$ ;
- (e)  $a + d + 1 = 0$  e  $b - c + 1 = 0$ .

**Q6.** Considere em  $P_2(\mathbb{R})$  o produto interno definido por:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Se  $a, b \in \mathbb{R}$  são tais que  $u(t) = a + bt$  é o polinômio de  $P_1(\mathbb{R})$  mais próximo de  $v(t) = t^2$ , então  $a + b$  é igual a:

- (a)  $-\frac{1}{3}$ ;
- (b)  $\frac{2}{3}$ ;
- (c)  $-\frac{2}{3}$ ;
- (d)  $\frac{1}{3}$ ;
- (e) 0.

**Q7.** Considere as seguintes afirmações:

(I) a igualdade:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A), \quad A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

define um produto interno em  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ;

(II) dados  $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$ , com  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ , vale que a igualdade:

$$\langle p, q \rangle = p(t_1)q(t_1) + p(t_2)q(t_2) + p(t_3)q(t_3) + p(t_4)q(t_4), \quad p, q \in P_4(\mathbb{R})$$

define um produto interno em  $P_4(\mathbb{R})$ ;

(III) a igualdade:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt, \quad f, g \in C([0, 2]),$$

define um produto interno em  $C([0, 2])$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Q8.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^6$  munido do produto interno canônico. Seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^6$  definido por:

$$S = \{(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 : a + b + c = 0, d + e - f = 0\}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a)  $S^\perp = \{(x, x, x, -y, -y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\};$
- (b)  $S^\perp = \{(-x, x, -x, y, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\};$
- (c)  $S^\perp = \{(x, x, x, y, -y, y) : x, y \in \mathbb{R}\};$
- (d)  $S^\perp = \{(x, x, x, -y, y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\};$
- (e)  $S^\perp = \{(x, x, x, -y, -y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$

**Q9.** Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais de dimensão finita,  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  uma base de  $U$  e  $T : U \rightarrow V$  uma transformação linear. Seja:

$$\mathcal{C} = \{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$$

e assumo que os vetores  $T(u_1), \dots, T(u_n)$  sejam distintos. Assinale a alternativa correta:

- (a) se  $T$  é injetora então  $\mathcal{C}$  é uma base de  $V$ ;
- (b) se  $T$  é sobrejetora então  $\mathcal{C}$  é uma base de  $V$ ;
- (c)  $\mathcal{C}$  é um conjunto gerador de  $V$ , possivelmente linearmente dependente;
- (d) se  $\mathcal{C}$  é linearmente independente então  $T$  é sobrejetora;
- (e) se  $\mathcal{C}$  é linearmente independente então  $T$  é injetora.

**Q10.** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  a transformação linear definida por:

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a + b & b + c \\ b + c & a + d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$  e  $\dim(\text{Im}(T)) = 1$ ;
- (b)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$  e  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ ;
- (c)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$  e  $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ ;
- (d)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$  e  $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ ;
- (e)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$  e  $\dim(\text{Im}(T)) = 4$ .

**Q11.** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o único operador linear tal que:

$$T(1, 0, 0) = (1, a, 0), \quad T(0, 1, 0) = (0, 1, a), \quad T(0, 0, 1) = (1, 0, -a).$$

Temos que  $T$  é sobrejetor se e somente se:

- (a)  $a \neq -1$ ,  $a \neq 0$  e  $a \neq 1$ ;
- (b)  $a \neq 0$  e  $a \neq -1$ ;
- (c)  $a \neq 0$  e  $a \neq 1$ ;
- (d)  $a \neq 0$  ou  $a \neq 1$ ;
- (e)  $a \neq 0$  ou  $a \neq -1$ .

**Q12.** Seja  $V$  um espaço vetorial não nulo de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sejam  $S$  um subespaço de  $V$  e  $z \in V$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) a transformação  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(v) = \langle v, v \rangle$ , para todo  $v \in V$ , é linear;
- (II) a transformação  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(v) = \langle v, z \rangle$ , para todo  $v \in V$ , é linear;
- (III) a transformação  $T : V \rightarrow V$  definida por  $T(v) = v - \text{proj}_S v$ , para todo  $v \in V$ , é linear.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Q13.** Considere o espaço vetorial  $P_2(\mathbb{R})$  munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Se  $S = [1 - t, 1 - t^2] \subset P_2(\mathbb{R})$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  então  $\alpha - \beta t + t^2 \in S^\perp$  se e somente se:

- (a)  $\alpha = 0$  e  $\beta = 2$ ;
- (b)  $\alpha = 2$  e  $\beta = -2$ ;
- (c)  $\alpha = -2$  e  $\beta = 2$ ;
- (d)  $\alpha = 0$  e  $\beta = -2$ ;
- (e)  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ .

**Q14.** Seja  $V$  um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Considere as seguintes afirmações:

(I) para todos  $u, v \in V$ , vale que:

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \iff |\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|;$$

(II) para todos  $u, v \in V$ , vale que:

$$\|u + v\| = \|u - v\| \iff \langle u, v \rangle = 0;$$

(III) para todos  $u, v \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se  $v = \lambda u$  então  $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Q15.** Seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  a única transformação linear tal que:

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(t^2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\text{Ker}(T) = [1 - t - t^2]$  e  $\text{Im}(T) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ ;
- (b)  $\text{Ker}(T) = [-1 + t + t^2]$  e  $\text{Im}(T) = \left[ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]$ ;
- (c)  $\text{Ker}(T) = [-1 - t + t^2]$  e  $\text{Im}(T) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ ;
- (d)  $\text{Ker}(T) = [1 - t + t^2]$  e  $\text{Im}(T) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ ;
- (e)  $\text{Ker}(T) = [1 + t - t^2]$  e  $\text{Im}(T) = \left[ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]$ .

**Q16.** Seja  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Seja  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  um conjunto ortogonal, onde  $e_1, \dots, e_n$  são vetores não nulos e distintos de  $V$ . Pode-se afirmar que:

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n, \quad \text{para todo } v \in V,$$

se e somente se:

- (a)  $\mathcal{B}$  é uma base ortogonal de  $V$ ;
- (b)  $\mathcal{B}$  gera  $V$ ;
- (c)  $\mathcal{B}$  é uma base ortonormal de  $V$ ;
- (d)  $\dim(V) = n$ ;
- (e)  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$ .