

Nesta prova, o subespaço gerado por vetores  $v_1, \dots, v_n$  é denotado por  $[v_1, \dots, v_n]$ . A base canônica de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  é denotada por  $\text{can}$ . A transposta de uma matriz  $A$  é denotada por  $A^t$ . Tanto a matriz identidade quanto o operador identidade de um espaço vetorial são denotados por  $I$ .

**Q1.** Considere o espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^6$  e seja  $T : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6$  um operador linear. Suponha que o polinômio característico de  $T$  seja:

$$p_T(t) = t^4(t - a)(t - b),$$

onde  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $ab \neq 0$  e  $a \neq b$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $T$  é diagonalizável então  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ ;
- (II)  $T$  não é injetor;
- (III) se  $a \notin \mathbb{R}$  então  $b$  é o conjugado de  $a$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Q2.** Seja  $A \in M_3(\mathbb{R})$  a matriz tal que  $v_1 = (-2, 3, 1)$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_1 = 2$  e  $v_2 = (1, i, 0)$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_2 = 2 - i$ . Se  $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$  é a solução do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$  satisfazendo a condição  $X(0) = (2, 2, 1)$  então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos que  $3x(t) + 2y(t) + z(t)$  é igual a:

- (a)  $e^{2t}(1 + 11 \cos t + 10 \sin t)$ ;
- (b)  $e^{2t}(6 + 5 \cos t + 14 \sin t)$ ;
- (c)  $e^{2t}(6 + 14 \cos t + 5 \sin t)$ ;
- (d)  $e^{2t}(2 + 11 \cos t + 5 \sin t)$ ;
- (e)  $e^{2t}(1 + 10 \cos t + 11 \sin t)$ .

**Q3.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno canônico e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear simétrico tal que:

$$\text{Ker}(T - 2I) = [(-1, 0, 1), (2, -1, 0)], \quad \text{Ker}(T + I) = [(1, 2, 1)].$$

Uma matriz  $M$  tal que:

$$M^t[T]_{\text{can}}M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é:

$$(a) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix};$$

$$(e) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

**Q4.** Considere o espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^6$  e seja  $T : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6$  um operador linear tal que  $\dim[\text{Ker}(T - (-1 + i)\text{I})] = 3$ . Suponha que a matriz  $[T]_{\text{can}}$  seja real e considere as seguintes afirmações:

- (I)  $T^{204} = -2^{102} \text{I}$ ;
- (II)  $T$  não tem autovalores reais;
- (III)  $T$  não é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Q5.** Considere o espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^2$  e seja  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (2ix + y, x), \quad (x, y) \in \mathbb{C}^2.$$

Considere também as seguintes afirmações:

- (I) a matriz de  $T$  em relação à base canônica de  $\mathbb{C}^2$  é simétrica;
- (II)  $\mathbb{C}^2$  possui uma base constituída por autovetores de  $T$ ;
- (III) existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que os autovalores de  $T$  sejam  $a + bi$  e  $a - bi$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Q6.** Considere o espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^4$  e o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^4$ .  
Sejam:

$$T_1 : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4, \quad T_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

operadores lineares tais que  $[T_1]_{\text{can}} = [T_2]_{\text{can}}$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $T_1$  é diagonalizável então  $T_2$  é diagonalizável;
- (II) se  $T_2$  é diagonalizável então  $T_1$  é diagonalizável;
- (III) todo autovetor de  $T_1$  é autovetor de  $T_2$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Q7.** Seja  $k \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no espaço. A equação:

$$8u^2 + 20v^2 - 20w^2 = 13$$

é uma equação reduzida para a quádrlica de equação:

$$2x^2 - 3y^2 + 3z^2 + 8yz + \sqrt{5}y + 2\sqrt{5}z + k = 0$$

se e somente se:

- (a)  $k = 1$ ;
- (b)  $k = -4$ ;
- (c)  $k = -2$ ;
- (d)  $k = 0$ ;
- (e)  $k = 3$ .

**Q8.** Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Seja  $b \in \mathbb{R}$  e considere a equação:

$$3x^2 + 8xy + 3y^2 - b = 0.$$

Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se  $b > 0$  então a equação dada define uma elipse;
- (II) se  $b < 0$  então a equação dada define uma hipérbole;
- (III) se  $b = 0$  então a equação dada define um par de retas concorrentes.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

**Q9.** Seja  $A \in M_3(\mathbb{R})$  a matriz tal que:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

onde:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se  $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$  é a solução do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$  satisfazendo a condição  $X(0) = (3, 1, 2)$ , pode-se concluir que  $x(1) - 3y(1) + z(1)$  é igual a:

- (a)  $-2e^2 + e^3$ ;
- (b)  $4e^2 + e^3$ ;
- (c)  $4e^2 + 2e^3$ ;
- (d)  $-2e^2 + 4e^3$ ;
- (e)  $10e^2 + 2e^3$ .

**Q10.** Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que  $v_1 = (1, 3)$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_1 = 0$  e que  $v_2 = (-3, 1)$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_2 = 10$ . Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Assinale a alternativa contendo uma equação reduzida para a cônica de equação:

$$9x^2 + y^2 - 6xy + x + 3y = 0.$$

- (a)  $-2u = v^2$ ;
- (b)  $2u = -\sqrt{10}v^2$ ;
- (c)  $2v^2 = 1$ ;
- (d)  $u - v^2 = 0$ ;
- (e)  $u = -\sqrt{10}v^2$ .

**Q11.** Considere o espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^2$  e seja  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  um operador linear. Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se  $T \circ T = T$  então  $T$  é diagonalizável;
- (II) se  $T \neq 0$  e  $T \circ T = 0$  então  $T$  é diagonalizável;
- (III) se existem  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $ab \neq 0$  tais que  $a + bi$  é um autovalor de  $T$  então  $T$  é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são falsas;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Q12.** Seja  $k \in \mathbb{R}$ . A equação:

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2kx + 4kz + 9 = 0$$

possui uma única solução  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  se e somente se:

- (a)  $k = \sqrt{3}$  ou  $k = -\sqrt{3}$ ;
- (b)  $k = \sqrt{5}$  ou  $k = -\sqrt{5}$ ;
- (c)  $k = 1$  ou  $k = -1$ ;
- (d)  $k = \sqrt{2}$  ou  $k = -\sqrt{2}$ ;
- (e)  $k = 2$  ou  $k = -2$ .

**Q13.** Considere o espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^4$  e seja  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  um operador linear tal que  $[T]_{\text{can}} \in M_4(\mathbb{R})$ . Considere também as seguintes afirmações:

- (I) se  $\lambda$  é um autovalor real de  $T$  então a multiplicidade algébrica de  $\lambda$  é igual a 2;
- (II) se  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$  e  $T$  tem um autovalor complexo não real então  $T$  é diagonalizável;
- (III) se  $[T]_{\text{can}}$  é uma matriz simétrica então todos os autovalores de  $T$  são reais.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

**Q14.** Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Se  $X_1(t) = e^t(1, -1)$  e  $X_2(t) = e^{5t}(1, 3)$  são soluções do sistema de equações diferenciais  $X'(t) = AX(t)$ , pode-se concluir que  $2b + c$  é igual a:

- (a) 6;
- (b) 10;
- (c) 5;
- (d) 8;
- (e) 4.

**Q15.** Sejam  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$  e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se que o polinômio característico de  $A$  é  $p_A(t) = (1-t)^2(t^2-2t+2)$ , pode-se afirmar que:

- (a) a matriz  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$  se e somente se  $\gamma = 0$ ;
- (b) a matriz  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$  se e somente se  $\beta \neq 0$  e  $\gamma \neq 0$ ;
- (c) a matriz  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$  se e somente se  $\beta = 0$ ;
- (d) a matriz  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (e) a matriz  $A$  não é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

**Q16.** Seja  $X(t) = (x(t), y(t))$  a solução do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = 2x(t) + y(t), \end{cases}$$

satisfazendo a condição  $x(\frac{\pi}{4}) = 2e^{\frac{\pi}{4}}$ ,  $y(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi}{4}}$ . Vale que  $4x(0) + 3y(0)$  é igual a:

- (a)  $-3$ ;
- (b)  $-2$ ;
- (c)  $-5$ ;
- (d)  $4$ ;
- (e)  $1$ .