

Transformações Lineares em \mathbb{R}^2

1 - Reflexão em relação ao eixo x . Prove que função que a cada vetor (x, y) associa sua reflexão $(x, -y)$ em relação ao eixo x é uma transformação linear. Observe que

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou seja, a reflexão em relação ao eixo dos x pode ser obtida por meio da multiplicação pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2 - Reflexões. Em \mathbb{R}^2 , considere a reta r que passa pela origem e tem inclinação m , ou seja, a reta de equação $y = mx$. Definimos a reflexão em relação à reta r como a função que associa, a cada vetor \mathbf{v} , sua reflexão $R_m(\mathbf{v})$ em relação à reta $y = mx$. Geometricamente, $R_m(\mathbf{v})$ é a imagem espelhada de \mathbf{v} em relação à reta r .

a) Mostre que R_m pode ser obtida como produto pela matriz

$$R_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}$$

b) Encontre a reflexão do vetor $\mathbf{v} = (3, -1)$ em relação à reta $y = \frac{1}{2}x$.

c) Determine a matriz da reflexão em relação a cada uma das retas $y = -x$ e $y = 3x$.

d) A transformação $T(x, y) = \left(\frac{-3x+4y}{5}, \frac{4x+3y}{5} \right)$ é uma reflexão em relação a que reta?

3 - Rotação por um ângulo reto no sentido anti-horário em torno da origem. Verifique que tal rotação leva (x, y) em $(-y, x)$. Mostre que a rotação é linear. Observe que

$$\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou seja, a rotação em torno da origem por um ângulo reto pode ser obtida por meio da multiplicação pela matriz $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4 - Rotações em torno da origem. Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, denote por $R_\theta(\mathbf{v})$ a rotação de \mathbf{v} por um ângulo θ no sentido anti-horário. É, de alguma forma,

surpreendente que R_θ seja de fato uma transformação matricial. Para ver por quê e encontrar a matriz associada, siga os seguintes passos:

- Mostre que R_θ é linear;
- Calcule a imagem por R_θ dos vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$;
- Determine a matriz A que fornece $R_\theta(\mathbf{v})$ na base canônica.

Composição de rotações. Considere as rotações R_θ e R_φ . A composição $R_\theta \circ R_\varphi$ é a transformação obtida pelo movimento de rotação de φ seguido da rotação de θ . Portanto, é a rotação de $\varphi + \theta$. Escreva a matriz $R_{\varphi+\theta}$. Calcule o produto das matrizes de R_θ e R_φ e compare os resultados.

Observação. As matrizes 2×2 proporcionam uma forma importante de definir transformações. Se A for uma matriz 2×2 qualquer, a multiplicação por A é uma transformação de \mathbb{R}^2 chamada *transformação matricial induzida por A* . Muitas transformações geométricas são transformações matriciais. As que vimos acima são alguns exemplos. Outro exemplo é a homotetia, que deixamos para sua verificação.

5 - Translação. Fixado $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ definimos a translação $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Mostre que T não é uma transformação linear de \mathbb{R}^2 .

6 - Cisalhamento. Se a é um número, a transformação $T(x, y) = (x + ay, y)$, induzida pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é um *cisalhamento em x* , que pode ser positivo, se $a > 0$ ou negativo, se $a < 0$. De modo análogo, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ induz um cisalhamento em y .

Interprete geometricamente o efeito de um cisalhamento, observando a imagem por T dos vetores (x, y) que satisfazem $0 \leq x, y \leq 1$.

Computação gráfica. Animações no computador consistem de um número de pontos na tela, juntamente com instruções de como preencher áreas limitadas por linhas e também de instruções de como mudar os pontos dando a impressão de movimento. Curvas são frequentemente aproximadas por retas e as transformações matriciais são importantes porque levam segmentos de reta em segmentos de reta. (Verifique!)

Imagine um problema simples, de desenhar a letra **N** na tela. Simplificando bastante, podemos pensar que a letra é formada pelos segmentos de reta que ligam os pontos $(0, 0)$, $(0, 10)$, $(7, 0)$ e $(7, 10)$ nessa ordem. Essa letra simplificada pode ser armazenada como uma matriz de dados:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Podemos inclinar a letra N por meio de uma matriz de cisalhamento, por exemplo, usando a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

O resultado será a matriz $AN = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

- Calcule AN e esboce o resultado.
- Faça uma rotação de $\frac{\pi}{6}$ em torno da origem. Esboce o novo resultado.

7 - O determinante. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e seja T a transformação de \mathbb{R}^2 induzida por A . Mostre que se $Q = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ (quadrado de lado 1) então a área de $T(Q)$ é igual a $|ad - bc|$.

8 - Matriz Inversa. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $ad - bc \neq 0$.

- Calcule o produto de A pela matriz $B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- Determine uma matriz C tal que $AC = I = CA$, sendo I a matriz identidade. Prove que tal matriz C é única. Ela é chamada *matriz inversa de A* e representada por A^{-1} .

9 - Matrizes Ortogonais. Se A é inversível e a matriz inversa de A é igual à sua transposta, dizemos que A é uma *matriz ortogonal*.

- Mostre que se A é uma matriz ortogonal então a transformação por ela induzida é uma isometria.
- Mostre que a matriz de uma isometria é ortogonal.
- Dê 3 exemplos de isometrias de \mathbb{R}^2 .

10 - Conhecendo um pouco mais. Obs. Neste exercício iremos trabalhar com vetores em \mathbb{R}^3 . Será conveniente escrever os vetores como matrizes-colunas.

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

- Calcule $w_i = A \cdot v_i$, sendo $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- Mostre que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 e escreva cada vetor w_i como combinação linear dos vetores de B .

c) Considere a matriz 3×3 P formada pelas colunas v_1 , v_2 e v_3 (escreveremos $P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$). Verifique que $AP = [Av_1 \ Av_2 \ Av_3]$.

d) Encontre uma matriz diagonal D tal que $AP = PD$.

e) Conclua existe uma matriz D diagonal tal que $P^{-1}AP = D$ se e somente se existirem vetores v_1 , v_2 e v_3 e números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tais que $Av_i = \lambda_i v_i$, para cada i .

Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ qualquer, o problema de encontrar os vetores e números como em (e) acima é um assunto importante que será visto detalhadamente no curso.

11 - Uma Aplicação. Queremos estudar a população de uma espécie de pássaros ameaçados de extinção ao longo do tempo. Assumindo que o número de machos e fêmeas seja o mesmo, iremos analisar apenas a população de fêmeas. Sabe-se que cada fêmea recém-nascida se torna adulta em 1 ano, quando passa a procriar. Suponha que, após k anos de observação, a população de fêmeas seja dada por $a_k + j_k$, sendo a_k o número de adultos depois de k anos e j_k o número de filhotes depois de k anos. Suponha que sejam conhecidos os valores iniciais a_0 e j_0 . Estamos interessados em calcular a_k e j_k para $k = 1, 2, \dots$ e para isso, iremos modelar o crescimento supondo também que $j_{k+1} = 2a_k$ e que metade dos pássaros adultos sobrevivem até o ano seguinte, mas apenas a quarta parte da população de filhotes chegue até a idade adulta, isto é, $a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{4}j_k$.

a) Considere o vetor $V_k = \begin{bmatrix} a_k \\ j_k \end{bmatrix}$ e determine a matriz A que satisfaz $V_{k+1} = AV_k$.

b) Determine uma expressão que fornece V_k em termos de V_0 e de A . Como você calcularia V_k para $k = 25$?

c) Verifique que se $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ então $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

d) Tomando $V_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix}$, obtenha V_k e conclua que, em um período grande de tempo, a população de fêmeas irá se estabilizar, sendo o número de adultos aproximadamente igual à metade do número de filhotes.