

**1Q1.** Se  $A$  e  $B$  são matrizes semelhantes então **NÃO** se pode concluir que:

- (a) existe uma matriz inversível  $S$  tal que  $A = S^{-1}B$ ;
- (b)  $A$  e  $B$  têm os mesmos autovalores;
- (c)  $\det(A) = \det(B)$ ;
- (d) as matrizes  $A^t$  e  $B^t$  são semelhantes;
- (e)  $A$  e  $B$  têm o mesmo polinômio característico.

**1Q2.** Seja  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  uma base de um espaço vetorial  $V$  e seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) o subespaço  $[e_1, e_2, e_4]$  é invariante por  $T$ ;
- (II) o subespaço  $[e_2, e_4]$  é invariante por  $T$ ;
- (III) o subespaço  $[e_1, e_3]$  é invariante por  $T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são falsas;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são falsas;
- (d) todas as afirmações são falsas;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.

**1Q3.** Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear cujo polinômio característico é:

$$p_T(t) = (\lambda - t)^3(\mu - t)^2(\nu - t),$$

onde  $\lambda, \mu, \nu$  são números reais distintos. Suponha que  $\dim(V(\mu)) = 2$ . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) se existem três autovetores linearmente independentes de  $T$  associados ao autovalor  $\lambda$  então  $T$  é diagonalizável;
- (b) se a multiplicidade geométrica de  $\lambda$  é igual a 3 então  $T$  é diagonalizável;
- (c) se  $\dim(V) = \dim(V(\lambda)) + \dim(V(\mu)) + \dim(V(\nu))$  então  $T$  é diagonalizável;
- (d) se  $T$  é diagonalizável então, para toda base  $B$  de  $V$ , a matriz  $[T]_B$  tem 3 autovetores linearmente independentes associados ao autovalor  $\lambda$ ;
- (e) se a multiplicidade geométrica de  $\lambda$  é igual à multiplicidade geométrica de  $\mu$  então  $T$  é diagonalizável.

**1Q4.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear cuja matriz em relação à base  $B = \{(-1, 1), (0, 1)\}$  é:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $T(x, y) = (x, 3x + y)$ , para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
- (II) a imagem pela transformação  $T$  da parábola  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$  é a parábola  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 2x\}$ ;
- (III) o vetor  $(2, 3)$  pertence à imagem de  $T$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são falsas.

**1Q5.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  a transformação linear cuja matriz em relação às bases canônicas é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ ;
- (b)  $T$  é sobrejetora;
- (c)  $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ ;
- (d)  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ ;
- (e)  $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 4$ .

**1Q6.** Seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear definida por:

$$T(a + bt + ct^2) = (3a - 2b, b - c), \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

e considere as bases  $B = \{1, 1 + t, 1 - t^2\}$  de  $P_2(\mathbb{R})$  e  $C = \{(1, 1), (0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$ . A matriz  $[T]_{BC}$  é igual a:

(a)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix};$

(b)  $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};$

(c)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$

(d)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$

(e)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

**1Q7.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (x - y, 2x + y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a)  $T$  é inversível e  $T^{-1}(x, y) = (\frac{x+2y}{3}, \frac{x-2y}{3})$ , para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ;

(b)  $T$  é inversível e  $T^{-1}(x, y) = (\frac{x+y}{3}, \frac{-2x+y}{3})$ , para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ;

(c) 0 é um autovalor de  $T$ ;

(d)  $T$  é inversível e  $T^{-1}(x, y) = (x + 2y, x - 2y)$ , para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ;

(e)  $T$  não é inversível.

**1Q8.** Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $u$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$  e  $v$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\mu$ . Pode-se afirmar que:

(a)  $u + v$  é autovetor de  $T$  se e somente se  $\mu = \lambda$  e  $u + v \neq 0$ ;

(b) se  $\lambda = \mu$  então  $\lambda u + v$  não é um autovetor de  $T$ ;

(c) se  $\lambda \neq \mu$  então  $u$  e  $v$  podem ser linearmente dependentes;

(d) se  $\lambda \neq \mu$  então, para todo  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $3u + \beta v$  é autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $3\lambda + \beta\mu$ ;

(e) se  $\lambda = \mu$  então  $u - v$  é autovetor de  $T$  associado ao autovalor 0.

**1Q9.** Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão 4,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e  $B$  uma base de  $V$  tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a)  $T$  é diagonalizável;
- (b)  $V(-1) \cap (V(1) \oplus V(2)) = \{0\}$ ;
- (c) a multiplicidade geométrica de todos os autovalores de  $T$  é igual a 1;
- (d)  $\dim(V) = \dim(V(-1)) + \dim(V(1)) + \dim(V(2))$ ;
- (e) a multiplicidade algébrica do autovalor  $\lambda = -1$  é igual a 2.

**1Q10.** Sejam  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  as transformações lineares definidas por:

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + d, b - c, b + d), \quad S(a, b, c) = a + bt - ct^2, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Se  $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$  e  $C = \{1, t, t^2\}$  então a matriz  $[S \circ T]_{BC}$  é igual a:

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ;
- (b)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ;
- (d)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- (e)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**1Q11.** Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se  $A^{2009} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  então  $a + b - 3c - d$  é igual a:

- (a)  $\frac{1}{3}(2^{2009} - 1)$ ;
- (b) 1;
- (c)  $2^{2009}$ ;
- (d) 0;
- (e)  $-\frac{1}{3}$ .

**1Q12.** Sejam  $V \neq \{0\}$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) se  $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(V)$  então o polinômio característico  $p_T$  de  $T$  é da forma  $p_T(t) = tq(t)$ , para algum polinômio  $q$ ;
- (b) se o polinômio característico de  $T$  não tem raízes múltiplas então  $T$  é inversível e  $T^{-1}$  é diagonalizável;
- (c) se  $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$  então  $T$  não é inversível;
- (d) se  $\lambda = 0$  é autovalor de  $T$  então existe uma base  $B$  de  $V$  tal que a matriz  $[T]_B$  possui uma linha de zeros;
- (e) se  $T$  é diagonalizável e  $\dim(V(0)) = 0$  então  $T$  é inversível e  $T^{-1}$  é diagonalizável.

**1Q13.** Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão 4,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  uma base de  $V$  tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 0 \\ 0 & 1 & b & d \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Pode-se afirmar que:

- (a)  $\dim(V(1)) = 3$  se e somente se  $c^2 + d^2 = 0$ ;
- (b)  $\dim(V(1)) + \dim(V(0)) = 4$  se e somente se  $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ ;
- (c)  $[T]_B$  é diagonalizável se e somente se  $a = b = 0$ ;
- (d)  $[T]_B$  é diagonalizável;
- (e)  $[T]_B$  não é diagonalizável.

**1Q14.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita tal que  $\dim(V) = n > 5$  e seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear cujo polinômio característico é:

$$p_T(t) = (-1)^n(t-1)(t-2)(t-3)^3(t-4)^{n-5}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a)  $T$  é diagonalizável pois todos os seus autovalores são reais;
- (b)  $T$  é diagonalizável se e somente se  $\dim(\text{Ker}(T - 4I)) = n - 5$ ;
- (c)  $T$  não é diagonalizável pois não possui  $n$  autovalores reais distintos;
- (d)  $T$  é diagonalizável pois  $T - 3I$  não é sobrejetora,  $\dim(V(2)) = 1$  e  $\dim(V(4)) = n - 5$ ;
- (e)  $T$  é diagonalizável se e somente se a soma de  $\dim(\text{Ker}(T - 4I))$  com  $\dim(\text{Ker}(T - 3I))$  é igual a  $n - 2$ .

**1Q15.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear cuja matriz em relação à base canônica é:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a)  $\dim(\text{Im}(T + 2I)) = 2$  e o vetor  $(7, -7, 7)$  é autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $-1$ ;
- (b)  $\dim(\text{Ker}(T + 2I)) = 2$  e o vetor  $(7, -7, 7)$  é autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $-2$ ;
- (c)  $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 1$  e o vetor  $(0, 7, 14)$  é autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $-1$ ;
- (d)  $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 2$  e o vetor  $(7, -7, 7)$  é autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $-2$ ;
- (e)  $\dim(\text{Im}(T + I)) = 2$  e o vetor  $(7, 0, 14)$  é autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $-1$ .

**1Q16.** Se  $T : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  é a transformação linear cuja matriz em relação às bases  $B = \{1, 1+t\}$  de  $P_1(\mathbb{R})$  e  $C = \{2+t^2, t+t^2, 1-t^2\}$  de  $P_2(\mathbb{R})$  é:

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

então  $T(1+2t)$  é igual a:

- (a)  $1 + 7t^2$ ;
- (b)  $3 + 4t - 2t^2$ ;
- (c)  $5 + 4t - t^2$ ;
- (d)  $-1 + 4t + 5t^2$ ;
- (e)  $9 - 6t^2$ .

**1Q17.** Seja  $T$  um operador linear com autovalores 0, 1, 2 e 3. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) 5, 6, 9 e 14 são autovalores de  $5I + T^2$ ;
- (b)  $T$  é inversível e 0, 1,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$  são autovalores de  $T^{-1}$ ;
- (c) 0, 1, 4 e 9 são autovalores de  $T^2$ ;
- (d) 0, 1, 8 e 27 são autovalores de  $T^3$ ;
- (e) 0, 3, 6 e 9 são autovalores de  $3T$ .

**1Q18.** Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Suponha que  $\lambda \neq \mu$  sejam autovalores de  $T$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $\dim(V) - \dim(V(\lambda)) = 1$  então  $T$  é diagonalizável;
- (II) se  $\dim(V) = \dim(V(\lambda)) + \dim(V(\mu))$  então  $T$  é diagonalizável;
- (III)  $T$  é diagonalizável se e somente se  $\dim(V) = 2$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**1Q19.** Seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$  a transformação linear tal que:

$$T(1+t) = 1+t^2, \quad T(t^2) = 1-t^3, \quad 1 \in \text{Ker}(T).$$

Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$  então  $T(a+bt+ct^2)$  é igual a:

- (a)  $b + (b-c)t + bt^2$ ;
- (b)  $c + (b+c)t - bt^2 + (a+c)t^3$ ;
- (c)  $b + c + bt^2 - ct^3$ ;
- (d)  $b - c - bt^2 + ct^3$ ;
- (e)  $(b-c)t + (b+c)t^2 + ct^3$ .

**1Q20.** Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão 3,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e  $B$  uma base de  $V$  tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -a & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ -3a & c & a \end{pmatrix},$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Assinale a alternativa correta:

- (a) se  $b \neq a = 0$  então  $T$  não é diagonalizável;
- (b) se  $|b| \neq 2|a|$  e  $a \neq 0$  então  $T$  é diagonalizável;
- (c) se  $a \neq 0$  e  $b = 2a = c$  então  $T$  é diagonalizável;
- (d) se  $a = b = 0$  e  $c \neq 0$  então  $T$  é diagonalizável;
- (e) se  $c = 0$  e  $b = -2a \neq 0$  então  $T$  não é diagonalizável.