

MAT2458 – ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA II

1ª Lista de Exercícios - 2º semestre de 2012

1. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função definida por $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + t x_2 y_2$ é um produto interno em \mathbb{R}^2 ?

2. Para cada par de vetores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ de \mathbb{R}^2 , defina

$$\langle u, v \rangle = 2x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$$

Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em \mathbb{R}^2 . Ache todos os vetores de \mathbb{R}^2 que são ortogonais ao vetor $(1, 0)$. Calcule $\|(1, 0)\|$.

3. Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno e sejam $u, v \in V$. Considere as seguintes relações envolvendo o produto interno e a norma em V :

(A) $\ u\ = \ v\ $;	(I) $\langle u, v \rangle = \ u\ \ v\ $;
(B) $\ u + v\ ^2 = \ u\ ^2 + \ v\ ^2$;	(II) $\langle u + v, u - v \rangle = 0$;
(C) $\ u + v\ = \ u\ + \ v\ $;	(III) $\langle u, v \rangle = 0$.

Assinale a alternativa contendo equivalências corretas:

- (a) (A) \iff (III), (B) \iff (II), (C) \iff (I);
 - (b) (A) \iff (II), (B) \iff (I), (C) \iff (III);
 - (c) (A) \iff (I), (B) \iff (III), (C) \iff (II);
 - (d) (A) \iff (II), (B) \iff (III), (C) \iff (I);
 - (e) (A) \iff (I), (B) \iff (II), (C) \iff (III).
4. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que os polinômios $p = x^2 - 1$ e $q = \lambda x - 2$ sejam ortogonais com respeito aos seguintes produtos internos em $P_2(\mathbb{R})$:

- (a) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$;
- (b) $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a expressão:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos x - (ax + b)]^2 dx$$

assume o seu valor mínimo. Assinale a alternativa correta:

- (a) $a = 0$ e $b = \frac{2}{\pi}$;
 - (b) $a = b = 0$;
 - (c) $a = \frac{2}{\pi}$ e $b = 0$;
 - (d) $a = 0$ e $b = \pi$;
 - (e) $a = \pi$ e $b = 0$.
6. Determine o polinômio de grau menor ou igual a 2 que está mais próximo da função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, 1]$ considerando em $\mathcal{C}([0, 1])$ o produto interno usual, ou seja, o produto interno dado por $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.

7. No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ considere o produto interno:

$$\langle A, B \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

- (a) Prove que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$, onde X^t denota a transposta de uma matriz X e $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X (isto é, a soma dos elementos de sua diagonal principal).
- (b) Se $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : x + y - z = 0 \right\}$, determine uma base ortonormal para W .
- (c) Se W é como em (b), determine o vetor de W que está mais próximo de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Em $P_3(\mathbb{R})$ considere o produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Calcule $\text{proj}_{P_1(\mathbb{R})} x^3$. Esboce no mesmo plano cartesiano os gráficos dos polinômios x^3 e $\text{proj}_{P_1(\mathbb{R})} x^3$.

9. Em $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ munido do produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ considere o subespaço $S = [1, \sin x, \cos x]$. Calcule $\text{proj}_S(x - 2)$.

10. Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de E então:

$$x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n,$$

para todo $x \in E$;

- (II) se $u, v \in E$ são linearmente independentes e se $w = v - \text{proj}_u v$ então w é ortogonal a u se e somente se $\|u\| = 1$;
- (III) se $\{u, v, w\} \subset E$ é linearmente independente e se $z = w - \text{proj}_u w - \text{proj}_v w$ então z é ortogonal a u e a v .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
 - (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
 - (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
 - (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
 - (e) nenhuma das afirmações é verdadeira.
11. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, S um subespaço de V e $u, v \in V$ tais que $v \in S^\perp$ e $u - v \in S$. Pode-se afirmar que:
- (a) $\langle u, v \rangle = 0$;
 - (b) $u \in S^\perp$;
 - (c) $u = 0$;
 - (d) $\langle u, v \rangle = \|v\|^2$;
 - (e) $\langle u, v \rangle = \|u\|$.

12. Considere em \mathbb{R}^4 o produto interno canônico e seja

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z + w = 0\}.$$

- (a) Determine uma base ortonormal de S .
- (b) Dado $v \in \mathbb{R}^4$, encontre vetores $v_1 \in S$ e $v_2 \in S^\perp$ tais que $v = v_1 + v_2$.

13. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Seja A um subconjunto finito de V que verifica a seguinte propriedade: se $v \in V$ e $\langle v, u \rangle = 0$ para todo $u \in A$ então $v = 0$. Pode-se afirmar que:
- (a) A é um conjunto de geradores de V , mas pode não ser linearmente independente;
 - (b) A é linearmente dependente;
 - (c) A é um conjunto linearmente independente, mas pode não gerar V ;
 - (d) A é uma base de V , mas pode não ser um conjunto ortogonal de V ;
 - (e) A é uma base ortogonal de V .
14. Encontre uma base ortonormal (com respeito ao produto interno canônico) para o subespaço U de \mathbb{R}^4 gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 4)$ e $v_3 = (1, 2, -4, -3)$.
15. Considere em $P(\mathbb{R})$ o produto interno definido por $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$.
- (a) Aplique o algoritmo de Gram-Schmidt ao conjunto $\{1, x, x^2\}$ e obtenha um conjunto ortogonal com coeficientes inteiros.
 - (b) Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado por $\{1, x, x^2\}$.
16. Considere a função definida por

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4,$$

para todos $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$.

- (a) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em \mathbb{R}^4 .
 - (b) Encontre uma base de S^\perp , onde $S = [(1, 2, 0, -1)]$.
17. Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, S um subespaço de E , B um subconjunto de S e C um subconjunto de S^\perp . Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:
- (a) se B é uma base de S e C é uma base de S^\perp então $B \cup C$ é uma base de E ;
 - (b) $B \cap C \subset \{0\}$;
 - (c) se B e C são linearmente independentes então $B \cup C$ é linearmente independente;
 - (d) se B é uma base de S e C é uma base de S^\perp então $B \cup C$ gera E , mas pode não ser linearmente independente;
 - (e) se B gera S e C gera S^\perp então $B \cup C$ gera E .
18. Sejam S e T subespaços de um espaço vetorial E com produto interno. Considere as afirmações:
- (I) $(S + T)^\perp \subset S^\perp \cap T^\perp$;
 - (II) Se E tem dimensão finita, então $\dim(S^\perp)^\perp = \dim S$;
 - (III) $S^\perp + T^\perp \subset (S \cap T)^\perp$.

Podemos afirmar que:

- (a) As afirmações (I) e (III) são verdadeiras somente no caso em que E tem dimensão finita.
- (b) As três afirmações são falsas.
- (c) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- (d) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (e) As três afirmações são verdadeiras.

19. Em cada um dos itens abaixo, verifique se a transformação T dada é linear:

- (a) $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(a)$, para toda f em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, onde a é um número real fixado.
- (b) $T : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = f'$, para toda f em $C^\infty(\mathbb{R})$.
- (c) $T : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = af'' + bf' + cf$, para toda f em $C^\infty(\mathbb{R})$, onde a, b e c são números reais fixados.
- (d) $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por $T(f)(x) = \int_a^x f(t) dt$, para toda f em $C^\infty(\mathbb{R})$ e todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a \in \mathbb{R}$ é um número real fixado.

20. Recorde que o *traço* de uma matriz quadrada A é a soma de todos os elementos de sua diagonal principal, isto é, se $A = (a_{ij})_{n \times n}$, então $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

- (a) Mostre que a função $\text{tr} : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é linear.
- (b) Mostre que $\dim(\text{Ker}(T)) = n^2 - 1$.
- (c) Mostre que $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$, onde A^t denota a transposta da matriz A .

21. Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $S \subset E$ um subespaço de E . Seja $T : E \rightarrow E$ a transformação definida por $T(u) = \text{proj}_S u$, para todo $u \in E$. Considere as afirmações:

- (I) $\ker(T) = S^\perp$ e $\text{Im}(T) = S$;
- (II) Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ é uma base de S e $u \in E$, então

$$T(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \cdots + \frac{\langle u, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k;$$

- (III) $T(u) = u$ se, e somente se, $u \in S$.

Podemos afirmar que:

- (a) Apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.
 - (b) Todas as afirmações são verdadeiras.
 - (c) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.
 - (d) Apenas a afirmação (II) é falsa.
 - (e) Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.
22. Seja $T : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ definida por $T(M) = AM - MA$, onde $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz fixada. Mostre que T é linear e determine seu núcleo. A matriz identidade pertence à imagem de T ?

23. Ache uma transformação linear $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ tal que $\text{Im}(T)$ seja gerada pelos vetores

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ache uma base para $\text{Im}(T)$ e uma base para $\text{Ker}(T)$.

24. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $T : M_{4 \times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(X) = AX$, $X \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ b & 0 & 2b & 0 \\ 0 & c & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a) T não é injetora;
 - (b) se $a = 1, b \neq 0$ e $c \neq 1$ então T é injetora;
 - (c) T é bijetora se e somente se $a = 1, b \neq 0$ e $c \neq 1$;
 - (d) T não é sobrejetora;
 - (e) se $a \neq 1, b \neq 0$ e $a + c \neq 2$ então T não é bijetora.
25. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.
- (a) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$ é linear.
 - (b) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x) = |x|$ é linear.
 - (c) $T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_n$ é linear.
 - (d) Qualquer matriz real 5×6 define uma transformação linear de \mathbb{R}^6 em \mathbb{R}^5 .
 - (e) Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear, $\dim(V) = 6$, $\dim(W) = 4$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$, então T é sobrejetora.
 - (f) Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear e $\text{Im}(T) = \{0\}$, então $T(x) = 0$, para todo $x \in V$.
 - (g) Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear e $\dim(V) \leq \dim(W)$, então T é injetora.
 - (h) Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$.
26. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ e cuja imagem seja a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.
27. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que tenha como núcleo e como imagem a reta $[(1, 0)]$.
28. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$.
29. Considere o operador linear $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definido por $T(f) = \varphi$, onde $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine o núcleo e a imagem desse operador.
30. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.
- (a) Existe uma transformação linear inversível $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$.
 - (b) Se $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ é definida por $T(p) = p'$, então T é sobrejetora.
 - (c) Existe uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$.
 - (d) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ é um operador linear, então T é sobrejetor se, e somente se, $\text{Ker}(T) = \{0\}$.
 - (e) Existe um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$.
31. Seja W um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dado um espaço vetorial V e um isomorfismo $T : V \rightarrow W$ defina

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle T(v_1), T(v_2) \rangle, \text{ para todos } v_1, v_2 \in V.$$

Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em V .

32. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique suas respostas.

(a) Uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ é sobrejetora se, e somente se,

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(U) - \dim(V).$$

(b) Dada uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ e um vetor $v \in V$ então o conjunto $G = \{x \in U : T(x) = v\}$ é um subespaço de U .

(c) O núcleo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3.

(d) Se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for injetora, então $\dim(\text{Im}(T)) = m$.

(e) Se $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma transformação linear sobrejetora, então

$$\dim(\text{Ker}(T)) = m - n.$$

33. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Prove que $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$ se, e somente se, $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$.

34. Sejam E um espaço vetorial de dimensão 2 e $T : E \rightarrow E$ um operador linear não nulo tal que $T \circ T = 0$. Considere as afirmações:

(I) $\text{Im}(T) = \text{ker}(T)$;

(II) $\dim \text{Im}(T) = 2$;

(III) $\dim \text{ker}(T) = 1$.

Podemos afirmar que:

(a) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

(b) Apenas a afirmação (II) é falsa.

(c) Apenas a afirmação (III) é falsa.

(d) Todas as afirmações são falsas.

(e) Todas as afirmações são verdadeiras.

35. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ um operador linear tal que T e T^2 tenham o mesmo posto. (Recorde que o *posto* de uma transformação linear é a dimensão de sua imagem.) Prove que $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$. Vale a recíproca?

1. $t > 0$.
2. $\{(a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}; \quad \|(1, 0)\| = \sqrt{2}$.
4. (a) não existe λ ; (b) $\lambda = \frac{2}{3}$.
6. $(210e - 570)x^2 + (588 - 216e)x + (39e - 105)$.
7. (b) A resposta não é única. Uma possível base é $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
(c) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
8. $\frac{1}{5}(14x + 3)$.
9. $\pi - 2 - 2 \sin x$.
12. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{42}}(-1, 2, 6, -1)$.
(b) Se $v = (x, y, z, w)$ então,
$$v_1 = \frac{1}{7}(6x + 2y - z - w, 2x + 3y + 2z + 2w, -x + 2y + 6z - w, -x + 2y - z + 6w),$$
$$v_2 = \frac{1}{7}(x - 2y + z + w, -2x + 4y - 2z - 2w, x - 2y + z + w, x - 2y + z + w).$$
14. $\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{3\sqrt{2}}{10}, -\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5} \right) \right\}$.
15. (a) $\{1, 2t - 1, 6t^2 - 6t + 1\}$.
(b) $\{1, \sqrt{3}(2t - 1), \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)\}$.
16. (b) A resposta não é única. Uma possível base é $\{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}$.
19. Todas as transformações dadas são lineares.
22. $\text{Ker}(T) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$ e $I \notin \text{Im}(T)$.
23. (a) A resposta não é única. Defina, por exemplo,
$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a + 2b & b + 6c & a + 4b + 2c \\ 3b + c & a + 5b & a - 2b \\ 2a & -b & a - 3b - c \end{pmatrix}.$$

(b) Para o exemplo dado em (a), uma base de $\text{Ker}(T)$ é $\{x^3\}$. Uma base de $\text{Im}(T)$ é constituída pelas matrizes dadas no enunciado do exercício.
25. (a) Falsa (b) Falsa
(c) Verdadeira (d) Verdadeira
(e) Verdadeira (f) Verdadeira
(g) Falsa (h) Verdadeira
26. A resposta não é única. Defina, por exemplo, $T(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$.

27. A resposta não é única. Defina, por exemplo, $T(x, y) = (y, 0)$.

28. A resposta não é única. Defina, por exemplo, $T(x, y, z, t) = (z, t, 0, 0)$. Dessa forma, tem-se

$$\text{Ker}(T) = \text{Im}(T) = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)].$$

29. $\text{Ker}(T) = \{0\}$; $\text{Im}(T) = \{\varphi \in C^1(\mathbb{R}) : \varphi(0) = 0\}$.

- (a) Verdadeira (b) Falsa
30. (c) Verdadeira (d) Verdadeira
 (e) Verdadeira (f) Verdadeira
- (a) Verdadeira (b) Falsa
32. (c) Falsa (d) Verdadeira
 (e) Verdadeira

Respostas dos testes:

3. (d) 5. (a) 10. (e) 11. (d) 13. (a)

17. (d) 18. (e) 21. (d) 24. (b) 34. (b)