

Nesta prova, se  $V$  é um espaço vetorial, o vetor nulo de  $V$  será denotado por  $0_V$ . Se  $u_1, \dots, u_n$  forem vetores de  $V$ , o subespaço de  $V$  gerado por  $\{u_1, \dots, u_n\}$  será denotado por  $[u_1, \dots, u_n]$ . O operador identidade de  $V$  será denotado por  $I$ .

Se  $V$  tiver uma base canônica, ela será denotada por **can**.

Se  $V$  estiver munido de um produto interno e  $S$  for um subespaço de  $V$ , a projeção ortogonal de um vetor  $v \in V$  sobre  $S$ , se existir, será denotada por  $\text{proj}_S v$ .

Se  $M$  é uma matriz, a matriz transposta de  $M$  será denotada por  $M^t$ .

O traço de uma matriz quadrada  $A$  (isto é, a soma de todas as entradas na diagonal principal de  $A$ ) será denotado por  $\text{tr}(A)$ .

Se  $u \in \mathbb{C}^n$ , com  $u = u_1 + iu_2$  e  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ , denota-se  $\bar{u} = u_1 - iu_2$  e  $\text{Re}(u) = u_1, \text{Im}(u) = u_2$ ,

**Q1.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Assinale a alternativa verdadeira.

- (a) Os autovalores de  $A^{102}$  são  $i$  e  $-i$ .
- (b) Os autovalores de  $A^{102}$  são  $1$  e  $-1$ .
- (c) Os autovalores de  $A^{101}$  são  $1$  e  $-1$ .
- (d) Os autovalores de  $A^{101}$  são  $i$  e  $-i$ .
- (e)  $A^{110}$  não tem autovalores reais.

**Q2.** Considere os seguintes vetores de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 1), \quad v_4 = (2, 0, -2)$$

e os seguintes vetores de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$w_1 = (2, 0), \quad w_2 = (1, 0), \quad w_3 = (1, 1).$$

Podemos afirmar que **não existe** uma transformação linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

- (a)  $T(v_1) = w_1, \quad T(v_2) = w_2, \quad T(v_3) = w_3.$
- (b)  $T(v_2) = w_1, \quad T(v_3) = w_2, \quad T(v_4) = (0, 0).$
- (c)  $T(v_1 + v_2 + v_3) = 0, \quad T(v_1) \neq (0, 0).$
- (d)  $T(v_1) = w_1, \quad T(v_2) = (0, 0), \quad T(v_3) = w_3, \quad T(v_4) = (0, 0).$
- (e)  $T(v_1) = T(v_2) = w_1, \quad T(v_3) = w_2, \quad T(v_4) = (0, 0).$

**Q3.** Seja  $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  o operador linear definido por

$$T(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_1 + z_3, -z_1 + z_2 + z_3),$$

para todos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , e seja  $A$  a matriz de  $T$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^3$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $A$  não é diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ .
- (II) Existe uma base de  $\mathbb{C}^3$  formada por autovetores de  $T$ .
- (III)  $\text{Ker}(T)$  tem um conjunto gerador contido em  $\mathbb{R}^3$ .

Assinale a alternativa correta.

- (a) Apenas a afirmação (III) é falsa.
- (b) Apenas a afirmação (II) é falsa.
- (c) Apenas a afirmação (I) é falsa.
- (d) Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.
- (e) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.

**Q4.** Considere as matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Sabendo que  $M^t A M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ , se, com respeito a um sistema ortogonal de coordenadas, uma quádrlica possui equação

$$3x^2 + 3z^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 8\sqrt{6}y - 26 = 0,$$

então pode-se deduzir que uma equação reduzida para essa quádrlica é

- (a)  $4r^2 + 4s^2 - 2t^2 = 1$ .
- (b)  $-4r^2 - 4s^2 + 2t^2 = 1$ .
- (c)  $-2r^2 - 2s^2 + t^2 = 1$ .
- (d)  $4r^2 + 4s^2 - 2t^2 = 26$ .
- (e)  $2r^2 + 2s^2 - t^2 = 1$ .

**Q5.** Considere as bases  $\mathcal{B} = \{(1, 2), (0, 1)\}$  e  $\mathcal{C} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente, e seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear que satisfaz

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Então,  $T(3, 2)$  é igual a

- (a)  $(5, -1, -4)$ .
- (b)  $(-1, -7, 8)$ .
- (c)  $(5, 4, 0)$ .
- (d)  $(-1, -8, 0)$ .
- (e)  $(5, -8, 8)$ .

**Q6.** Seja  $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$  a transformação linear definida por

$$T(p(t)) = tp'(t) - p(t),$$

para todo  $p(t) \in P_3(\mathbb{R})$ , e seja  $A$  a matriz de  $T$  com respeito à base  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ . Assinale a alternativa **FALSA**.

- (a) Os elementos de  $\mathcal{B}$  são todos autovetores de  $T$ .
- (b)  $T$  não é invertível.
- (c) Os autovalores de  $A$  são todos reais.
- (d)  $A$  é uma matriz diagonal.
- (e)  $T(p(t)) \neq p(t)$ , para todo  $p(t) \in P_3(\mathbb{R}), p(t) \neq 0$ .

**Q7.** Se  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ , então a solução particular do sistema  $X'(t) = AX(t)$  que satisfaz a condição inicial  $X(0) = (0, 1)$  é

- (a)  $X(t) = e^{2t}(\sin(3t), \cos(3t) - \sin(3t))$ .
- (b)  $X(t) = e^{2t}(-\sin(3t), \cos(3t) + \sin(3t))$ .
- (c)  $X(t) = e^{2t}(\sin(3t), \cos(3t))$ .
- (d)  $X(t) = e^{2t}(-\sin(3t), \cos(3t) - \sin(3t))$ .
- (e)  $X(t) = e^{2t}(-\sin(3t), \cos(3t))$ .

**Q8.** Seja  $A$  a matriz de uma transformação linear  $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  com respeito às bases canônicas. É dado que uma forma escalonada de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja  $V$  o subespaço de  $\mathbb{R}^5$  gerado pelas linhas de  $A$  e seja  $W$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  gerado pelas colunas de  $A$ . Assinale a alternativa que pode ser falsa.

- (a)  $\dim(V) = 3$ .
- (b)  $\{(3, -1, 0, 0, 0), (0, 0, 2, -1, 0)\}$  é uma base de  $\text{Ker}(T)$ .
- (c)  $\dim(\text{Im}(T)) = 3$
- (d)  $W = \text{Im}(T)$ .
- (e)  $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$  é uma base de  $W$ .

**Q9.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão 4 munido de um produto interno. Seja  $S$  um subespaço de  $V$  de dimensão 2 e seja  $T: V \rightarrow V$  o operador linear definido por  $T(v) = \text{proj}_S v$ , para todo  $v \in V$ . Considere as seguintes afirmações:

(I)  $T$  é um operador simétrico com  $\text{Ker}(T) = S^\perp$ .

(II) Existe uma base ortonormal  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que  $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(III)  $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T - I)$ .

Assinale a alternativa correta.

- (a) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
- (b) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- (c) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- (d) Todas as três afirmações são verdadeiras.
- (e) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

**Q10.** Considere os seguintes subespaços de  $\mathbb{R}^3$ :

$$V = [(1, 0, 0), (1, 1, 0)] \quad \text{e} \quad W = [(1, 1, 1)].$$

Com respeito ao produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$ , é verdadeiro que

- (a) a projeção ortogonal sobre  $V$  de qualquer vetor de  $W$  é nula.
- (b) existe uma base ortonormal  $\{u, v, w\}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $v \in V$  e  $w \in W$ .
- (c) não existe base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  que contenha uma base de  $V$ .
- (d) se  $\{v_1, v_2, v_3\}$  é a base de  $\mathbb{R}^3$  que se obtém aplicando o processo de Gram-Schmidt à base  $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ , então  $v_3 \in W$ .
- (e) existe uma base ortonormal  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que todo vetor de  $\mathcal{B}$  pertence a  $V$  ou a  $W$ .

**Q11.** Considere o espaço vetorial  $M_2(\mathbb{R})$  munido do produto interno definido por  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ , para todos  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ . Considere o subespaço  $S = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right]$  de  $M_2(\mathbb{R})$ . Se  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  é o

vetor de  $S$  mais próximo de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , então  $6(a + b + c - d)$  é igual a

- (a) 10.
- (b) 9.
- (c) 11.
- (d) 8.
- (e) 7.

**Q12.** Seja  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  um operador linear cuja matriz  $A$  com respeito à base canônica de  $\mathbb{C}^n$  seja real. Assinale a única afirmação que não é necessariamente verdadeira.

- (a) Se  $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  é uma solução do sistema  $X'(t) = AX(t)$ , então a parte real e a parte imaginária de  $X$  também são soluções do sistema.
- (b) Para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Ker}(T - \bar{\lambda}I) = \{\bar{v} : v \in \text{Ker}(T - \lambda I)\}$ .
- (c) Se todas as raízes do polinômio característico de  $T$  tiverem multiplicidade algébrica 1, então  $T$  será diagonalizável.
- (d) Se  $T$  for diagonalizável, então todas as soluções complexas do sistema  $X'(t) = AX(t)$  serão combinações lineares de soluções da forma  $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{C}$  e algum  $v \in \mathbb{C}^n$ .
- (e) Se  $v$  é um autovetor de  $T$ , então  $\text{Re}(v)$  e  $\text{Im}(v)$  são autovetores de  $T$ .

**Q13.** Seja  $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{C}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Assinale a alternativa correta.

- (a)  $T$  é sobrejetora.
- (b)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$
- (c)  $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$ .
- (d)  $\dim(\text{Im}(T)) = 1$ .
- (e)  $T$  é injetora.

**Q14.** Seja  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear que satisfaz  $\text{Ker}(T) = [(0, 1, 1)]$ ,  $\text{Ker}(T - 3I) = [(-1, 1, -1)]$  e  $\text{Ker}(T - 6I) = [(2, 1, -1)]$ . Seja  $A = [T]_{\text{can}}$  e seja  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  a solução do sistema  $X'(t) = AX(t)$  que satisfaz  $X(0) = (3, 1, 1)$ . Então, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x_3(t)$  é igual a

- (a)  $1 + e^{3t} - e^{6t}$ .
- (b)  $1 - e^{3t} + e^{6t}$ .
- (c)  $-1 + e^{3t} + e^{6t}$ .
- (d)  $-1 - 2e^{3t} + 4e^{6t}$ .
- (e)  $1 + 2e^{3t} - 2e^{6t}$ .

**Q15.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear. Assinale a afirmação que pode ser falsa.

- (a)  $T$  é bijetora se, e somente se, a imagem de qualquer base de  $V$  é uma base de  $V$ .
- (b)  $T$  é injetora se, e somente se,  $T$  é sobrejetora.
- (c) Se  $T$  é sobrejetora, então a imagem por  $T$  de qualquer conjunto gerador de  $V$  é um conjunto gerador de  $V$ .
- (d)  $\text{Ker}(T) \neq \text{Im}(T)$ .
- (e) Se  $T$  é injetora, então a imagem por  $T$  de qualquer conjunto linearmente independente é linearmente independente.

**Q16.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear simétrico. Assinale a alternativa **FALSA**.

- (a)  $T$  pode não ser invertível.
- (b) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os únicos autovalores de  $T$  e  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , então  $\text{Ker}(T - \lambda_1 I) = (\text{Ker}(T - \lambda_2 I))^\perp$ .
- (c)  $T$  é diagonalizável.
- (d) Se  $u$  e  $v$  são autovetores de  $T$  associados a autovalores distintos, então  $\langle u, v \rangle = 0$ .
- (e) Se  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$  tal que  $[T]_{\mathcal{B}}$  é diagonal, então  $\mathcal{B}$  é ortonormal.