

**Q1.** Sejam  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  um autovalor de  $T$  e denote por  $V(\lambda)$  o correspondente autoespaço. Considere as seguintes afirmações:

- (I) o subespaço  $V(\lambda)$  é necessariamente invariante por  $T$ ;
- (II) o subespaço  $V(\lambda)^\perp$  é necessariamente invariante por  $T$ ;
- (III) se  $T$  for um operador simétrico e se  $w \in V(\lambda)^\perp$  então  $T(w) \in V(\lambda)^\perp$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

**Q2.** Sejam  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear simétrico. Denote por  $A$  a matriz que representa  $T$  em relação a uma certa base ortonormal de  $V$ . Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  um autovalor de  $T$  e denote por  $V(\lambda)$  o correspondente autoespaço. Considere as seguintes afirmações:

- (I) todas as raízes do polinômio característico de  $T$  são reais;
- (II) se o subespaço  $V(\lambda)$  é gerado por dois vetores linearmente independentes  $u, v$  então  $u$  e  $v$  são ortogonais;
- (III) se  $M$  é uma matriz invertível tal que  $M^{-1}AM$  é uma matriz diagonal então  $M^{-1} = M^t$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

**Q3.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear cuja matriz em relação à base canônica é:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa que contém uma afirmação **FALSA**:

- (a) existe uma base ortonormal  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $[T]_{\mathcal{B}}$  é uma matriz simétrica;
- (b) os únicos subespaços invariantes por  $T$  são os subespaços  $\{0\}$  e  $\mathbb{R}^2$ ;
- (c)  $T$  não tem autovetores;
- (d)  $T$  é invertível;
- (e)  $T$  não é diagonalizável.

**Q4.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear cuja matriz em relação à base canônica é:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que 0,  $-1$  e  $1$  são autovalores de  $T$ , com autoespaços:

$$V(0) = [(0, 0, 1)], \quad V(-1) = [(1, -1, 0)], \quad V(1) = [(1, 1, 0)].$$

Se uma quádrlica possui equação  $2xy + \sqrt{2}y + z = 0$  relativamente a um certo sistema de coordenadas ortogonal então uma equação reduzida para essa quádrlica é:

- (a)  $-r^2 + s^2 + t = 0$ ;
- (b)  $-r^2 + s^2 + \frac{t}{2} = \frac{1}{2}$ ;
- (c)  $-r^2 + s^2 = 0$ ;
- (d)  $-r^2 + s^2 + 2t = 0$ ;
- (e)  $-r^2 + s^2 + \sqrt{2}t = 0$ .

**Q5.** Seja  $n \geq 1$  e sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  matrizes reais. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $A$  e  $B$  são simétricas então a matriz  $A + B$  é diagonalizável;
- (II) se  $A$  é simétrica então a matriz  $A^2$  também é simétrica;
- (III) se  $A$  e  $B$  são simétricas então a matriz  $AB$  também é simétrica.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

**Q6.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno usual e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear simétrico cujos autovalores são 1, 2 e 3. Se os autoespaços associados a 1 e 2 são  $V(1) = [(1, 1, 0)]$  e  $V(2) = [(1, -1, 1)]$  então:

- (a)  $V(3) = [(-1, 1, 2)]$ ;
- (b)  $V(3) = [(1, -1, 0)]$ ;
- (c)  $V(3) = [(1, 5, 4)]$ ;
- (d)  $V(3) = [(0, 0, 1)]$ ;
- (e) não há dados suficientes para se determinar  $V(3)$ .

**Q7.** Sejam  $a, k, b$  números reais com  $b \neq 0$ . A cônica cuja equação em relação a um certo sistema de coordenadas ortogonal é:

$$ax^2 + 2bxy + ay^2 = k$$

pode ser colocada na forma reduzida:

$$(a + b)u^2 + (a - b)v^2 = k$$

desde que seja feita a mudança de variáveis:

- (a)  $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} u + \frac{1}{\sqrt{2}} v, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} u - \frac{1}{\sqrt{2}} v; \end{cases}$
- (b)  $\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y, \\ v = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y; \end{cases}$
- (c)  $\begin{cases} u = \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y, \\ v = \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} y; \end{cases}$
- (d)  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} u + \frac{1}{2} v, \\ y = \frac{1}{2} u - \frac{\sqrt{3}}{2} v; \end{cases}$
- (e)  $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} u - \frac{2}{\sqrt{5}} v, \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} u + \frac{1}{\sqrt{5}} v. \end{cases}$

**Q8.** Assinale a alternativa contendo uma matriz  $M$  tal que a mudança de variáveis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

transforma a expressão  $2xy + 2xz + 2yz$  numa expressão quadrática nas variáveis  $u, v, w$  sem termos mistos:

$$(a) \quad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix};$$

$$(b) \quad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix};$$

$$(c) \quad M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

$$(d) \quad M = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

$$(e) \quad M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

**Q9.** Sejam  $a, b$  números reais e:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $a \neq 0$  então a matriz  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (II) se  $a \neq b$  então a matriz  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ ;
- (III) se  $a = b$  então a matriz  $A$  não é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Q10.** Sabe-se que  $2i$  é um autovalor da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e que o autoespaço  $V(2i)$  tem dimensão 2. Assinale a alternativa correta:

- (a)  $A^6 = -64I$ ;
- (b)  $A^6 = 64I$ ;
- (c)  $A^5 = -16A$ ;
- (d)  $A^5 = 32I$ ;
- (e)  $A^5 = -32I$ .

**Q11.** Seja  $T : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5$  um operador linear e seja  $A \in M_5(\mathbb{C})$  a matriz que representa  $T$  em relação à base canônica. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor de  $A$  então  $\bar{\lambda}$  também é um autovalor de  $A$ ;
- (II) se a matriz  $A$  é real e  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor de  $A$  então  $-\lambda$  também é um autovalor de  $A$ ;
- (III) se a matriz  $A$  é real então  $A$  tem pelo menos um autovalor real.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Q12.** Seja  $(x, y, z)$  a solução do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

satisfazendo a condição inicial  $(x(0), y(0), z(0)) = (4, 5, 0)$ . Temos que  $y(1)$  é igual a:

- (a)  $e + 4e^4$ ;
- (b)  $2e + 2e^4$ ;
- (c)  $e + 2e^4$ ;
- (d)  $2e + 4e^4$ ;
- (e)  $2 + 2e^4$ .

**Q13.** Seja  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  um operador linear que é representado em relação à base canônica por uma matriz real  $A \in M_3(\mathbb{R})$ . Assinale a alternativa que contém uma afirmação **FALSA**:

- (a) se  $(2 + i, 3, -i)$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $2 + i$  então  $(1, 0, -1)$  é um autovetor de  $T$ ;
- (b) se  $(2 + i, 3, -i)$  é um autovetor de  $T$  então  $(2 - i, 3, i)$  é um autovetor de  $T$ ;
- (c) se  $(2 + i, 3, -i)$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $2$  então  $(2, 3, 0)$  é um autovetor de  $T$ ;
- (d) se  $(2 + i, 3, -i)$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $2 + i$  então  $(2, 3, 0)$  não é um autovetor de  $T$ ;
- (e) se  $(2, 3, 0)$  e  $(1, 0, -1)$  são autovetores de  $T$  associados ao autovalor  $2$  então  $(2 + i, 3, -i)$  é um autovetor de  $T$ .

**Q14.** Seja  $a$  um número complexo e seja  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  o operador linear que é representado em relação à base canônica pela matriz:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & i & a \\ 1 & i & a \\ 1 & i & a \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $a = 0$  então  $T$  é diagonalizável;
- (II) o operador  $T$  possui 3 autovalores distintos;
- (III) o núcleo de  $T$  tem dimensão 2.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Q15.** Sejam  $a$  e  $c$  números complexos e seja  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$  a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (ax + iy, cz, ax - cy, x + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{C}^3.$$

Assinale a alternativa correta:

- (a) se  $a = 0$  e  $c = 0$  então  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ ;
- (b) se  $a \neq 0$  e  $c = 0$  então  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ ;
- (c) se  $a = 0$  e  $c \neq 0$  então  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ ;
- (d) se  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$  então  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ ;
- (e) se  $a = 0$  e  $c \neq 0$  então  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ .

**Q16.** Seja  $A \in M_3(\mathbb{R})$  e considere o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Denote por  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  o espaço vetorial das funções  $(x, y, z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e por  $\mathcal{S}$  o subespaço de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  formado pelas soluções desse sistema. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $\lambda \neq 0$  é um autovalor real de  $A$  e se  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$  então  $(x(t), y(t), z(t)) = e^{-\lambda t}(x_0, y_0, z_0)$  pertence a  $\mathcal{S}$ ;
- (II) se  $A$  é diagonalizável sobre  $\mathbb{C}$ , mas não sobre  $\mathbb{R}$ , então  $\dim(\mathcal{S}) < 3$ ;
- (III) se  $A$  tem 3 autovalores reais distintos então  $\dim(\mathcal{S}) = 3$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.