

Nesta prova, se V denota um espaço vetorial, o vetor nulo de V é denotado por 0_V . O subespaço de V gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_n \in V$ é denotado por $[v_1, \dots, v_n]$. Se λ é um autovalor de um operador linear $T : V \rightarrow V$ então o autoespaço de T associado a λ é denotado por $V(\lambda)$. O operador identidade $I : V \rightarrow V$ é definido por $I(v) = v$, para todo $v \in V$. Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é uma matriz $n \times n$ então o traço de A é definido por $\text{tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$.

Q1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e \mathcal{B} uma base de V . Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T : V \rightarrow V$ o operador linear cuja matriz em relação à base \mathcal{B} é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que T é bijetor se e somente se:

- (a) $2a - b - 3 \neq 0$;
- (b) $2a - b + 3 = 0$;
- (c) $2a + b - 3 \neq 0$;
- (d) $2a - b + 3 \neq 0$;
- (e) $2a + b - 3 = 0$.

Q2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n , onde $n > 1$. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear não nulo. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $T^3 = T$ e λ é um autovalor de T então $\lambda = -1$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$;
- (II) se $T^k(v) = 0_V$ para todo $v \in V$ e para algum $k > 1$ então T não é diagonalizável;
- (III) se $T^3 = -T$ então T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q3. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno canônico e considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação às bases \mathcal{B} e \mathcal{C} é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2a-b+1 \\ a & a & a+c \\ c & 2c & 2c \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que T é simétrico se e somente se:

- (a) $a + c = 0$;
- (b) $a + b = 0$;
- (c) $a + b = c$;
- (d) $a + c = b$;
- (e) $b + c = a$.

Q4. Seja $T : P_4(\mathbb{R}) \rightarrow P_4(\mathbb{R})$ um operador linear cujo polinômio característico é $p(t) = -t^2(t-2)(t+3)^2$. Pode-se afirmar que:

- (a) T é sobrejetor;
- (b) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$, $\dim(\text{Ker}(T - 2I)) = 1$ e $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 1$;
- (c) T é diagonalizável se e somente se $\dim(\text{Ker}(T)) > 1$ e $\dim(V(-3)) = 2$;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$, $\dim(\text{Ker}(T - 2I)) = 1$ e $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 2$;
- (e) T é diagonalizável se e somente se $\dim(\text{Ker}(T)) > 1$.

Q5. Seja V um espaço vetorial de dimensão n , onde n é um inteiro ímpar e maior do que 1. Sejam v_1, v_2, \dots, v_{n-2} vetores distintos de V , $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $p(t) = -(t-2)^{n-2}(t-1)(t+1)$ o polinômio característico de T . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $V(2) = [v_1, v_2, \dots, v_{n-2}]$ então T é diagonalizável;
- (II) T é diagonalizável se e somente se:

$$\dim(\text{Ker}(T - 2I)) + \dim(\text{Ker}(T + I)) + \dim(\text{Ker}(T - I)) = n;$$

- (III) se $n = 3$ então T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q6. Sejam $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ uma base de \mathbb{R}^3 e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $S = T^2 - I$. Pode-se afirmar que:

- (a) $\text{Ker}(S) = \{(0, 0, 0)\}$ e $\text{Im}(S) = [u, v, w]$;
- (b) $\text{Ker}(S) = [u - v + w]$ e $\text{Im}(S) = [v, w]$;
- (c) $\text{Ker}(S) = [u - v + w]$ e $\text{Im}(S) = [u, v]$;
- (d) $\text{Ker}(S) = [u + v - w]$ e $\text{Im}(S) = [u, v]$;
- (e) $\text{Ker}(S) = [u + v - w]$ e $\text{Im}(S) = [v, w]$.

Q7. Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, $S : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ operadores lineares. Se:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

e $S(a + bt + ct^2) = a - c + (b + c)t + (a - 2b)t^2$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, então o traço da matriz $[S \circ T]_{\mathcal{B}}$ é igual a:

- (a) 6;
- (b) 9;
- (c) 3;
- (d) 12;
- (e) 1.

Q8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. A matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 6 & b & 1 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável se e somente se:

- (a) $b = 0$;
- (b) $a \neq 1$ e $b = 0$;
- (c) $b \neq 0$;
- (d) $a \neq 1$;
- (e) $a = 1$.

Q9. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por:

$$T(x, y, z) = (x - 2y, -2x + y, -z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a) T não é diagonalizável;
- (b) $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 1$ e $\dim(\text{Ker}(T - 3I)) = 1$;
- (c) $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 1$ e $\dim(\text{Ker}(T - 3I)) = 2$;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 2$ e $\dim(\text{Ker}(T - 3I)) = 1$;
- (e) T não é injetor.

Q10. Considere as bases $\mathcal{B} = \{(1, -2), (0, 1)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 .
Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base \mathcal{B} é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são tais que a matriz de T em relação à base \mathcal{C} é:

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

pode-se afirmar que:

- (a) $a + d = -2$ e $b + c = 8$;
- (b) $a + d = 2$ e $b + c = -2$;
- (c) $a + d = 2$ e $b + c = -8$;
- (d) $a + d = 2$ e $b + c = -4$;
- (e) $a + d = -2$ e $b + c = 4$.

Q11. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ e considere as seguintes afirmações:

- (I) se uma das linhas de A é nula então 0 é um autovalor de A ;
- (II) se n é par então existe pelo menos um $\lambda \in \mathbb{R}$ que é autovalor da matriz A ;
- (III) supondo que A seja invertível, então A é diagonalizável se e somente se A^{-1} é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q12. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ um operador linear simétrico cujos únicos autovalores são 1, -2 e 3. Sabendo-se que:

$$V(-2) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right], \quad V(3) = \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

pode-se afirmar que $T\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ é igual a:

- (a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$;
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$;
- (c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$;
- (d) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$;
- (e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Q13. Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\},$$

$$\mathcal{C} = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$$

é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : T(a, b, c, d) = (1, -1, 1)\}$, pode-se afirmar que:

- (a) $S = \{(2 - 2d, -2 + 3d, 1 - d, d) : d \in \mathbb{R}\}$;
- (b) $S = \{(-2 - 2d, -2 + 3d, 1 + d, d) : d \in \mathbb{R}\}$;
- (c) $S = \{(-2 - 2d, 2 + 3d, -1 - d, d) : d \in \mathbb{R}\}$;
- (d) $S = \{(-2 - 2d, -2 + 3d, 1 - d, d) : d \in \mathbb{R}\}$;
- (e) $S = \{(2 - 2d, 2 + 3d, -1 - d, d) : d \in \mathbb{R}\}$.

Q14. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases:

$$\mathcal{B} = \{-t^2, t - t^2, 1 + 2t + t^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dados $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $T(a + bt + ct^2) = (\alpha, \beta)$, então $\alpha - \beta$ é igual a:

- (a) $4a - b - c$;
- (b) $2a - 5b - c$;
- (c) $a + b - c$;
- (d) $4a + b - c$;
- (e) $2a + 5b - c$.

Q15. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que:

$$\text{Ker}(T) = [(0, 1, 2)], \quad T(1, 1, 1) = -(1, 1, 1) \quad \text{e} \quad T(1, 1, 2) = 2(1, 1, 2).$$

Pode-se afirmar que $T^{2012}(3, 1, 1)$ é igual a:

- (a) $(1 + 2^{2013}, 1 + 2^{2013}, 1 - 2^{2014})$;
- (b) $(1 - 2^{2013}, 1 - 2^{2013}, 1 + 2^{2014})$;
- (c) $(1 - 2^{2013}, 1 + 2^{2013}, 1 - 2^{2014})$;
- (d) $(1 + 2^{2013}, 1 + 2^{2013}, 1 + 2^{2014})$;
- (e) $(1 - 2^{2013}, 1 - 2^{2013}, 1 - 2^{2014})$.

Q16. Sejam $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ uma base de \mathbb{R}^3 e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) a, d e f são autovalores de T ;
- (b) se $a \neq d, a \neq f$ e $d \neq f$ então T é diagonalizável;
- (c) se $c = 0$ e $e = 0$ então T é diagonalizável;
- (d) u é um autovetor de T ;
- (e) $T(v) \in [u, v]$.