

MAT2458 – ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA II

2ª Lista de Exercícios – 2º semestre de 2012

(continuação)

45. No \mathbb{R}^3 com o produto interno usual, seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, -2x + y, -z).$$

- (a) Verifique que T é simétrico.
- (b) Determine uma matriz M tal que $M^{-1}[T]_{\text{can}}M$ seja diagonal.

46. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, $T : U \rightarrow U$ um operador linear e u e v autovetores de T associados respectivamente a autovalores distintos λ e μ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $\dim(U) = 3$ e $\dim(V(\lambda)) = 2$ então T é diagonalizável;
- (II) se T é simétrico então $V(\lambda) = V(\mu)^\perp$;
- (III) se $\langle u, v \rangle = 0$ então T é simétrico.

Assinale a alternativa verdadeira.

- (a) somente as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) somente as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) somente a afirmação (I) é verdadeira.

47. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido do seu produto interno canônico.

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ é

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (I) T não é simétrico, mas é diagonalizável;
- (II) T é simétrico;
- (III) T não é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são falsas;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

48. No \mathbb{R}^3 com o produto interno usual, seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico cujos autovalores são -2 e 3 . Sendo $V(-2) = \text{Ker}(T + 2I) = [(1, 1, 1), (-1, 0, 1)]$, ache $[T]_{\text{can}}$, onde can é a base canônica de \mathbb{R}^3 .

49. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno. Seja W um subespaço de V e seja $T : V \rightarrow V$ definida por $T(v) = \text{proj}_W(v)$, a projeção ortogonal de v em W .

(a) Verifique que T é um operador simétrico.

(b) Prove que existe uma base B de V tal que $[T]_B =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

onde o número de 1's na diagonal é igual à dimensão de W .

50. Considere \mathbb{R}^4 munido do produto interno usual. Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um operador simétrico. Sabendo que os únicos autovalores de T são 2 e -2 e que

$$V(2) = [(0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1)],$$

pode-se afirmar que $T(3, -2, 2, 3)$ é igual a:

- (a) $(6, 4, 4, 6)$ (b) $(-4, 6, 6, -4)$ (c) $(6, 4, -4, 6)$ (d) $(-6, -4, 4, 6)$ (e) $(4, 6, 6, 4)$

Respostas:

45. (b) As respostas vão variar. Uma tal matriz M é $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

48. $[T]_{\text{can}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -7 & -10 & 5 \\ -10 & 8 & -10 \\ 5 & -10 & -7 \end{bmatrix}$

Respostas dos testes: 46. (e) 47. (e) 50. (c)