

Nesta prova, se  $V$  denota um espaço vetorial, o vetor nulo de  $V$  é denotado por  $0_V$ . O subespaço de  $V$  gerado pelos vetores  $v_1, \dots, v_n \in V$  é denotado por  $[v_1, \dots, v_n]$ . Se  $\lambda$  é um autovalor de um operador linear  $T : V \rightarrow V$  então o autoespaço de  $T$  associado a  $\lambda$  é denotado por  $V(\lambda)$ . O operador identidade  $I : V \rightarrow V$  é definido por  $I(v) = v$ , para todo  $v \in V$ . Se  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  é uma matriz  $n \times n$  então o traço de  $A$  é definido por  $\text{tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$ .

**Q1.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e igual a  $n$ , onde  $n > 1$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear não nulo. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $T^2 = T$  e  $\lambda$  é um autovalor de  $T$  então  $\lambda = -1$  ou  $\lambda = 1$ ;
- (II) se  $T^k(v) = 0_V$  para todo  $v \in V$  e para algum  $k > 1$  então  $T$  não é diagonalizável;
- (III) se  $T^3 = -T$  então  $T$  não é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

**Q2.** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $0$  é um autovalor de  $A$  então alguma das linhas de  $A$  é nula;
- (II) se  $n$  é ímpar então existe pelo menos um  $\lambda \in \mathbb{R}$  que é autovalor da matriz  $A$ ;
- (III) supondo que  $A$  seja invertível, então  $A$  é diagonalizável se e somente se  $A^{-1}$  é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

**Q3.** Considere as bases  $\mathcal{B} = \{(1, 2), (0, 1)\}$  e  $\mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear cuja matriz em relação à base  $\mathcal{B}$  é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  são tais que a matriz de  $T$  em relação à base  $\mathcal{C}$  é:

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

pode-se afirmar que:

- (a)  $a + d = 2$  e  $b + c = -4$ ;
- (b)  $a + d = -2$  e  $b + c = 4$ ;
- (c)  $a + d = -2$  e  $b + c = 8$ ;
- (d)  $a + d = 2$  e  $b + c = -8$ ;
- (e)  $a + d = 2$  e  $b + c = -2$ .

**Q4.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do seu produto interno canônico e considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear cuja matriz em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2a+b+1 \\ a & a & a+c \\ c & 2c & 2c \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que  $T$  é simétrico se e somente se:

- (a)  $a + b = 0$ ;
- (b)  $a + b = c$ ;
- (c)  $b + c = a$ ;
- (d)  $a + c = b$ ;
- (e)  $a + c = 0$ .

**Q5.** Sejam  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$  uma base de  $\mathbb{R}^3$  e  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

- (a) se  $e = 0$  e  $f = 0$  então  $T$  é diagonalizável;
- (b) se  $a \neq b$ ,  $a \neq c$  e  $b \neq c$  então  $T$  é diagonalizável;
- (c)  $w$  é um autovetor de  $T$ ;
- (d)  $a$ ,  $b$  e  $c$  são autovalores de  $T$ ;
- (e)  $T(v) \in [v, w]$ .

**Q6.** Seja  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$  um operador linear cujo polinômio característico é  $p(t) = t^2(t - 2)(t + 3)$ . Pode-se afirmar que:

- (a)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ ,  $\dim(\text{Ker}(T - 2I)) = 1$  e  $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 1$ ;
- (b)  $T$  é sobrejetor;
- (c)  $T$  é diagonalizável se e somente se  $\dim(\text{Ker}(T)) > 1$  e  $\dim(V(-3)) = 2$ ;
- (d)  $T$  é diagonalizável se e somente se  $\dim(\text{Ker}(T)) > 1$ ;
- (e)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ ,  $\dim(\text{Ker}(T - 2I)) = 1$  e  $\dim(\text{Ker}(T + 3I)) = 2$ .

**Q7.** Seja  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear cuja matriz em relação às bases:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}, \\ \mathcal{C} &= \{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, -1)\} \end{aligned}$$

é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se  $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : T(a, b, c, d) = (1, -1, 1)\}$ , pode-se afirmar que:

- (a)  $S = \{(-2 - 2d, -2 + 3d, 1 + d, d) : d \in \mathbb{R}\}$ ;
- (b)  $S = \{(-2 - 2d, -2 + 3d, 1 - d, d) : d \in \mathbb{R}\}$ ;
- (c)  $S = \{(-2 - 2d, 2 + 3d, -1 - d, d) : d \in \mathbb{R}\}$ ;
- (d)  $S = \{(2 - 2d, 2 + 3d, -1 - d, d) : d \in \mathbb{R}\}$ ;
- (e)  $S = \{(2 - 2d, -2 + 3d, 1 - d, d) : d \in \mathbb{R}\}$ .

**Q8.** Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão 3 e  $\mathcal{B}$  uma base de  $V$ . Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $T : V \rightarrow V$  o operador linear cuja matriz em relação à base  $\mathcal{B}$  é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & b & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que  $T$  é bijetor se e somente se:

- (a)  $2a - b + 3 \neq 0$ ;
- (b)  $2a - b + 3 = 0$ ;
- (c)  $2a - b - 3 \neq 0$ ;
- (d)  $2a + b - 3 = 0$ ;
- (e)  $2a + b - 3 \neq 0$ .

**Q9.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . A matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável se e somente se:

- (a)  $a \neq 1$  e  $b = 0$ ;
- (b)  $b \neq 0$ ;
- (c)  $a = 1$ ;
- (d)  $a \neq 1$ ;
- (e)  $b = 0$ .

**Q10.** Considere o espaço vetorial  $M_2(\mathbb{R})$  munido do produto interno:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

Seja  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  um operador linear simétrico cujos únicos autovalores são 1,  $-2$  e 3. Sabendo-se que:

$$V(-2) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right], \quad V(3) = \left[ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

pode-se afirmar que  $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$  é igual a:

- (a)  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ ;
- (b)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ ;
- (c)  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ ;
- (d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ ;
- (e)  $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ .

**Q11.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear tal que:

$$\text{Ker}(T) = [(0, 1, 2)], \quad T(1, 1, 1) = -(1, 1, 1) \quad \text{e} \quad T(1, 1, 2) = 2(1, 1, 2).$$

Pode-se afirmar que  $T^{2012}(-1, 1, 1)$  é igual a:

- (a)  $(1 + 2^{2013}, 1 + 2^{2013}, 1 + 2^{2014})$ ;
- (b)  $(1 + 2^{2013}, 1 + 2^{2013}, 1 - 2^{2014})$ ;
- (c)  $(1 - 2^{2013}, 1 - 2^{2013}, 1 - 2^{2014})$ ;
- (d)  $(1 - 2^{2013}, 1 + 2^{2013}, 1 - 2^{2014})$ ;
- (e)  $(1 - 2^{2013}, 1 - 2^{2013}, 1 + 2^{2014})$ .

**Q12.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear definido por:

$$T(x, y, z) = (x - 2y, -2x + y, 3z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Pode-se afirmar que:

- (a)  $T$  não é diagonalizável;
- (b)  $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 1$  e  $\dim(\text{Ker}(T - 3I)) = 1$ ;
- (c)  $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 2$  e  $\dim(\text{Ker}(T - 3I)) = 1$ ;
- (d)  $T$  não é injetor;
- (e)  $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 1$  e  $\dim(\text{Ker}(T - 3I)) = 2$ .

**Q13.** Sejam  $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$  uma base de  $\mathbb{R}^3$  e  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear definido por  $S = T^2 - I$ . Pode-se afirmar que:

- (a)  $\text{Ker}(S) = [u - v + w]$  e  $\text{Im}(S) = [u, v]$ ;
- (b)  $\text{Ker}(S) = [u - v + w]$  e  $\text{Im}(S) = [v, w]$ ;
- (c)  $\text{Ker}(S) = [u + v - w]$  e  $\text{Im}(S) = [u, v]$ ;
- (d)  $\text{Ker}(S) = \{(0, 0, 0)\}$  e  $\text{Im}(S) = [u, v, w]$ ;
- (e)  $\text{Ker}(S) = [u + v - w]$  e  $\text{Im}(S) = [v, w]$ .

**Q14.** Seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear cuja matriz em relação às bases:

$$\mathcal{B} = \{-t^2, t - t^2, 1 + 2t + t^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

é:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dados  $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , se  $T(a + bt + ct^2) = (\alpha, \beta)$ , então  $\alpha + \beta$  é igual a:

- (a)  $4a - b - c$ ;
- (b)  $2a + 5b - c$ ;
- (c)  $4a + b - c$ ;
- (d)  $a + b - c$ ;
- (e)  $2a - 5b - c$ .

**Q15.** Considere a base  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$  de  $P_2(\mathbb{R})$  e sejam  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ ,  $S : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  operadores lineares. Se:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

e  $S(a + bt + ct^2) = a - c + (b + c)t + (a + 2b)t^2$  para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , então o traço da matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}}$  é igual a:

- (a) 3;
- (b) 1;
- (c) 6;
- (d) 9;
- (e) 12.

**Q16.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ , onde  $n$  é um inteiro ímpar e maior do que 1. Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$  vetores distintos de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e  $p(t) = -(t-2)^{n-2}(t-1)(t+1)$  o polinômio característico de  $T$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $V(2) = [v_1, v_2, \dots, v_{n-2}]$  então  $T$  é diagonalizável;
- (II)  $T$  é diagonalizável se e somente se:

$$\dim(\text{Ker}(T - 2I)) + \dim(\text{Ker}(T + I)) + \dim(\text{Ker}(T - I)) = n;$$

- (III) se  $n > 3$  então  $T$  é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

- (a) todas as afirmações são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.