

Q1. Considere as seguintes afirmações:

(I) as matrizes

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

são equivalentes;

(II) as matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são equivalentes;

(III) as matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são equivalentes.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (c) todas as afirmações são falsas;
- (d) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q2. Seja n um inteiro positivo e considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma das quatro entradas da matriz A^n é igual a:

- (a) $2^{n-1} + 2^{2n-1}$;
- (b) 2^{2n+1} ;
- (c) 2^{n-1} ;
- (d) 2^{2n-1} ;
- (e) 4^n .

Q3. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Suponha que 3 seja um autovalor de T e que:

$$\text{Ker}(T) = [(-1, 1, 1), (1, 2, 2)].$$

Dados $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$, se $T(\alpha, \beta, \gamma) = (a, b, c)$, então $a + b - c$ é igual a:

- (a) $3(\beta - \gamma)$;
- (b) $-3(\alpha + \beta)$;
- (c) 0;
- (d) $\frac{3}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta - \gamma)$;
- (e) $\frac{3}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$.

Q4. Considere a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\text{can}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Pode-se afirmar que:

- (a) T não é diagonalizável e seus autovalores são $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ e -1 ;
- (b) T é diagonalizável e seus autovalores são 3 e -1 ;
- (c) T é diagonalizável e seus autovalores são $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ e -1 ;
- (d) T não é diagonalizável e seus autovalores são 3 e -1 ;
- (e) T não é diagonalizável pois seu polinômio característico possui raízes complexas não reais.

Q5. Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1, t, t + t^2\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\text{can}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Dados $a, b, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, se

$$T(a, b) = \alpha + \beta t + \gamma t^2,$$

então $\alpha + \beta + \gamma$ é igual a:

- (a) $4a + 2b$;
- (b) $2a + 3b$;
- (c) $-a + 2b$;
- (d) $4a + 3b$;
- (e) $2a + 2b$.

Q6. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, t\}$$

dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^3$ e $P_1(\mathbb{R})$, respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $\text{Ker}(T) = [(a, b, 1)]$, então $a + b$ é igual a:

- (a) 7;
- (b) 1;
- (c) -5;
- (d) -8;
- (e) -3.

Q7. Suponha que o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ esteja munido do seu produto interno usual. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\mathcal{B}$ denota a base de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\},$$

então o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

é simétrico;

(II) se $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é o operador linear tal que

$$T(1, 2, 3) = (-2, -4, -6), \quad T(-3, 0, 1) = (-6, 0, 2), \quad T(-2, 1, 0) = (-6, 3, 0),$$

então T é simétrico;

(III) se $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ satisfazendo as condições:

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle u_1, u_3 \rangle = 0,$$

então o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) todas as afirmações são falsas;
- (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q8. Temos que o polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

é $p_A(t) = -(t+3)^2(t-2)$. Seja X a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (1, -1, 2)$. Se $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$, então $X_1(t) + X_2(t)$ é igual a:

- (a) $e^{2t} - e^{-3t}$;
- (b) $e^{-2t} + e^{2t}$;
- (c) 0;
- (d) $6e^{-2t} - 6e^{2t}$;
- (e) $3e^{2t} - 3e^{-3t}$.

Q9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que o valor da integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} (a \sin t + b \cos t - e^t)^2 dt$$

seja mínimo. Temos que $a + b$ é igual a:

- (a) $\frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{-\pi})$;
- (b) $e^{\pi} + e^{-\pi}$;
- (c) $\frac{1}{2}(e^{\pi} - e^{-\pi})$;
- (d) 0;
- (e) $e^{\pi} - e^{-\pi}$.

Q10. Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}, \text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Dados $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se

$$T^{-1}(a, b) = (\alpha, \beta),$$

então $\alpha + \beta$ é igual a:

- (a) $-7a + 3b$;
- (b) $-3a + 3b$;
- (c) $10a - 4b$;
- (d) $-3a - b$;
- (e) $-4a - 4b$.

Q11. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 2 & 3 \\ -2 & a & a \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que T não é injetora se, e somente se, a é igual a:

- (a) 2;
- (b) 4;
- (c) -4;
- (d) -2;
- (e) 0.

Q12. Considere o espaço vetorial $C([0, 1])$ munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt, \quad f, g \in C([0, 1]).$$

Seja p o polinômio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima $f(t) = t^3$. Se $p(t) = a + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a + b$ é igual a:

- (a) $\frac{4}{5}$;
- (b) $\frac{17}{20}$;
- (c) $\frac{7}{20}$;
- (d) $\frac{17}{10}$;
- (e) $\frac{7}{10}$.

Q13. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 6 munido de um produto interno e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear simétrico cujo polinômio característico seja $p_T(t) = t^5(t - 1)$. Dado um polinômio

$$q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n,$$

com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, denotamos por $q(T)$ o operador linear em V definido por:

$$q(T) = a_0I + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n,$$

onde I denota o operador identidade de V . Seja q um polinômio não nulo de grau mínimo tal que $q(T) = 0$. Se o coeficiente dominante de q é igual a 1, então q é igual a:

- (a) $t^3 - t^2$;
- (b) $t^5 - t^4$;
- (c) $t^2 - t$;
- (d) $t^4 - t^3$;
- (e) $t^6 - t^5$.

Q14. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ e suponha que

$$(0, 1, 1), \quad (0, 1, -1) \quad \text{e} \quad (1, 0, -1)$$

sejam autovetores de A associados, respectivamente, aos autovalores 1, -1 e 0. Temos que A é igual a:

- (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- (e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q15. Sejam $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Pode-se afirmar que:

- (a) se $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, então T é diagonalizável;
- (b) se $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, então T é diagonalizável;
- (c) se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, então T é diagonalizável;
- (d) se $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3$, então T é diagonalizável;
- (e) se λ_1, λ_2 e λ_3 são dois a dois distintos, então T é diagonalizável.

Q16. Temos que vale a seguinte igualdade:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Suponha que uma equação reduzida para a quádrlica

$$4x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - x - y - z - \frac{25}{28} = 0$$

seja

$$u^2 + 3v^2 + 7w^2 + d = 0,$$

onde $d \in \mathbb{R}$. Temos que d é igual a:

- (a) -1 ;
- (b) $-\frac{17}{14}$;
- (c) $-\frac{13}{14}$;
- (d) $-\frac{25}{28}$;
- (e) $-\frac{11}{14}$.