Q1. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a cônica de equação:

$$3x^2 + 4xy - \frac{1}{\sqrt{5}}\,(18x + 4y) + 2 = 0.$$

Uma equação reduzida para essa cônica é:

(a) $3v^2 - w = 0$;
(b) $4v^2 - w^2 = 0$;
(c) $4v^2 - w^2 = \sqrt{5}$;
(d) $4v^2 - w^2 = \frac{1}{5}$;
(e) $4v^2 - w^2 = 1$.

Q2. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica cujo polinômio característico seja $p_A(t) = t^2 - 3t + 2$. Suponha que $(1, 3)$ seja um autovetor de A associado ao autovalor 1. Se X denota a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (-2, 4)$, então $X(\ln 2)$ é igual a:

(a) $(e + e^2, e - e^2)$;
(b) $(1, 1)$;
(c) $(e - e^2, e + e^2)$;
(d) $(2, 2)$;
(e) $(-10, 10)$.

Q3. Considere a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\mathcal{B} = \big\{(1,1,0), (1,0,0), (0,0,1)\big\}$$

e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B},\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Se $S = T \circ T + T$, então $[S]_{\mathrm{can}}$ é igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 16 & 9 & 9 \\ 11 & 6 & 6 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 17 & 11 & 6 \\ 8 & 5 & 3 \\ 13 & 8 & 4 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Q4. Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = 2a_1a_2 + 3b_1b_2, \quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$;

(II) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R})$$

é um produto interno em $P_2(\mathbb{R})$;

(III) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x f(x) g(x) \, \mathrm{d}x, \quad f, g \in C\big([0, 1]\big)$$

é um produto interno em $C\big([0, 1]\big)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são falsas;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Q5. Seja $n \geq 2$ um inteiro e sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) o espaço solução do sistema linear homogêneo com matriz de coeficientes A tem necessariamente a mesma dimensão que o espaço solução do sistema linear homogêneo com matriz de coeficientes B;
(b) a soma das entradas da matriz A é necessariamente igual à soma das entradas da matriz B;
(c) o subespaço gerado pelas colunas de A tem necessariamente a mesma dimensão que o subespaço gerado pelas colunas de B;
(d) o polinômio característico de A é necessariamente igual ao polinômio característico de B;
(e) o determinante de A é necessariamente igual ao determinante de B.

Q6. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Temos que T é diagonalizável se, e somente se:

(a) $bc > 0$;
(b) $bc \geq 0$;
(c) $b = c$;
(d) $bc = 0$;
(e) $b > 0$ e $c > 0$.

Q7. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz real tal que:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

Se X denota a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (2, 2, 3)$, então $X(t)$ é igual a:

(a) $(2 + \operatorname{sen} t, 2 - \operatorname{sen} t, 2 + \cos t)$;
(b) $(1 + \cos t + \operatorname{sen} t, 1 + \cos t - \operatorname{sen} t, 1 + 2\cos t)$;
(c) $(1 + e^t, 1 + e^t, 1 + 2e^t)$;
(d) $(2\cos t + 2\operatorname{sen} t, 2\cos t - 2\operatorname{sen} t, 3\cos t + 3\operatorname{sen} t)$;
(e) $(2\cos t + \operatorname{sen} t, 2\cos t - \operatorname{sen} t, 3\cos t)$.

Q8. Considere as seguintes afirmações:

(I) a função $T : C\big([-1,1]\big) \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(f) = \Big(\int_0^1 f(x)\cos^2 x \,\mathrm{d}x, f(-1) + f(1)\Big), \quad f \in C\big([-1,1]\big)$$

é linear;

(II) se V, W e Z são espaços vetoriais e se $T : V \to W$ e $S : W \to Z$ são transformações lineares, então $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Ker}(S \circ T)$;

(III) se V, W e Z são espaços vetoriais e se $T : V \to W$ e $S : W \to Z$ são transformações lineares, então $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Im}(S \circ T)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) todas as afirmações são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(e) todas as afirmações são falsas.

Q9. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que a matriz $[T]_{\mathrm{can}}$ seja simétrica, onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Suponha que o polinômio característico de T seja igual a $p_T(t) = t^2(\lambda - t)$ e que $T(1,1,2) = (1,1,2)$. Pode-se afirmar que:

(a) $\mathrm{Ker}(T) = [(1,1,2)]$ e $\lambda = 0$;
(b) $\mathrm{Ker}(T) = [(1,1,2),(1,-1,-2)]$ e $\lambda = 1$;
(c) $\mathrm{Ker}(T) = [(1,-1,0),(2,0,-1)]$ e $\lambda = 1$;
(d) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$ e $\lambda = 0$;
(e) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$ e $\lambda = 1$.

Q10. Seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ um operador linear tal que a matriz $[T]_{\mathrm{can}}$ tenha entradas reais, onde can denota a base canônica do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^2$. Suponha que $T(1,2i) = (1+i)(1,2i)$. Se

$$[T]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então $a + b + c + d$ é igual a:

(a) $-\frac{1}{2}$;
(b) 2;
(c) $\frac{1}{2}$;
(d) 0;
(e) -2.

Q11. Seja $t \in \mathbb{R}$ e considere as matrizes A e B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t^2 & t^2 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) as matrizes A e B são semelhantes se, e somente se, $t = 0$ ou $t = 1$;
(b) para qualquer $t \in \mathbb{R}$, as matrizes A e B são semelhantes;
(c) as matrizes A e B são semelhantes se, e somente se, $t \in \{0, 1, -1\}$;
(d) para qualquer $t \in \mathbb{R}$, as matrizes A e B não são semelhantes;
(e) as matrizes A e B são semelhantes se, e somente se, $t = 0$.

Q12. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + 3z + t = 0\big\}.$$

Temos que $S^\perp$ é igual a:

(a) $[(1, 2, 3, 1)]$;
(b) $[(1, -2, 0, 0), (0, 0, 3, 1)]$;
(c) $[(1, -2, 3, 1)]$;
(d) $[(-1, 0, 1, 2)]$;
(e) $[(1, -2, -3, -1)]$.

Q13. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 4 e $T : V \to V$ um operador linear tal que:

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T + \mathrm{I})\big) = 2,$$

onde I denota o operador identidade de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) $T^{2015} = \mathrm{I}$;
(II) T é diagonalizável;
(III) T é bijetor.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(c) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Q14. Considere a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(p) = \big(p(1), p'(2)\big), \quad p \in P_2(\mathbb{R}).$$

Assinale a alternativa correta:

(a) a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$ é igual a 1;
(b) dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $p(t) = at^2 + bt + c$ está em $\mathrm{Ker}(T)$ e $a = 1$, então $c = 5$;
(c) T é sobrejetora;
(d) a dimensão de $\mathrm{Ker}(T)$ é igual a 2;
(e) T é injetora.

Q15. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja W um subespaço de V. Denote por $T : V \to V$ o operador linear definido por:

$$T(v) = \mathrm{proj}_W\, v, \quad v \in V.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) $\langle T(v_1), T(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, para quaisquer $v_1, v_2 \in V$;
(II) $\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$, para quaisquer $v_1, v_2 \in V$;
(III) $T \circ T = T$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.

Q16. Seja fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ no plano, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormal. Considere a equação:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = d,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Denote por A a matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

e considere as seguintes afirmações:

(I) se $\det(A) < 0$ e $d \neq 0$, então o conjunto solução da equação é uma hipérbole;

(II) se $A \neq 0$ e $\det(A) = 0$, então o conjunto solução da equação é uma parábola;

(III) se $\det(A) > 0$ e $d < 0$, então o conjunto solução da equação é vazio.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(b) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;

(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira.