Q8. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Seja $d \in \mathbb{R}$ e considere a equação:

$$9x^2 + 6y^2 - 4xy - 12x - 4y - 8 + d = 0.$$

Se $d < 14$, então o conjunto solução dessa equação é:

(a) uma elipse;
(b) o conjunto vazio;
(c) uma hipérbole;
(d) uma parábola;
(e) um par de retas concorrentes.

Fazendo as mudanças

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad x'' = x' - \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

obtemos

$$\frac{(x'')^2}{(1/\sqrt{5})^2} + \frac{(y'')^2}{(1/\sqrt{10})^2} = 14 - d$$

Q9. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = -(t-2)^2(t-3)$ e que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [(1,-1,0), (1,0,1)],$$

onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(2,2,-2)$ é igual a:

(a) $(6,6,-6)$;
(b) $(-6,6,-6)$;
(c) $(4,4,-4)$;
(d) $(-4,4,-4)$;
(e) $(2,2,-2)$.

$\ker(T - 3I) = \ker(T - 2I)^{\perp}$

$\ker(T - 3I) = \langle (1,1,-1) \rangle$

$T(2,2,-2) = 2T(1,1,-1) = 2(3)(1,1,-1) = (6,6,-6)$

Q10. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Seja W um subespaço não nulo de V tal que $W \neq V$ e seja $T : V \to V$ o operador linear definido por:

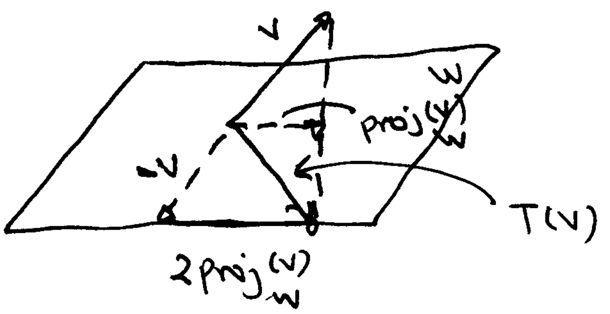
$$T(v) = -v + 2\,\mathrm{proj}_W\, v,$$

para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é simétrico;
(II) os autovalores de T são 1 e -1;
(III) os autovalores de T são 2 e 1.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.



Seja $V = W \oplus W^{\perp}$

Então

$\ker(T - I) = W$

$\ker(T + I) = W^{\perp}$.

Q11. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{60} é igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} (\frac{\sqrt{3}}{2})^{60} & (-\frac{1}{2})^{60} \\ (\frac{1}{2})^{60} & (\frac{\sqrt{3}}{2})^{60} \end{pmatrix}$;

(d) $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{60} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Seja $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$T(z) = \zeta z$, onde
$\zeta = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$
T é $\mathbb{R}$ linear e na base $B = \{1, i\}$.
$[T]_B = A$.
Como $\zeta^{12} = 1$,
segue que
$T^{60} = I$ e $A^{60} = I$.

Q12. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix}$$

seja diagonalizável. Considere a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1, 1)$. Se

$$X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big),$$

então $x(t) + y(t) + z(t)$ é igual a:

(a) $2e^{2t}$;
(b) $e^t + e^{2t}$;
(c) $2e^t$;
(d) $3e^t - e^{2t}$;
(e) $3e^{2t} - e^t$.

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$[T]_{can} = A$

$\det(T - xI) = (1-x)(2-x)^2$

$\dim \ker(T - 2I) = 2 \Rightarrow a = 0$

$\ker(T-2I) = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

$\ker(T - I) = \langle (1,0,-3) \rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 0$ $c_2 = 1$
$c_3 = 1$

$\therefore x(t) + y(t) + z(t) = e^{2t} + e^{2t} = 2e^{2t}$

Q13. Seja $(x(t), y(t))$ a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 4y(t), \\ y'(t) = 4x(t) + 9y(t), \end{cases}$$

satisfazendo a condição $(x(0), y(0)) = (-2, 1)$. Temos que $x(t) + 2y(t)$ é igual a:

(a) 0;
(b) $e^{-t} + 3e^{11t}$;
(c) $2e^t + e^{-11t}$;
(d) $e^t + 2e^{3t}$;
(e) $e^{-t} + 2e^t$.

Os vetores próprios e valores próprios da matriz associado são

$\lambda_1 = 1$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 11$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$X(t) = \begin{bmatrix} -2e^t \\ e^t \end{bmatrix}$ $\therefore$ $-2e^t + 2e^t = 0$

Q14. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Considere a equação:

$$x^2 - 2axy + y^2 - 1 = 0,$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$(x')^2(1+a) + (y')^2(1-a) = 1$

(a) se $0 < a < \frac{1}{2}$, então o conjunto solução dessa equação é uma elipse;
(b) se $\frac{1}{2} < a < 2$, então o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole;
(c) se $a > 0$, então o conjunto solução dessa equação não é uma elipse;
(d) se $a > 2$, então o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes;
(e) existe $a > 0$ tal que o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

Q15. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Sejam $T : V \to V$ um operador linear simétrico e W um subespaço de V tal que $T(w) \in W$, para todo $w \in W$. Suponha que $W \neq V$ e que $v \in V$ é tal que $W^\perp = [v]$. Pode-se afirmar que:

(a) v é um autovetor de T;
(b) v é um autovetor de T se, e somente se, $T(v) = v$;
(c) v é um autovetor de T se, e somente se, $T^2 = T$;
(d) v é um autovetor de T se, e somente se, $T(v) = -v$;
(e) v é um autovetor de T se, e somente se, T^2 é igual ao operador identidade de V.

$T|_{W^\perp}$ é simétrico. Logo $\exists\, \tilde{v}$ em $W^\perp$ tal que $T(\tilde{v}) = \lambda \tilde{v}$. Mas $v = \mu \tilde{v}$, pois $W^\perp$ tem dimensão

$\therefore$ Logo $T(v) = \lambda \mu v$.

Q16. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico tal que $T^2 = T$. Denote por I o operador identidade de V. Pode-se afirmar que:

(a) $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})$;

(b) $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T)$;

(c) $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a V;

(d) $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ não é um autoespaço de T;

(e) $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T + \mathrm{I})$.

Seja $v \in V$. Então

$v = v - T(v) + T(v)$ e $T(v - T(v)) = T(v) - T^2(v)$
$= T(v) - T(v) = 0$

Logo
$V = \ker(T) + T(V)$
Mas se $w = T(v)$, $T(w) = T^2(v) = T(v) = w$
$= 1 \cdot w$

e $V = \ker(T) + \ker(T - I)$
Como T é simétrico a conclusão segue.