Q1. Seja n um inteiro positivo e sejam $A, M \in M_n(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se A é simétrica e $M^t AM$ é diagonal, então $M^t M$ é igual à matriz identidade; Falso, p. ex.: $A = M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(II) se $M^t M$ é igual à matriz identidade, então as colunas de M constituem uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ com respeito ao produto interno usual; Verdadeiro, se $M = [c_1 | c_2 | \cdots | c_n]$, então $M^t M = I \Rightarrow \langle c_i, c_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

(III) se A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então existe uma matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ com $\det(P) = 1$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal. Verdadeiro, se $M^{-1}AM = D$, diagonal e $M = [c_1 | c_2 | \cdots | c_n]$, então $P^{-1}AP = D$, onde $P = \left[\frac{c_1}{\det M} \,\middle|\, c_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, c_n \right]$ e $\det P = 1$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q2. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica tal que

$$A \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e suponha que A possua um autovalor não nulo $\lambda \in \mathbb{R}$. O autoespaço de A correspondente ao autovalor λ é igual a:

(a) $[(1, -1, 3)]$;
(b) $[(-3, 0, 1), (1, 1, 0)]$;
(c) $[(-2, 1, 1)]$;
(d) $\{0\}$;
(e) $[(11, 0, 0)]$.

$V(0) = [(-3,0,1), (1,1,0)]$

$\therefore V(\lambda) \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ simétrica}}}{=} V(0)^{\perp} = [(1,-1,3)]$

Q3. Seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ um operador linear e seja $A = [T]_{\text{can}}$ a matriz que representa T em relação à base canônica do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^2$. Suponha que A tenha entradas reais e que $\text{Ker}\big(T - (2+i)\text{I}\big) = [(i, 1)]$, onde I denota o operador identidade de $\mathbb{C}^2$. Temos que $\det(A)$ é igual a:

(a) 5;
(b) 1;
(c) 0;
(d) -1;
(e) -5.

$V(2+i) = [(i,1)] \Rightarrow V(2-i) = [(-i,1)]$

$\therefore A = MDM^{-1}$, onde

$M = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}$

$\therefore \det A = \det(MDM^{-1}) = \det D = (2+i)(2-i) = 5$

Q4. O polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é $p_A(t) = -(t-2)^2(t+1)$ e o autoespaço de A correspondente ao autovalor 2 é $[(-1,1,0),(1,0,1)]$. Considere a quádrica de equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + 2x - 2y + 1 = 0.$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que

$$2u^2 + 2v^2 - w^2 = \alpha$$

é uma equação reduzida para essa quádrica, então α é igual a:

(a) 0;
(b) -1;
(c) -2;
(d) 1;
(e) 2.

A simétrica

$V(-1) = V(2)^{\perp} = [(1,1,-1)]$

$V(2) = [(-1,1,0),(1,0,1)] =$ Gram-Schmidt

$= [(-1,1,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)]$

Fazendo $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, a equação da quádrica fica:

$$2\underbrace{\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{u}^2 + 2\underbrace{y'}_{v}^{2} - \underbrace{z'}_{w}^{2} + 1 = 1$$

Q5. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz tal que $1+i$ seja um autovalor de A e tal que o autoespaço de A correspondente a esse autovalor seja igual a:

$$[(1,i,0,0),(0,0,1,2-i)].$$

Considere a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1,0,1)$. Temos que $X(\pi)$ é igual a:

(a) $e^{\pi}(0,-1,0,-1)$;
(b) $e^{2\pi}(-1,0,0,1)$;
(c) $e^{2\pi}(0,1,0,-1)$;
(d) $e^{\pi}(-1,-1,0,0)$;
(e) $e^{\pi}(1,0,-1,0)$.

$V(1+i) = [(1,i,0,0),(0,0,1,2-i)]$

$\therefore V(1-i) = [(1,-i,0,0),(0,0,1,2+i)]$

$e^{(1+i)t}(1,i,0,0) = e^t(\cos t, -\operatorname{sen} t, 0, 0) + i e^t(\operatorname{sen} t, \cos t, 0, 0)$

$e^{(1+i)t}(0,0,1,2-i) = e^t(0,0,\cos t, 2\cos t + \operatorname{sen} t) + i e^t(0,0,\operatorname{sen} t, -\cos t + 2\operatorname{sen} t)$

Solução geral: $X(t) = e^t\big[c_1(\cos t, -\operatorname{sen} t, 0,0) + c_2(\operatorname{sen} t, \cos t, 0, 0) + c_3(0,0,\cos t, 2\cos t + \operatorname{sen} t) + c_4(0,0,\operatorname{sen} t, -\cos t + 2\operatorname{sen} t)\big]$

$X(0) = (0,1,0,1) \iff c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0,\ c_4 = -1$

Solução particular: $X(t) = e^t\big[(\operatorname{sen} t, \cos t, 0, 0) - (0,0,\operatorname{sen} t, -\cos t + 2\operatorname{sen} t)\big]$

$\therefore X(\pi) = e^{\pi}(0,-1,0,-1)$

Q6. Sejam $a, b, p, E, F, G \in \mathbb{R}$ e considere a cônica de equação:

$$ax^2 + by^2 + 2pxy + Ex + Fy + G = 0.$$

Suponha que a mudança de variáveis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}$ tem autovalores 2 e -1

transforme essa equação em:

$V(2) = [(1,1)]$

$$2u^2 - v^2 + \alpha u + \beta v + \gamma = 0,$$

$V(-1) = [(-1,1)]$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere a solução X do sistema de equações diferenciais

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix} X(t)$$

que satisfaz a condição $X(0) = (2, 0)$. Temos que $2X(\ln 2)$ é igual a:

(a) $(9, 7)$;
(b) $(1, 3)$;
(c) $(15, 17)$;
(d) $(-3, -5)$;
(e) $(0, 4)$.

Solução geral: $X(t) = c_1 e^{2t}(1,1) + c_2 e^{-t}(-1,1)$

$X(0) = (2,0) \iff c_1 = 1$ e $c_2 = -1$

Solução particular: $X(t) = e^{2t}(1,1) - e^{-t}(-1,1)$

$\therefore 2X(\ln 2) = 2\left(4(1,1) - \frac{1}{2}(-1,1)\right) = 2\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Q7. Sejam n um inteiro positivo, $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear e seja $A = [T]_{\text{can}}$ a matriz que representa T em relação à base canônica do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$. Suponha que a matriz A tenha entradas reais. Seja $\lambda = a+bi \in \mathbb{C}$ um autovalor de T, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Seja $w = u+vi \in \mathbb{C}^n$ um autovetor de T correspondente ao autovalor λ, onde $u, v \in \mathbb{R}^n$. Considere as seguintes afirmações:

(I) T tem pelo menos um autovalor real; Falso, p. ex $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ tem autovalores i e $-i$

(II) T é diagonalizável;

(III) no espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, o conjunto $\{u, v\}$ é linearmente independente. Verdadeiro: $\lambda \neq \bar{\lambda} \Rightarrow \{w, \bar{w}\}$ li sobre $\mathbb{C}$

Assinale a alternativa correta:

Como $[w, \bar{w}]_{\mathbb{C}} = [u, v]_{\mathbb{C}}$, segue que $\{u, v\}$ é li sobre $\mathbb{C}$ e, portanto, sobre $\mathbb{R}$

(a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Falso, p. ex $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ tem autovalores 1 (de multiplicidade 2), i e $-i$ (de mult 1)

mas não é diagonalizável, porque $\dim V(1) = 1$