

Q16. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear simétrico tal que $T^2 = T$. Denote por I o operador identidade de V . Pode-se afirmar que:

- (a) $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a $\text{Ker}(T - I)$;
- (b) $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a $\text{Ker}(T)$;
- (c) $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a V ;
- (d) $(\text{Ker}(T))^\perp$ não é um autoespaço de T ;
- (e) $(\text{Ker}(T))^\perp$ é igual a $\text{Ker}(T + I)$.

$(\text{Ker } T)^\perp = \text{Im } T$, pois têm a mesma dimensão e,
claramente, $\text{Im } T \subseteq (\text{Ker } T)^\perp$

Agora, $\text{Im } T = \text{Ker}(T - I)$, pois $\text{Im } T = \{v \in V : T(v) = v\}$ e,
portanto, é um autoespaço.

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um contra-exemplo para (b), (c), e)
 $(x, y) \mapsto (x, 0)$